分枝ランダムウォークの人口密度の挙動について

中島誠*

京都大学大学院理学研究科数学教室

1　概要

今回の講演では分枝過程と呼ばれる確率モデルについて扱った。特に、まず基本的なモデルである Galton-Watson process の説明とその性質を見てから自分の研究対象であるランダム環境中の分枝ランダムウォークの性質について述べた。以下にその具体的な説明を行う。

2　Introduction

分枝過程とは動物の個体数の時間発展を確率的に記述するために導入されたモデルある。以下動物は粒子と捉えて話を進める。

まず分枝過程を扱う上で非常に重要な役割を果たす生成分布 (offspring distribution) と呼ばれる確率分布の集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ を定義する。

定義 2.1. 生成分布とは次の集合の中の元 $q = \{q(k)\}_{k\geq 0}$ のことを言う。

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \left\{ q = \{q(k)\}_{k\geq 0} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sum_{k\geq 0} q(k) = 1 \right\}. \tag{2.1}$$

注 通常は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の定義で $q(0)+q(1)<1$ という条件をつけるが今回の講演では後に出てくる例のためにその条件ははずしている。

生成分布とは粒子が次に産み出す粒子の数の分布である。より正確には、生成分布 q が与えられたとき粒子は時刻 1 経つと確率 $q(k)$ で k 個の粒子を産むということを表している。

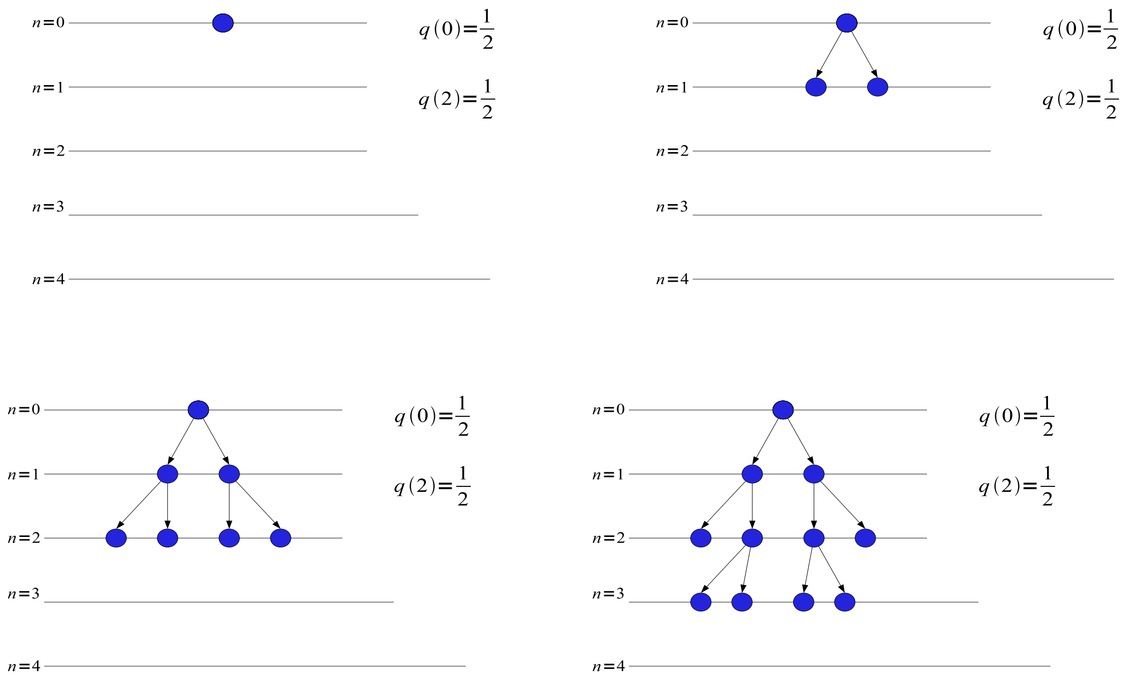
2.1　Discrete time Galton-Watson process

Galton-Watson process は最も簡単な分枝過程である。その定義は次のようになる。

定義 2.2. (Galton-Watson process)

1) 時刻 $n=0$ では粒子は 1 つだけ存在する。
2) 各粒子は時刻 1 経つと死滅し、確率 $q(k)$ で k 個の粒子を産む。この分裂の仕方は各粒子について独立である。

* nakamako@math.kyoto-u.ac.jp



GW process の例:各時刻ごとに粒子は独立に q に従って分裂している。

さらにここでは $q(0)+q(1)<1$ を仮定しておく。このモデルで興味のあることは時刻 n でいくつ粒子がいるかということである。つまり、

$$N_n = \{\text{ 時刻 } n \text{ での粒子数 }\} \tag{2.2}$$

このとき上の Definition 2.2 より次の関係式がわかる。

$$\begin{aligned} N_n &= \{\text{ 時刻 } n \text{ での粒子数 }\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{n-1}} \{\text{ 時刻 } n-1 \text{ での } i \text{ 番目の粒子の子供の数 }\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_{n-1}} \zeta_{n-1}^{(i)}, \end{aligned}$$

ここで $\{\zeta_n^{(i)} : i \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は定義より独立同分布な確率変数で分布は $P(\zeta_n^{(i)} = k) = q(k)$ で与えられる。
　N_n はどのような挙動をするのか、についていくつかの性質を見る。

補題 2.3. 生存するという事象 $\{\text{surv.}\}$ を次で定義する。

$$\{\text{surv.}\} = \{N_n > 0 \text{ for } {}^\forall n \in \mathbb{N}\}$$

このとき次のことが成り立つ。

$$P(\text{surv.}) > 0 \Leftrightarrow m > 1,$$

ここで $m = \sum_{k\geq 0} k \cdot q(k)$ は 1 つの粒子が一回の分裂で産み出す粒子数の期待値である。

　これにより粒子が死滅するかどうかの特徴づけができた。では粒子数はどのようなオーダーで時間発展するのか。以下でそれを見る。

補題 2.4. [1] $E[N_n] = m^n$. さらに $\overline{N}_n \overset{\text{def}}{=} \dfrac{N_n}{m^n}$ は非負マルチンゲール (確率論でよい性質) である。これにより極限

$$\overline{N}_\infty = \lim_{n\to\infty} \overline{N}_n$$

が確率 1 で存在し, $E[\overline{N}_\infty] = 1$ or 0.

定理 2.5. [1]

$$\begin{aligned} E[\overline{N}_\infty] = 1 &\Leftrightarrow \overline{N}_n \text{ が一様可積分} \\ &\Leftrightarrow m > 1,\ \sum_{k\geq 1} (k \log k)\cdot q(k) < \infty. \end{aligned}$$

さらに、$E[\overline{N}\infty] = 1$ ならば $\{\text{surv.}\} \overset{\text{a.s.}}{=} \{\overline{N}_\infty > 0\}$.

Theorem 2.5 より、いずれかの条件が満たされれば

$$N_n \asymp E[N_n] \quad \text{on } \{\text{surv.}\}.$$

が成り立つことを意味している。
以上が Galton-Watson process の性質である。

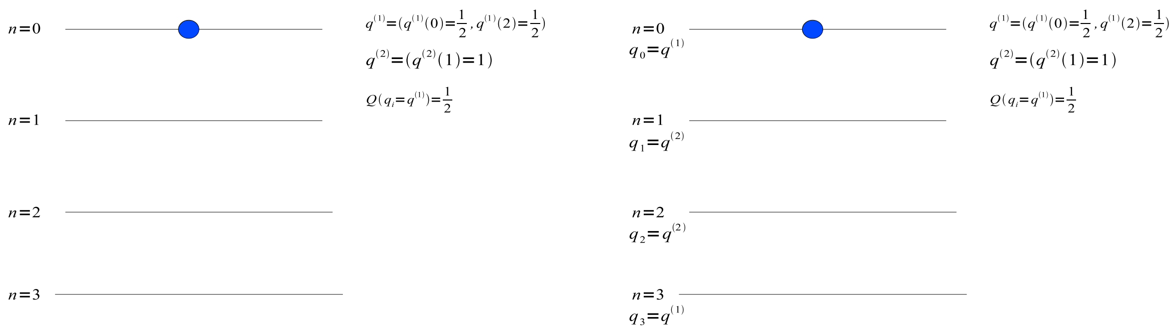
2.2 Smith-Wilkinson model(Branching process in random environment)

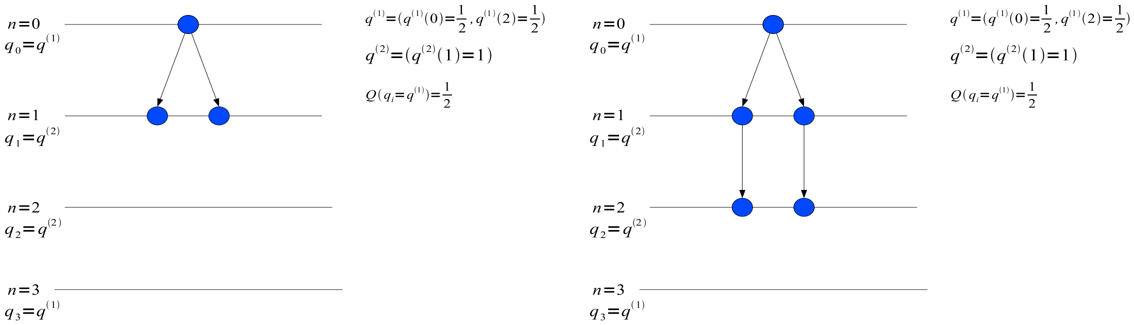
Smith-Wilkinson model はランダム環境中の分枝過程である。

このモデルは Galton-Watson process において生成分布を時間ごとに異なるもので与えられたもとで行うものであり、生成分布の与え方が独立同分布で与えられるものである。正確には次のルールで定義されるものである。

定義 2.6. (Smith-Wilkinson model)

1) 時刻 $n = 0$ で粒子が 1 つだけ存在する。
2) 環境 $\{q_n\}_{n\geq 0} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ をある分布 Q に従って独立同分布に与える。
3) 時刻 n にいる各粒子はそれぞれ生成分布 q_n に従って独立に粒子を産み出す。





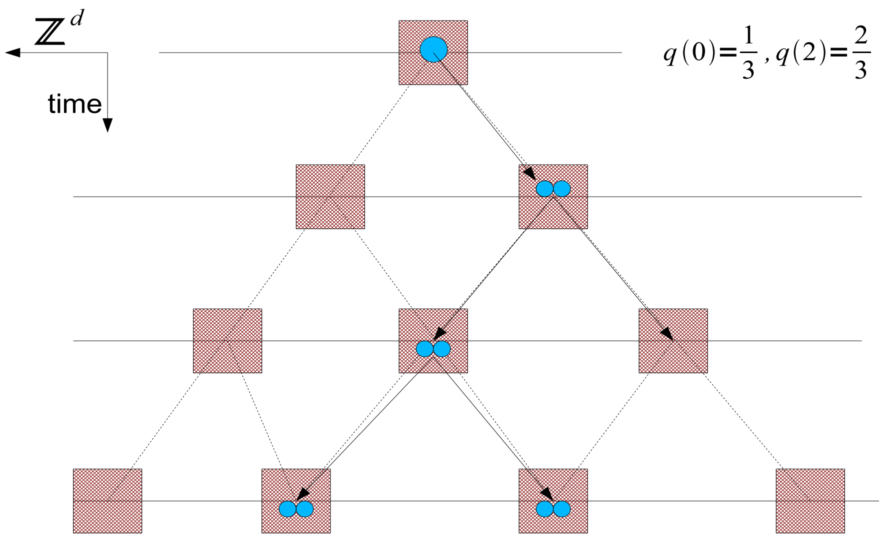
SW model の例**:**まず先に各時刻における生成分布を与え、それから分裂を繰り返す。

2.3 分枝ランダムウォーク

分枝ランダムウォークは粒子に空間の動きを含めた分枝過程である。ここでは $\mathbb{Z}^d$ 上での空間の動きのものを考える。この定義は次で与えられる。

定義 **2.7.** (分枝ランダムウォーク)

1) 時刻 $n=0$ で 1 つの粒子が原点に存在する。
2) 各粒子は時刻 1 経つと $\mathbb{Z}^d$ 上の隣接点に確率 $1/2d$ で独立に跳び、そのあと生成分布 q に従ってその点で独立に分裂する。



このモデルに関して興味のあるもののひとつとして粒子の空間分布 (人口密度) の挙動がある。つまり次のようなものを見る。

$$\rho_n(x) = \frac{N_{n,x}}{N_n}\mathbf{1}\{N_n > 0\}, \tag{2.3}$$

ここで

$$N_{n,x} = \sharp\{\text{ 時刻 } n \text{ で } x \text{ にいる粒子 }\}$$
$$N_n = \sharp\{\text{ 時刻 } n \text{ で存在する粒子 }\}$$

注 $\rho_n(\cdot)$ は $\{\text{surv.}\}$ の事象のもとで $\mathbb{Z}^d$ (or $\mathbb{R}^d$) 上のランダムな確率測度になっている。

この人口密度の挙動について次のようなことが先行結果がある。

定理 2.8. [2] 次の条件を仮定する。

$$m > 1,\ \sum_{k \geq 1} (k \log k) q(k) < \infty$$

このとき次が成り立つ。$n \to \infty$ のとき

$$\rho_n(\sqrt{n}\cdot) \Rightarrow \nu(\cdot) \quad \text{a.s. on } \{\text{surv.}\}$$

つまり任意の $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}}^{d} f(x/\sqrt{n}) \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\nu(x), \quad \text{a.s. on } \{\text{surv.}\},$$

ここで ν は平均 0, 分散 $\frac{1}{d}I$ の d 次元正規分布。

注 上の定理でスケーリング、極限がランダムウォークの中心極限定理と一致していることから分枝ランダムウォークの中心極限定理と呼ぶ。

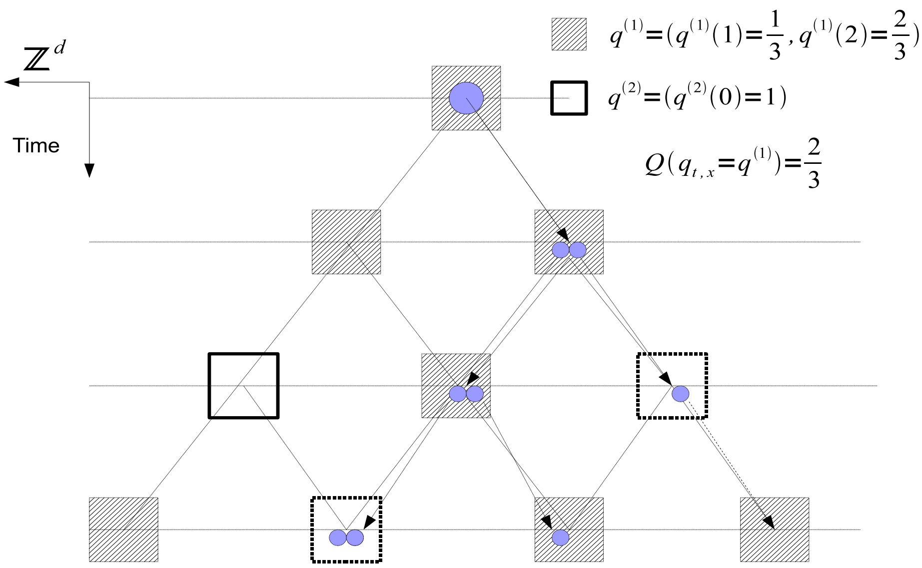
3 ランダム環境中の分枝ランダムウォーク

3.1 ランダム環境中の分枝ランダムウォーク

この節では第 1 節で挙げた Smith-Wilkinson model を分枝ランダムウォークに拡張したものを考える。拡張の仕方は生成分布を時間だけでなく空間についても異なるように与えることによって行う。より正確には次のように定義する。

定義 3.1. (ランダム環境中の分枝ランダムウォーク (**BRWRE**))

1) 時刻 $n = 0$ では粒子が原点に 1 つのみ存在する。
2) 環境 $q_{n,x} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}$ をある分布 Q に従って独立同分布に与える。
3) 時刻 n で x んいいる粒子は独立に $\mathbb{Z}^d$ 上の隣接点に確率 $1/2d$ で跳び、そのあと生成分布 $q_{n,x}$ に従ってその点で独立に分裂する。



BRWRE の例:各時刻、空間の点に生成分布をランダムに与えた上で分枝ランダムウォークをしている

このモデルは現実世界では子供の産みやすさは食糧問題や気候の変動など時間や場所に依存していることを反映したものになっている。

この講演では興味は人口密度 $\rho_n(\cdot)$ の挙動がどのようなものであるかである。つまりは次のようなものである。

Question

ランダム環境中の分枝ランダムウォークに対して中心極限定理が成り立つのか？

この疑問に対する答えを見る前にまず BRWRE の性質を見ていく。

3.2 Properties

まずつぎのような記号を導入する。

Notation

$$\begin{aligned}
P^q &: \text{環境 } q \text{ を与えられたもとでの分枝ランダムウォークを記述する確率測度},\\
Q &: \text{環境 } q \text{ を与える分布},\\
P &: P(\cdot) = \int P^q(\cdot)dQ,\\
E[\cdot] &: P \text{ に関する期待値},\\
Q[\cdot] &: Q \text{ に関する期待値}
\end{aligned}$$

時刻 n での総粒子数 N_n について次のことが成り立つ。これは Galton-Watson process における Lemma2.4 に対応するものである。

補題 3.2. $E[N_n] = m^n$.、ここで $m = Q[\sum_{k\geq 0} k \cdot q_{n,x}(k)]$. さらに $\overline{N}_n \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{N_n}{m^n}$ は非負マルチンゲールである。これにより極限

$$\overline{N}_\infty = \lim_{n\to\infty} \overline{N}_n$$

が確率 1 で存在し, $E[\overline{N}_\infty] = 1$ or 0.

また

$$E[\overline{N}_\infty] = 1 \Leftrightarrow \overline{N}_n \text{ が一様可積分.}$$

注 $q_{n,x}$ は時間、場所に関して独立同分布なので m は (n, x) に依らない。

しかし Galton-Watson process と違い、次元によって $\overline{N}_n$ の挙動は異なる。以下のような事実がある。

Fact

1. $d = 1$ or 2 かつ、$Q(m = m_{n,x}) < 1$ のとき、$\overline{N}_\infty = 0$ a.s. となる。ここで $m_{n,x} = \sum_{k \geq 0} k \cdot q_{n,x}(k)$.
2. $d \geq 3$ のとき次のような相転移が起こる。

$$E[\overline{N}_\infty] = \begin{cases} 1, & \text{環境があまりランダムでない (正規成長 } \textbf{(regular growth phase)}) \\ 0, & \text{環境が十分ランダム (非正規成長 } \textbf{(slow growth phase)}) \end{cases}$$

さて再び疑問に戻ると、Theorem2.5,2.8 から分枝ランダムウォークでは次のことがわかる。

$$E[\overline{N}_\infty] = 1 \Rightarrow \text{分枝ランダムウォークの中心極限定理が成り立つ.}$$

このことより疑問は次のように書き換えられる。

Question

1) regular growth phase であるとき、ランダム環境中の分枝ランダムウォークの中心極限定理が成り立つのか。
2) slow growth phase では ρ_n はどのような挙動をするのか。

次の章でこれに関する答えを与える。

4 Results

4.1 Regular growth phase

この節では Regular growth phase における疑問に関する答えを与える。まず正規成長になるための十分条件を与える。

補題 4.1. $d \geq 3$ と仮定する。このとき次の 2 つの条件は同値

i) $\overline{N}_n$ が一様 <u>2 剰</u> 可積分

ii)

$$m > 1,\ m^{(2)} < \infty,\ Q[(m_{n,x})^2] < \pi_d m^2, \tag{4.1}$$

ここで $m^{(2)} = Q[\sum_{k\geq 0} k^2 \cdot q_{n,x}(k)]$, また π_d はシンプルランダムウォークの再帰確率 $\pi_d = P(S_n = 0,\ {}^\forall n \geq 1)$.

注 Lemma4.1 の仮定を満たせば $\overline{N}_n$ は一様可積分でもあるので正規成長になる。また 4.1 の第 3 項は環境のランダムさを抑える項になっている。

次の定理により中心極限定理が成り立つことがあることが保証される。

定理 4.2. $d \geq 3$ とし、Lemma 4.1 の条件を仮定する。このとき

$$\rho_n(\sqrt{n}\cdot) \Rightarrow \nu(\cdot), \quad \begin{cases} \text{in } P(\cdot|\text{surv.})\text{-probability}, & [7], \\ \text{a.s. on } \{\text{surv.}\}, & [6]. \end{cases}$$

また、次の定理により中心極限定理が成り立つことがわかる。

定理 4.3. [3] $d \geq 3$ とし、次の条件を仮定する。

$$m > 1,\ m^{(3)} < \infty,\ Q[(m_{n,x}^{(2)})^2] < \infty,$$

ここで、$(m_{n,x}^{(2)})^2 = \sum_{k\geq 1} k^2 \cdot q_{n,x}(k)$, $m^{(3)} = Q[\sum_{k\geq 1} k^3 \cdot q_{n,x}(k)]$. BRWRE が正規成長であるとき次のことが成り立つ。

$$\rho_n(\sqrt{n}\cdot) \Rightarrow \nu(\cdot), \quad \text{in } P(\cdot|\text{surv.})\text{-probability},$$

この定理により 1 つ目の疑問に対する答えが肯定的であることがわかる。

4.2 Slow growth phase

この節では非正規成長である場合の答えを与える。先に答えを与えると局在化が起こる。

定理 4.4. [5] 次の条件を仮定する。

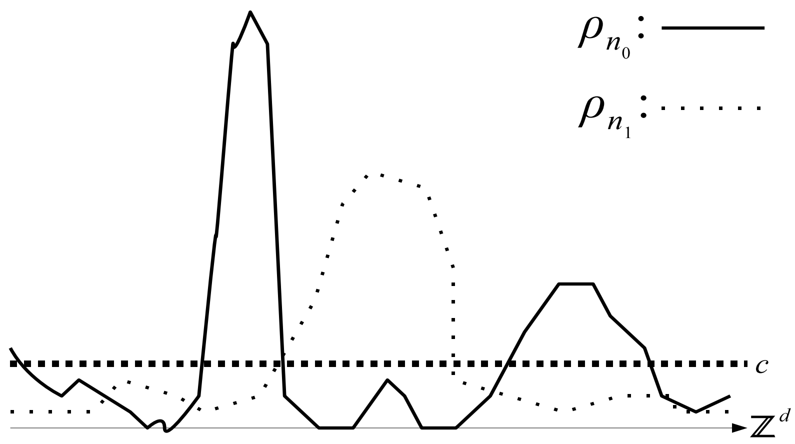
$$Q(q_{n,x}(0) = 0) = 1,\ m^{(3)} < \infty. \tag{4.2}$$

BRWRE が非正規成長であるとき、次が成り立つ。

$$\text{ある定数 } c > 0 \text{ が存在して無限回 } \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \rho_n(x) > c, \quad \text{a.s.}$$

となる。

注 定理が言っている事はデルタマスのようなものが現れることがあるということを意味しており、粒子の広がり方の言葉で言うと粒子が 1 点に多くの粒子が集まることが何度もあることを意味している。



局在化の例

ある時刻 n_0, n_1 で定数 c よりも大きくなっている点がある。このような時刻が無限回現れることになる。

注 条件 $Q(q_{n,x}(0) = 0) = 1$ は死滅することがないことを表す条件であり、強い条件である。しかしこの条件 4.2 は弱めることができ次のようなものになる。

$$Q[m_{n,x}^{-1}] < \infty,\ \Psi > 0,\ m^{(3)} < \infty. \tag{4.3}$$

ここで

$$\Psi =^{\exists} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Q[\log P^q[N_n]$$

このとき次のことが成り立つ。

定理 4.5. [4] (4.3) を仮定する。このとき BRWRE が非正規成長であるとき,

$$\text{ある定数 } c > 0 \text{ が存在して無限回 } \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \rho_n(x) > c, \quad \text{a.s. on}\{\text{surv.}\}$$

以上により結論として非正規成長であるとき局在化が起こることがわかった。

5 謝辞

城崎新人セミナーに参加させていただいた上に公演の機会まで与えていただき、運営委員の皆様にこの場を借りて深く感謝いたします。また様々な意見、ご指摘を下さった方々にも改めて感謝します。

参考文献

[1] Athreya, K., Ney, P.: Branching processes. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. xi+287 pp

[2] Biggins, J., D.: The central limit theorem for the supercritical branching random walk, and related results. Stochastic Process. Appl. 34 (1990), no. 2, 255–274.

[3] Heil, H., Nakashima, M., Yoshida, N.: Branching random walks in random environemnt in $d \geq 3$ are diffusive in the regullar growth phase, preprint, 2009.

[4] Heil, H., Nakashima, M.: An Annexe to "Localization for Branching Random Walks in Random Environment", preprint, 2010.

[5] Hu, Y., Yoshida, N.: Localization for Branching Random Walks in Random Environment, preprint, 2007, to appear in Stoch. Proc. Appl.

[6] Nakashima, M.: Central Limit Theorem for Linear Stochastic Evolutions, preprint.

[7] Yoshida, N.: Central limit theorem for branching random walks in random environment. Ann. Appl. Probab. 18 (2008), no. 4, 1619-1635.