有限生成群の擬等長不変量について 2

森島　北斗*

大阪大学理学研究科数学専攻

1　基礎知識

1.1　有限生成群を幾何学的対象とみなす

G を有限生成群とし、S をその有限生成系とする。このとき G は距離 $d_{(G,S)}$ を持つ。ここで $d_{(G,S)}$ は、$d_{(G,S)}(x,y) = min\{n \mid x = s_1^{i_1}...s_n^{i_n}y, s_k \in S, i_k \in \{-1,1\}\}$ をすべての $x \neq y \in G$ について満たす。これは語距離 (word metric) と呼ばれる。二つの距離空間 X、Y に対して、$f : X \to Y$ が擬等長写像 (quasi-isometry) であるとは、ある実数 $K \geq 1$ に対して、1. $\frac{1}{K}d(x,x') - K \leq d(f(x), f(x')) \leq Kd(x,x') + K$、2. Y の部分空間 $f(X)$ が K-coarsely dense。の 2 条件を満たすことである。ここで、ある実数 $K \geq 0$、距離空間 X に対して、X の部分空間 Y が K-coarsely dense であるとは、$f(X)$ の K-近傍が Y に一致することを言う。距離空間 X、Y の間に擬等長写像が存在するときそれらを擬等長 (quasi-isometric) であるという。これは距離空間の間の同値関係になる。有限生成群には様々な有限生成系があるが、これらから作られる語距離による距離空間はすべて擬等長である。一つの有限生成群には一つの擬等長類、すなはち、この意味で幾何学が定まっている。おおざっぱにいってこの幾何学は、有限生生群をあるコンパクトリーマン多様体の基本群とみなしたときに、その普遍被覆リーマン多様体の幾何が大域的に同じ群を同一視したものである。この見方における有限生成群の研究方針である Gromov's Program とは、有限生成群を擬等長によって分類せよというもので、擬等長不変量の研究と群の擬等長剛性の研究の二つよりなる。

1.2　注目すべき結果

Gromov による次の定理は今日においてお手本とされる定理である。「有限生成群 G が多項式増大度を持つならば G は冪零群を指数有限部分群として持つ。」というものである [Gro]。多項式増大度をもつとは群とその語距離について定義される増大度関数 $f(r) = \#Ball_r(e)$(growth function) がある r の多項式で上から押さえられることをいう。有限生成群 G が多項式増大度を持つという性質は擬等長で不変である。指数有限部分群と元の群とは擬等長であるためこの定理は、冪零群に対し擬等長剛性が成立することを示す。この定理のさらにすばらしいところは、増大度関数がある程度計算できるものであることである。擬等長不変量はいまや多く存在するが勝手な群を与えて計算がある程度可能であるものはほとんどないことに注意しておく。第二に群の双曲性という概念をあげる [Har]。有限生成群 G が双曲的（hyperbolic）であるとは、その語距離について次の条件を満たすことである。すなはち、ある定数 $\delta \geq 0$ があって、任意の測地三角形に対してひとつの辺が他の二つの辺の δ 近傍に入るという条件である。有限生成群 G が双曲的であるという性質は擬等長で不変である。双曲多様体など他の数学に大いに関連していることは言うまでもないだろうが、さらによいことに、群の双曲性は勝手な群を与えて計算がある程度可能である。これは群の表示が与えられたとき、有限表示群であり、関係式がわかっ

* h-morishima@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

ている状況で、もしその表示が small cancelation の条件を満たせば、群が双曲的であることがわかるからである。さらに、双曲的ならば群の語に関する問題 (word problem) が解けることが知られている。

2 群 ⇒ 幾何 ⇒ 環

古典的な結果では微分幾何などでよく知られたリー群や双曲多様体を用いてこれらに関連する、群の Gromov's Program を解くことができたわけだが (これに関してもまだ完全には解けないが)、有限生成群はそれぞれが様々な幾何を定めていて、我々が既に知っていて十分に調べることができる幾何の範疇には確実に収まってはいない。そこで、群の代数と幾何学的直感をあわせた理論が必要とされる。Roe の Coarse Geometry では Coarse Space に対してそれらから生じる C^* 環を考えることが重要であるが [Roe]、それを参考に、我々はそのより純代数的な対象を考える。具体的には次のようなものを構成する。k は任意の単位的な環とする。$l^f(G,k) = \{F : G \to k \mid \text{the image of } F \text{ is finite.}\}$ は各点で和と積をとることで再び環となる。この環に G は右から次のように作用している。すなはち、$(F^g)(x) = F(gx)$ がすべての $x, g \in G$ と $F \in l^f(G,k)$ に対して成り立っている。それでこれらから斜群環 (skew group ring) $\mathcal{R}(G) = G \ltimes l^f(G,k) = \{\sum_{i=1}^n g_i F_i \mid g_i \in G, F_i \in l^f(G,k)\}$ を構成することができる。ここで $\mathcal{R}(G)$ の積は $(gF_1)(hF_2) = (gh)(F_1^h)F_2$ をすべての $g, h \in G$ と $F_1, F_2 \in l^f(G,k)$ について満たしている。ここで次のことが成り立つ。

定理 2.1. 有限生成群 G と G' が擬等長であるならば、$\mathcal{R}(G)$ と $\mathcal{R}(G')$ は森田同値である。

二つの環 R, R' が森田同値であるとは、それらが成す左加群のなす圏が圏同値となることである。三種類の証明が [Mo2] で与えられている。一つは elementary な証明。あとの二つは、Topological Groupoid と Coarse Geometry の理論を使った証明である。この定理は <u>環の森田同値で不変な量はすべて擬等長不変量である</u> ことを意味しているし、群から幾何を構成したがその幾何から、環という割と群に近い代数系に戻ってくることができるということも意味している (実は $\mathcal{R}(G)$ は G と全単写な擬等長写像によって擬等長になる有限生成群の群環を部分環として持っている)。まだ $\mathcal{R}(G)$ がどのくらいの情報を落とすのかはわかっていないが、ある程度強い情報を持つと考えられる [Mo2]。

3 プラン

目標は Gromov の定理、双曲性のような、群が与えられたときある程度の計算が可能なものを導き出すこと。そのために、環の森田同値で不変な量を $\mathcal{R}(G)$ に関して詳しく調べたり、あるいはすでによく知られている不変量であって計算が困難なものを環の言葉で表しておいて計算に繋げるという方針で研究を進めている。

参考文献

[Mo1] H. Morishima, 有限生成群の擬等長不変量について, 第 5 回城崎新人セミナー報告集, (2008).

[Mo2] H. Morishima, *Note on ring theoretic invariants of quasi-isometric equivalences*, preprint.

[Gro] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publications Mathematiques de l'IHES, 53-73, (1981).

[Har] P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'apres Mikhael Gromov*, volume 83 of Progress in Mathematics.

[Roe] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, American Mathematical Society, University Lecture Series, 31 (2003).