

# 私的タイヒミュラー空間入門

宮地 秀樹\*

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

## 1 導入

この論説は筆者が城崎セミナーで行ったタイヒミュラー空間に関する入門講義について概説することが目的である。しかし、筆者が話したタイヒミュラー空間の諸性質については、日本語で書かれた標準的教科書 [IT] にほとんど載っている。そのため、それらについては [IT] を参考にしていただくこととして、この機会では、講演内では触れたがその証明について全く触れなかった次の H.Masur と M.Wolf による定理を解説する。

**定理 1.1** (Masur-Wolf [MaWo]).  $T_g$  を種数  $g$  のタイヒミュラー空間,  $d_T$  を  $T_g$  上のタイヒミュラー距離とする。このとき  $g \geq 2$  であれば, 距離空間  $(T_g, d_T)$  は Gromov 双曲的ではない。

この論説では, 定理 1.1 に対して, オリジナルの H.Masur と M.Wolf の証明 ([MaWo]) ではなく, J.McCarchy と A.Papadopoulos により与えられた証明 ([McPa]) の解説を与える。また, 定理 1.1 において  $g \geq 2$  は必要である。実際,  $g = 0$  のときは  $T_0 = \{pt\}$  であり,  $g = 1$  のときは  $(T_1, d_T)$  は双曲平面と等長的である。故に  $g \leq 1$  であれば  $(T_g, d_T)$  は Gromov 双曲的である。

## タイヒミュラー空間と双曲性について

タイヒミュラー空間と双曲性の関係についての重要な結果の一つに, H.Royden の定理「タイヒミュラー距離は小林距離と一致する」([Ro]) がある\*<sup>1</sup>。タイヒミュラー距離は完備であるので, H.Royden の結果は「タイヒミュラー空間は小林の意味で完備双曲的である」ことを示す。さらに, すべてのタイヒミュラー距離に関する測地線はタイヒミュラー円板と呼ばれる小林距離に関する測地円板 (小林計量に関する複素測地線) に含まれるため, タイヒミュラー円板上においてタイヒミュラー距離は曲率  $-4$  の 2次元双曲空間の双曲距離と等長的である。従って, タイヒミュラー円板上では異なる測地線の間の距離は指数的に発散する。このように, タイヒミュラー距離は双曲的に振る舞うことも起こり得るのである (cf. [Oh], 命題 2.33)。

また, Masur-Minsky ([MaMi]) によれば曲線複体 (curve complex) は Gromov 双曲的である。さらに, Masur と Minsky の定理の証明からわかるように,  $T_g$  は短部 (Thin part) を潰す\*<sup>2</sup>と曲線複体と自然に擬等長同型となり, 従って Gromov 双曲的になるのである (cf. [Oh], 定理 2.37)。よって, 双曲性に対する「悪さ」をする場所がちゃんとわかるという意味で, これらの定理は興味深い。

一方で「タイヒミュラー空間の非双曲性 (非負曲率性)」について定理 1.1 以前から知られていなかった訳ではない。Masur [Ma] では, タイヒミュラー空間が Busemann の意味で負曲率ではないこと示されている。以下の Gromov 非双曲性の証明においても, 論文 [Ma] で得られた Masur による相似な Strebel 測地半直線の漸

\* miyach@math.sci.osaka-u.ac.jp

\*<sup>1</sup> この論説では全く触れなかったが, タイヒミュラー空間はベルトラミ微分の空間 (複素バナッハ空間) から誘導される自然な複素構造をもつ。小林距離はこの複素構造の下で定義される。

\*<sup>2</sup> 数学的には, Electric space として定式化された距離空間を考える。

近性を用いる (定理 4.6). また, Masur-Minsky の定理のところで現れた「短部」の距離空間としての (擬等長) 構造については, Minsky[Mi2] により詳しく調べられている. そしてタイヒミュラー空間は短部の中には, ある意味で負曲率的ではないことを Minsky により指摘されていた事も注意しておく\*3.

なお, 最近 H.Masur と B.Farb は, この論説で扱っている Strebel 測地半直線を用いて, タイヒミュラー距離 (内在的距離) によるモジュライ空間の Deligne-Mumford のコンパクト化の再構成を与えていることを注意しておく (cf. [FM]).

この論説は, 定理 1.1 の証明についてなるべく self-contained になるように心がけたつもりである. そのため, 擬等角写像の基本性質 (length-area method) や Gromov 双曲空間の一般論 (コンパクト化など) を知っていれば読めるようにはなっている (はずである).

## 謝辞

城崎新人セミナーで講演の機会を与えてくださった主催者の方々に御礼を申し上げます. ありがとうございます.

## 目次

1	<b>導入</b>	1
2	<b>タイヒミュラー空間</b>	3
2.1	擬等角写像 . . . . .	3
2.2	タイヒミュラー空間 . . . . .	7
3	<b>Gromov 双曲性</b>	7
3.1	距離空間の一般論 . . . . .	8
3.2	Gromov 双曲空間 . . . . .	8
3.3	Gromov 境界 . . . . .	8
4	<b>タイヒミュラー空間の幾何</b>	9
4.1	極值的長さ . . . . .	9
4.2	Maskit の評価と Kerckhoff の公式 . . . . .	10
4.3	タイヒミュラー空間内の測地線 . . . . .	11
5	<b>Jenkins-Strebel 微分の幾何</b>	15
5.1	Minsky の不等式 . . . . .	16
5.2	交わらない曲線の極值的長さの振る舞い . . . . .	16
6	<b>定理 1.1 の証明</b>	20
6.1	H. Masur と M. Wolf の証明について . . . . .	20
6.2	J.McCauchy と A.Papadopoulos の証明について . . . . .	21

\*3 ここで誤解のないように申し上げたい. ここでの注意では定理 1.1 が「自明である」ということを言いたいのではない. Masur の定理 ([Ma]) と Minsky の指摘 ([Mi2]) からわかるように, 定理 1.1 の発想が自然である事を注意したいだけである

## 2 タイヒミュラー空間

ここではタイヒミュラー空間の定義と諸性質を与える。その前にタイヒミュラー理論を研究するための基本的な道具である擬等角写像について復習する。

### 2.1 擬等角写像

#### 2.1.1 擬等角写像の定義

$\mathbb{C}$  内の領域  $D_1$  と  $D_2$  およびその間の向きを保つ同相写像  $f : D_1 \rightarrow D_2$  を考える。  $f$  が  $K$ -擬等角写像 ( $K \geq 1$ ) であるとは

- (1)  $f$  は ACL である。
- (2)  $k < 1$  を  $K = (1+k)/(1-k)$  となるように定義する。このとき

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq k \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|$$

が  $D_1$  上のほとんど至る所成立する。

条件 (2) における  $K$  の下限を  $f$  の**最大歪曲度 (maximal dilatation)** と呼び  $K(f)$  と書く。条件 (1) 内の ACL についてを詳細に説明する事はここでは避けるが、これは  $f$  が  $D_1$  上でほとんど至る所偏微分可能であることを保証するものである (従って (2) の条件が意味を持つ)。典型例は  $|\lambda| < 1$  を満たす  $\lambda \in \mathbb{C}$  を用いて

$$f(z) = z + \lambda \bar{z}$$

なる  $\mathbb{C}$  上の線形写像である。これは  $\mathbb{C}$  上の  $K = (1+|\lambda|)/(1-|\lambda|)$ -擬等角写像であることが簡単な計算からわかる。

**注意 2.1.** 擬等角写像をバリバリ使うような専門家でない限りは、擬等角写像と言えば、(2) を満たす可微分同相写像と考えてもあまり問題は無い。しかし「ほとんど至る所」を考える事を必要な場合が勿論あり得る。例えば、コンパクト性 (完備性) (次章にある擬等角写像の性質の性質 (iv)) を用いる場合には可微分同相写像だけを考えていては理論上成り立たず、ほとんど至る所微分可能であるような擬等角写像も考えなければならない。つまり、一般には極限が可微分同相写像ではない  $K$ -擬等角写像になるのである。従って、後の章で注意するタイヒミュラー距離の完備性を使う人たちは、知らないうちに可微分同相ではない擬等角写像を扱っていることになる。

#### 2.1.2 擬等角写像の定義の意味

擬等角写像の定義の意味を簡単に言うと、接空間の円のつぶれ方が一様に押さえられている という意味である。このことを定式化しよう。平行移動を合成する事により  $0 \in D_1$  として  $f(0) = 0$  として考える (平行移動を合成しても (1) と (2) の性質は変わらない事に注意する)。また  $f$  が  $z = 0$  で全微分可能であると仮定する\*4。また  $f(z)$  の代わりに  $f(z)/f_z(0)$  を考える事により  $f_z(0) = 1$  と仮定しても良い (相似変換を合成しても (1) と (2) の性質が不変である事に注意する)。このとき

$$f(z) = z + \lambda \bar{z} + o(|z|) \quad \lambda = f_{\bar{z}}(0)$$

\*4 一般の擬等角写像は定義域上のほとんど至る所で全微分可能である (Gehring-Lehto の定理)。

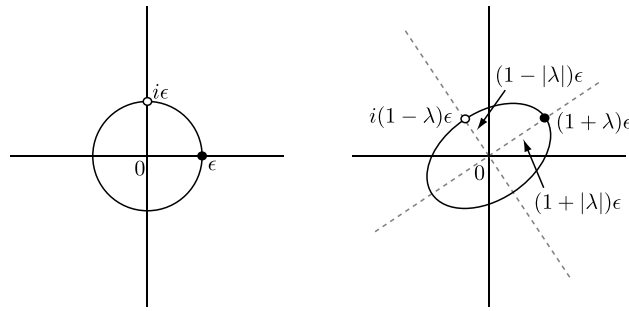


図1 接空間における円をつぶれ方.

が  $z = 0$  の近傍で成立する. 仮定から

$$|\lambda| = |f_{\bar{z}}(0)| \leq k|f_z(0)| = k$$

である. このとき接空間では図1のようにになっている. つまり, (ユークリッド計量に関する) 半径  $\epsilon$  の無限小円は長軸  $(1 + |\lambda|)\epsilon$ , 短軸  $(1 - |\lambda|)\epsilon$  の (無限小) 楕円にうつる. このとき

$$\frac{(\text{長軸の長さ})}{(\text{短軸の長さ})} = \frac{(1 + |\lambda|)\epsilon}{(1 - |\lambda|)\epsilon} = \frac{1 + |\lambda|}{1 - |\lambda|} \leq \frac{1 + k}{1 - k} = K$$

となる. つまり無限小円をつぶれ方が一様に押さえられている.

### 2.1.3 擬等角写像の性質

簡単な計算から次のことがわかる.

- (i) 1-擬等角写像は等角写像 (双正則写像) である\*<sup>5</sup>.
- (ii)  $f$  が  $K$ -擬等角写像であれば, 逆写像  $f^{-1}$  も  $K$ -擬等角写像である.
- (iii)  $f_1 : D_1 \rightarrow D_2$  を  $K_1$ -擬等角写像,  $f_2 : D_2 \rightarrow D_3$  を  $K_2$ -擬等角写像とする. このとき合成  $f_2 \circ f_1$  は  $K_1 K_2$ -擬等角写像である.
- (iv)  $K \geq 1$  を固定した場合,  $\{0, 1\}$  の2点を固定するように正規化された,  $\mathbb{C}$  からそれ自身への  $K$ -擬等角写像全体は局所一様収束位相に関して閉じている. つまり,  $0, 1$  を固定する  $\mathbb{C}$  上の  $K$ -擬等角写像からなる列は  $K$ -擬等角写像に収束する部分列を含む.
- (v)  $f$  を  $D$  上の擬等角写像とすると,  $D$  上のほとんど至る所で  $f_z \neq 0$  が成立する.

### 2.1.4 ベルトラミ微分

擬等角写像の性質 (v) より, 平面領域  $D$  上の擬等角写像  $f$  に対して可測関数の意味で商

$$\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$$

が  $D$  上ほとんど至る所定義される. この  $\mu_f$  を  $f$  の**ベルトラミ微分**と呼ぶ. 擬等角写像の定義 (2) より  $f$  が  $K$ -擬等角写像の場合

$$|\mu_f| \leq k = \frac{K - 1}{K + 1} < 1$$

測度 0 の集合を除いて成立する. 従って  $D$  上の擬等角写像  $f$  のベルトラミ微分  $\mu_f$  は,  $D$  上有界可測関数のなす複素バナッハ空間  $L^\infty(D)$  の単位球に含まれる.

\*<sup>5</sup> Weyl の補題『ほとんど至る所 Cauchy-Riemann 方程式が成立する写像は正則写像と測度 0 の集合を除いて一致する』を用いるので「簡単な計算」とは書いたが, 実は全く自明ではない.

いま,  $f$  を  $D_1 \rightarrow D_2$  上の擬等角写像として  $h : D_3 \rightarrow D_1$ ,  $g : D_2 \rightarrow D_4$  を等角写像とする. ほとんどすべての  $z \in D_3$  と  $w \in D_1$  に対して

$$\mu_{f \circ h}(z) = \frac{(f \circ h)_{\bar{z}}}{(f \circ h)_z} = \frac{f_{\bar{z}}(h(z))\overline{h'(z)}}{f_z(h(z))h'(z)} = \mu_f(h(z)) \frac{\overline{h'(z)}}{h'(z)} \quad (2.1)$$

$$\mu_{g \circ f}(w) = \frac{(g \circ f)_{\bar{w}}}{(g \circ f)_w} = \frac{g'(f(w))\overline{f_w(w)}}{g'(f(w))f_w(w)} = \mu_f(w) \quad (2.2)$$

が成立することに注意する. 故に, リーマン面上のベルトラミ微分と呼ばれるべき「もの」は有界可測  $(-1, 1)$ -形式

$$\mu = \mu(z) \frac{d\bar{z}}{dz} \quad (2.3)$$

なる微分形式であることがわかる. この変換則の意味は次の通りである. つまり,  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  となる  $X$  の局所座標系  $(U_\alpha, z_\alpha)$  と  $(U_\beta, z_\beta)$  に対して, それぞれの座標において  $\mu$  が  $\mu_\alpha \in L^\infty(z_\alpha(U_\alpha))$  および  $\mu_\beta \in L^\infty(z_\beta(U_\beta))$  と表されたとき

$$\mu_\beta(z_\beta \circ z_\alpha^{-1}(z)) \frac{\overline{d(z_\beta \circ z_\alpha^{-1})(z)}}{d(z_\beta \circ z_\alpha^{-1})(z)} = \mu_\alpha(z)$$

が  $z \in z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  で成立する. また,  $\mu$  の絶対値  $|\mu|$  は  $X$  上の微分形式であるが,  $\mu$  の変換則から

$$|\mu_\beta(z_\beta \circ z_\alpha^{-1}(z))| = \left| \mu_\beta(z_\beta \circ z_\alpha^{-1}(z)) \frac{\overline{d(z_\beta \circ z_\alpha^{-1})(z)}}{d(z_\beta \circ z_\alpha^{-1})(z)} \right| = |\mu_\alpha(z)|$$

が  $z \in z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  で成立する. つまり  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  に対して

$$|\mu_\beta(z_\beta(p))| = |\mu_\beta(z_\beta \circ z_\alpha^{-1}(z_\alpha(p)))| = |\mu_\alpha(z_\alpha(p))|$$

となる. 従って,  $|\mu|$  はリーマン面上の(局所)有界可測関数となる. 故に, 特に本質的上限から定まるノルム

$$\|\mu\|_\infty = \text{ess.sup}\{|\mu|(p) \mid p \in X\}$$

が意味を持つ. リーマン面  $X$  上の式 (2.3) の形の  $\|\mu\|_\infty < \infty$  を可測微分形式の全体を  $L^\infty(X)$  と書く.  $L^\infty(X)$  は線形空間であり, 上述のように絶対値の本質的上限から定まるノルム  $\|\cdot\|_\infty$  をもつ. このノルムにより  $L^\infty(X)$  は複素バナッハ空間となる.  $L^\infty(X)$  の単位球の元を  $X$  上の**ベルトラミ微分**と呼ぶ.

### 2.1.5 Ahlfors-Bers の定理

次の Ahlfors-Bers の定理はタイヒミュラー空間論における基本定理である. Ahlfors-Bers の定理は上記の逆が成立する事を保証する ([IT] の定理 4.30 を見よ).

**定理 2.2** (Ahlfors-Bers, [AB]). 任意の  $\mathbb{C}$  上の有界可測関数  $\mu$  で  $\|\mu\|_\infty < 1$  を満たすものに対して,

$$\mu_f = \mu$$

となる擬等角写像  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が存在する. さらに, 正規化条件  $f(0) = f(1) - 1 = 0$  を仮定すると, このような  $f$  は唯一つ存在する.

Ahlfors-Bers の定理をリーマン面上に一般化する事を考えよう.  $X$  をリーマン面とする. 簡単のために  $X$  を双曲的リーマン面, つまりフックス群  $\Gamma$  を用いて  $X = \mathbb{H}/\Gamma$  と表されるものとする. ベルトラミ微分  $\mu \in L^\infty(X)$ ,  $\|\mu\|_\infty < 1$  に対して  $\tilde{\mu}$  を  $\mu$  の  $\mathbb{H}$  へのリフトとする. このとき次が成立する.

**命題 2.3** (リフトの変換則). 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して,

$$\tilde{\mu}(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \tilde{\mu}(z) \quad (2.4)$$

が  $\mathbb{H}$  上測度 0 の集合を除いて成立する. さらに

$$\nu = \begin{cases} \tilde{\mu}(z) & (z \in \mathbb{H}) \\ \overline{\tilde{\mu}(\bar{z})} & (z \in \mathbb{H}^- = \{\text{Im}(z) < 0\}) \end{cases} \quad (2.5)$$

と定義すれば  $\nu \in L^\infty(\mathbb{C})$  であり, さらに

$$\nu(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \nu(z) \quad (2.6)$$

が成立する.

**証明.**  $z_0 \in \mathbb{H}$  を任意にとり固定する.  $\pi: \mathbb{H} \rightarrow X$  を普遍被覆写像として,  $p_0 = \pi(z_0) \in X$  とする. さらに  $U$  を  $X$  内の  $p_0$  の単連結な近傍とする. このとき  $\tilde{U}$  を  $z_0$  を含む  $U$  のリフトとすると, 射影の制限  $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$  は全単射である. 従って逆写像

$$\zeta_1 := (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}: U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{C}$$

を考えると  $(U, \zeta_1)$  は  $p_0$  の周りの正則座標系となる. 一方, 任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $\zeta_2 = \gamma \circ \zeta_1$  とすると,  $(U, \zeta_2)$  も  $p_0$  の周りの正則座標である. 定義から  $\gamma = \zeta_2 \circ \zeta_1^{-1}: \tilde{U} \rightarrow \gamma(\tilde{U})$  であるので, 式 (2.3) の変換則より  $z \in \tilde{U}$  に対して

$$\tilde{\mu}(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \tilde{\mu}(z)$$

が成立する. これは (2.4) を意味する.

明らかに (2.5) のように定義された可測関数  $\nu$  は  $L^\infty(\mathbb{C})$  の元である. 故に (2.6) を確認する.  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  であるので  $\overline{\gamma(z)} = \gamma(\bar{z})$  が任意の  $z \in \mathbb{C}$  に対して成立する事に注意する.  $z \in \mathbb{H}^-$  に対して  $w = \bar{z}$  とする. このとき

$$\begin{aligned} \nu(\gamma(z)) \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} &= \overline{\tilde{\mu}(\gamma(z))} \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \overline{\tilde{\mu}(\gamma(w))} \frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)} = \overline{\tilde{\mu}(w)} \frac{\overline{\gamma'(w)} \overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(w) \gamma'(z)} \\ &= \overline{\tilde{\mu}(w)} \frac{\overline{\gamma'(w)} \overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(w) \gamma'(z)} = \overline{\tilde{\mu}(\bar{z})} \frac{\overline{\gamma'(z)} \overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z) \gamma'(z)} \\ &= \overline{\tilde{\mu}(\bar{z})} = \nu(z) \end{aligned}$$

となるので題意を得る.  $\square$

リフト  $\tilde{\mu}$  に対して式 (2.5) のように  $\nu \in L^\infty(\mathbb{C})$  を定義する. Ahlfors-Bers の定理 (定理 2.2) より  $\mu_f = \nu$  かつ  $f(0) = f(1) - 1 = 0$  となる擬等角写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が一意的に存在する. 定義から  $\overline{f(z)} = \nu(\bar{z})$  であるので Ahlfors-Bers の定理の一意性と簡単な計算から任意の  $z \in \mathbb{C}$  に対して  $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$  が成立することがわかる. 従って  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  を得る. 今  $f(0) = f(1) - 1 = 0$  であるので  $f$  は  $\mathbb{R}$  上で単調増加である.  $f$  は向きを保つので, 結局  $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  を得る.

式 (2.1) と (2.6) により任意の  $\gamma \in \Gamma$  に対して  $f$  と  $f \circ \gamma$  のペルトラミ微分は一致する:

$$\mu_{f \circ \gamma} = \mu$$

故に Ahlfors-Bers の定理内にある擬等角写像の一意性から

$$f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f \quad (2.7)$$

となる準同型  $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  が定まる. 簡単な計算から  $\rho$  は単射である事がわかる. 実際,  $f$  は同相であるので,  $\rho(\gamma) = id$  であれば

$$id = f^{-1} \circ \rho(\gamma) \circ f = \gamma$$

である. このとき  $\Gamma' = \rho(\Gamma)$  とすると  $f$  が同相である事から  $\Gamma'$  がフックス群であることがわかる. さらに可換性 (2.7) により次の可換図式を満たすリーマン面間の写像  $g: X = \mathbb{H}/\Gamma \rightarrow X' = \mathbb{H}/\Gamma'$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & \mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

定義から  $g$  は  $X$  上の擬等角写像であり (ベルトラミ微分の計算は局所的である),  $g$  のベルトラミ微分は与えられた  $\mu$  である. 以上より次のことを得た.

**命題 2.4.** 任意の  $X$  上のベルトラミ微分  $\mu$  (つまり  $\mu \in L^\infty(X)$  かつ  $\|\mu\|_\infty < 1$  となるもの) に対して,  $\mu_g = \mu$  となる  $X$  上の擬等角写像  $g$  が存在する.

## 2.2 タイヒミュラー空間

$g \geq 0$  を固定する. 向きづけられた種数  $g$  の閉曲面を  $\Sigma_g$  と書く. 種数  $g$  のリーマン面  $X$  と向きを保つ同相写像  $f: \Sigma_g \rightarrow X$  の対  $x = (X, f)$  を種数  $g$  の**標識付きリーマン面 (marked Riemann surface)** と呼び,  $f$  を  $x$  の**標識 (marking)** と呼ぶ. 2つの標識付きリーマン面  $(X_1, f_1)$  と  $(X_2, f_2)$  が**タイヒミュラー同値**であるとは,  $h \circ f_1$  と  $f_2$  がホモトピックになるような双正則写像  $h: X_1 \rightarrow X_2$  が存在する事である. つまり次の図式がホモトピーの意味で可換である.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ & \searrow f_2 & \downarrow h \\ & & X_2 \end{array}$$

このとき商空間\*6

$$T_g = \{(X, f) \mid \text{種数 } g \text{ の標識付きリーマン面}\} / \{\text{タイヒミュラー同値}\}$$

を**種数  $g$  のリーマン面のタイヒミュラー空間**と呼ぶ. タイヒミュラー空間は**タイヒミュラー距離**:

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \inf_h \{K(h) \mid h: Y_1 \rightarrow Y_2 \text{ は } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ とホモトピックな擬等角写像}\} \quad (2.8)$$

( $y_i = (Y_i, f_i) \in T_g, i = 1, 2$ ) により完備距離位相が入る. 実際, (2.8) が距離関数なる事は前章の擬等角写像の性質の (i), (ii), (iii) よりわかる. 完備性は (iv) から従う.

## 3 Gromov 双曲性

Gromov 双曲性についての詳細は, 例えば [Oh] を参考にせよ.

\*6 まだ位相を入れていないので「商集合」と呼ぶべきであるが, すぐに位相を入れるのでここでは「空間」という言葉を採用する.

### 3.1 距離空間の一般論

$X = (X, d)$  を距離空間とする.  $X$  の任意の閉球がコンパクトのとき**固有 (proper)** であるという. 閉区間からの等長写像もしくはその像のことをその端点を結ぶ測地線と呼ぶ. 任意の 2 点が測地線で結ぶ事が出来るとき  $X$  は**測地空間**と呼ぶ. 無限半区間  $[0, \infty)$  からの等長写像もしくはその像の事を**測地半直線 (geodesic ray)**と呼ぶ. 2つの測地半直線  $r_1, r_2 : [0, \infty) \rightarrow X$  が

$$d(r_1(t), r_2(t)) = O(1) \quad (t \rightarrow \infty)$$

漸近的であるという. そしてこのとき  $r_1 \sim r_2$  と書く.

### 3.2 Gromov 双曲空間

$(X, d)$  を距離空間とする. 基点  $x_0 \in X$  を固定する. このとき

$$(x|y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y))$$

と定義する. この量  $(x|y)_{x_0}$  を  $x_0$  を基点とする  $x$  と  $y$  の **Gromov 積**と呼ぶ. 三角不等式から  $(x|y)_{x_0} \geq 0$  が成立する. 距離空間  $(X, d)$  は, 任意の  $x, y, z \in X$  に対して不等式

$$(x|z) \geq \min\{(x|y)_{x_0}, (y|z)_{x_0}\} - \delta$$

が成立するとき  $\delta$ -**Gromov 双曲的**であるという.

測地空間の場合には Gromov 双曲性は次の三角形の  $\delta$ -狭性を用いても定義される.  $X$  を測地空間とする. 2点  $x, y \in X$  に対して  $[x, y]$  を  $x$  と  $y$  を結ぶ測地線とする. 3点  $x, y, z \in X$  に対して

$$[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$$

を測地三角形と呼ぶ. 測地三角形  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  は

$$\max_{u \in [x, y]} d(u, [y, z] \cup [z, x]), \max_{u \in [y, z]} d(u, [z, x] \cup [x, y]), \max_{u \in [z, x]} d(u, [x, y] \cup [y, z]) \leq \delta$$

が成立するときが  $\delta$ -狭であるという. 測地空間  $(X, d)$  が  $\delta$ -双曲的であればすべての測地三角形は  $4\delta$ -狭となる. 逆に, 測地空間  $(X, d)$  内のすべての測地三角形が  $\delta$ -狭のとき,  $8\delta$ -双曲的である ([Oh], 定理 2.16).

### 3.3 Gromov 境界

#### 3.3.1 点列による定義

$(X, d)$  を Gromov 双曲的な距離空間とする.  $x_0 \in X$  を固定する.  $X$  内の点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  が

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_m | x_n)_{x_0} = \infty$$

を満たすとき**無限遠に収束する**という. 2つの無限遠に収束する点列  $\{x_n\}_n$  および  $\{y_n\}_n$  が  $R$  関係にあるとは

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} (x_m | y_n)_{x_0} = \infty$$

が成立するときとする. これは  $X$  が双曲的であれば同値関係となる ([Oh], 補題 2.51). 無限遠に収束する点列全体をこの関係  $R$  で割った空間を  $\partial X$  と書き**無限遠境界 (boundary at infinity)** もしくは **Gromov 境界 (Gromov boundary)** と呼ぶ. また  $x \in \partial X$  に対して  $x$  の代表元を  $x$  に**収束する点列**と呼ぶ  $x \in X$  に対して収束する点列とは通常の意味の収束する点列とする.



$x = \{x_n\}_n, y = \{y_m\}_m \in X \cup \partial X$  に対して

$$(x|y)_{x_0} = \inf\{\liminf_{n,m \rightarrow \infty} (x_n|y_m)\}$$

とする。ただし、左辺の下限は  $x$  と  $y$  に収束する点列  $\{x_n\}_n$  および  $\{y_m\}_m$  をすべて考えて取ったものとする。このとき次の形の集合からなる  $X \cup \partial X$  内の集合族を考える。

- $x \in X$  を中心とする半径  $r > 0$  の開近傍  $B_r(x)$ .
- $x \in \partial X$  と  $r > 0$  に対して  $\{y \in X \cup \partial X \mid (y|x) > r\}$  という形の  $X \cup \partial X$  内の集合。

この集合族が位相の基として  $X \cup \partial X$  に位相が入る ([Oh], p.49)。この位相は特に Hausdorff 位相空間となり、さらに距離化可能な位相であることが知られている。

### 3.3.2 測地半直線による定義

$x_0 \in X$  を固定する。このとき  $x_0$  を始点とする  $X$  内の測地半直線の全体を  $R_{x_0}(X)$  と書く。  $X$  が双曲空間であれば  $r \in R_{x_0}(X)$  に対してその端点  $r(\infty)$  が自然に定まる。実際、  $r(\infty)$  を単調増加正数列  $\{t_n\}_n$  用いて、  $X$  内の点列  $\{r(t_n)\}_{n=1}^\infty$  の同値類とすれば良い ([Oh], 補題 2.59)。

いま  $R_{x_0}(X)$  に広義一様収束の位相を入れる。そして  $R_{x_0}(X)$  の 2 つの元に対し漸近的という同値関係を入れる。この同値類の集合を  $\partial_{vis} X$  と書き、  $X$  の**視境界 (visual boundary)** と呼ぶ。  $\partial_{vis} X$  には  $R_{x_0}(X)$  からの商位相を入れる。

上記の注意により

$$\partial_{vis} X \ni r \mapsto r(\infty) \in \partial X \quad (3.1)$$

なる写像が自然に定まる。  $X$  が双曲的測地空間であれば写像 (3.1) は連続な単射であり ([Oh], 補題 2.63)、さらに加えて、  $X$  が固有であれば写像 (3.1) は同相写像である ([Oh], 命題 2.64)。

$X$  が固有な Gromov 双曲測地空間であれば  $\partial_{vis} X$  は Hausdorff 位相空間である。さらにこの場合  $\partial_{vis} X$  がコンパクトである事は Ascoli-Arzelà の定理からわかる (等長写像の族は明らかに同程度連続である)。従って、上記のことから  $\partial X$  もコンパクトとなる ([Oh], 系 2.65)。

## 4 タイヒミュラー空間の幾何

タイヒミュラー距離による幾何では、リーマン面上の不変量として**極值的長さ**<sup>\*7</sup>が重要である。続いて、Maskit による双曲的長さとの関係、そして Kerckhoff によるタイヒミュラー距離の幾何学的表示について復習する。

### 4.1 極值的長さ

$\alpha$  をリーマン面  $X$  上の単純閉曲線もしくは単純閉曲線の自由ホモトピー類とする。また  $\alpha$  は非自明であるとする。このとき

$$\text{Ext}_X(\alpha) = \inf_A \{1/\text{Mod}(A)\} \quad (4.1)$$

とする。ただし下限は、その中心曲線が  $\alpha$  と自由ホモトピックな  $X$  内の円環領域  $A$  のすべて走るものとする。また、一意化定理により  $A$  は ( $X$  の部分領域としての複素構造により) 円環領域  $\{1 < |z| < R\}$  と双正則同値である。このとき、

$$\text{Mod}(A) = \frac{1}{2\pi} \log R$$

<sup>\*7</sup> 極值的長さは、曲面 (多様体) 上の曲線族に対して定義される量である。この言い方によると、ここでの極值的長さは「(与えられた) 単純閉曲線と自由ホモトピックな曲線のなす族の極值的長さ」と呼ばれるものであるが、その辺りはここではこだわらないとする。

と書き,  $A$  の**モジュラス**と呼ぶ. モジュラスは等角不変量である. つまり,  $A_1$  と  $A_2$  が等角同型であれば  $\text{Mod}(A_1) = \text{Mod}(A_2)$  が成り立つ.

$f: X \rightarrow Y$  を  $K$ -擬等角写像とする.  $\alpha$  を  $X$  上の単純閉曲線とすると, 極値的長さは次の不等式を満たす ([Ah]).

$$\frac{1}{K} \cdot \text{Ext}_X(\alpha) \leq \text{Ext}_Y(f(\alpha)) \leq K \cdot \text{Ext}_X(\alpha) \quad (4.2)$$

特に  $x = (X, f) \in T_g$  および  $\Sigma_g$  上の非自明な単純閉曲線  $\alpha$  に対して

$$\text{Ext}_x(\alpha) = \text{Ext}_X(f(\alpha))$$

とする.  $\alpha$  を固定すると  $\text{Ext}_x(\alpha)$  は  $T_g$  上の関数になる. さらに (4.2) とタイヒミュラー距離の定義から

$$e^{-2d_T(x_1, x_2)} \text{Ext}_{x_1}(\alpha) \leq \text{Ext}_{x_2}(\alpha) \leq e^{2d_T(x_1, x_2)} \text{Ext}_{x_1}(\alpha) \quad (4.3)$$

を得る. つまり, この関数は  $T_g$  上で連続になる.

極値的長さは解析的にも定義される. 実際,

$$\text{Ext}_X(\alpha) = \sup_{\rho} \frac{\ell_{\rho}(\alpha)^2}{A_{\rho}} \quad (4.4)$$

と定義される. ただし, 式 (4.4) の右辺の上限は  $X$  上の局所  $L^1$ -可測計量  $\rho = \rho(z)|dz|$  のすべてについて取られる. また

$$\ell_{\rho}(\alpha) = \inf_{\alpha' \sim \alpha} \int_{\alpha'} \rho(z)|dz|$$

$$A_{\rho} = \iint_X \rho(z)^2 dx dy$$

である. 式 (4.4) を極値的長さの**解析的定義**, 式 (4.1) の定義を**幾何学的定義**と呼ばれる. 一般に解析的定義は極値的長さの下からの評価, 幾何学的定義は極値的長さの上からの評価の際に用いられる.

これらの定義が一致する事は自明ではない. 実際, そのことは Jenkins-Strebel 微分の極値性 (式 (5.1)) からわかる事であるが, ここではこれ以上触れない. 興味のある人は, 例えば Strebel の本 [St] を見よ.

## 4.2 Maskit の評価と Kerckhoff の公式

Maskit の評価は直接証明には用いないが, この評価は双曲的長さとの関係を与えるため, ここでは極値的長さをより幾何学的に理解するためにそれを記しておく. また, 主定理の証明には擬等角写像と極値的長さの変動 (4.3) を用いる. これにより極値的長さをを用いたタイヒミュラー距離に関する不等式を得るが, それが等式である事を主張するのが Kerckhoff の公式である. ここでは Kerckhoff の公式も直接必要はないが, 参考のためここに記しておく.

### 4.2.1 Maskit の評価

定義 (4.1) により,  $\alpha$  の極値的長さ  $\text{Ext}_X(\alpha)$  が小さければ,  $X$  は  $\alpha$  とその中心曲線がホモトピックであるモジュラスの大きな円環を含む. つまり半径の大きな円環を含むことになる. 逆に  $\alpha$  とホモトピックな中心曲線を持つ大きな円環を含めば極値的長さは小さい. 従って, カラー補題 ([Bu], §4) を用いると双曲的長さの小さい曲線に関する極値的長さは小さいことがわかる. このことを量的に定式化したものが次の Maskit の評価である.

**命題 4.1** (Maskit [Mas]).  $\alpha$  を  $X$  上の単純閉曲線として  $\ell_X(\alpha)$  を  $X$  上の双曲計量に関する  $\alpha$  とホモトピックな閉測地線の長さとする. このとき

$$\frac{1}{\pi} \ell_X(\alpha) \leq \text{Ext}_X(\alpha) \leq \frac{1}{2} \ell_X(\alpha) e^{\ell_X(\alpha)/2} \quad (4.5)$$

が成立する.

つまり, 与えられた単純閉曲線の双曲的長さが上から押さえられている場合, その極值的長さは双曲的長さと同比例する. ただし双曲的長さが長い場合は比例しない. 実際,  $X$  の種数を  $g \geq 2$  とするとき Gauss-Bonnet の定理から  $X$  の双曲計量に関する面積は  $4\pi(g-1)$  である. 故に極值的長さの解析的定義において  $\rho$  として  $X$  上の双曲計量を取る事により, 比例性を崩す簡単な評価

$$\ell_X(\alpha)^2 \leq 4\pi(g-1) \cdot \text{Ext}_X(\alpha)$$

が得られるからである.

#### 4.2.2 Kerckhoff の公式

式 (4.3) により

$$\frac{1}{2} \log \sup_{\alpha} \frac{\text{Ext}_x(\alpha)}{\text{Ext}_y(\alpha)} \leq d_T(x, y) \quad (4.6)$$

である. ただし式内の上限では  $\alpha$  を  $\Sigma_g$  上のすべての非自明な単純閉曲線全体を考える.

次の Kerckhoff による定理は不等式 (4.6) が等式になることを主張する. つまり, Kerckhoff の公式は解析的に定義されるタイヒミュラー距離を幾何学的量を用いて表すことに成功している.

**定理 4.2** (Kerckhoff [Ker]). 任意の  $x, y \in T_g$  に対して

$$d_T(x, y) = \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha} \frac{\text{Ext}_x(\alpha)}{\text{Ext}_y(\alpha)}$$

が成立する. ただし上記のように, 式内の上限では  $\alpha$  を  $\Sigma_g$  上のすべての非自明な単純閉曲線全体を考える.

### 4.3 タイヒミュラー空間内の測地線

#### 4.3.1 タイヒミュラー・ベルトラミ微分とタイヒミュラー写像

リーマン面  $X$  上の  $q = q(z)dz^n$  の形の不変形式を  $n$  次微分と呼ぶ. 特に係数  $q(z)$  が正則関数の場合  $q$  のことを正則  $n$  次微分と呼ぶ.  $q$  が  $X$  上のほとんど至る所 0 を取らない  $2n$  次微分のとき, 商

$$\frac{|q|}{q} = \frac{|q(z)|}{q(z)} \frac{|dz|^{2n}}{dz^{2n}} = \frac{|q(z)|}{q(z)} \frac{d\bar{z}^n}{dz^n}$$

は  $X$  上の  $(-n, n)$  型の微分形式である. 特に  $q$  が 2 次微分の場合には  $|k| < 1$  となる実数を用いて

$$k \frac{|q|}{q} = k \frac{|q(z)|}{q(z)} \frac{d\bar{z}}{dz} \quad (4.7)$$

なるベルトラミ微分を得る.  $q$  が正則 2 次微分の場合における式 (4.7) の形のベルトラミ微分をタイヒミュラー・ベルトラミ微分と呼ぶ. またタイヒミュラー・ベルトラミ微分により定義される擬等角写像をタイヒミュラー写像とよぶ.

タイヒミュラー空間内の測地線については次のタイヒミュラーの定理が基本的である\*8.

**定理 4.3** (タイヒミュラー). 任意の  $x_1, x_2 \in T_g$  ( $x_i = (X_i, f_i)$ ) に対して次を満たす擬等角写像  $h: X_1 \rightarrow X_2$  が一意的に存在する.

- (1)  $h$  は  $f_2 \circ f_1^{-1}$  とホモトピックである.

\*8 この定理は  $T_g$  が有限次元であるから正しい. 無限次元タイヒミュラー空間に対しては一般には成立しない.

- (2)  $h$  のベルトラミ微分はタイヒミュラー・ベルトラミ微分である。  
 (3)  $h$  は  $x_1$  と  $x_2$  の間の距離を与える。つまり、

$$d_T(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \log K(h)$$

が成立する。言い換えると、 $h$  は  $X_1$  と  $X_2$  の間の  $f_2 \circ f_1^{-1}$  とホモトピックな擬等角写像の中で最大歪曲度が最小である。

逆に任意のリーマン面上のタイヒミュラー・ベルトラミ微分により定義される擬等角写像はそのホモトピー類の中で最大歪曲度が最小である。

#### 4.3.2 タイヒミュラー測地半直線とタイヒミュラーの定理

$X$  上の正則 2 次微分のなす空間を  $\mathcal{Q}_X$  と書くことにする。  $q = q(z)dz^2 \in \mathcal{Q}_X$  に対して

$$\|q\| = \int_X |q(z)| dx dy$$

と定義すると、これは  $\mathcal{Q}_X$  上のノルムを与える。このとき  $\mathcal{Q}_X$  は  $3g-3$  次元の複素バナッハ空間となる。  $S\mathcal{Q}_X$  を  $\mathcal{Q}_X$  の単位球面とする：

$$S\mathcal{Q}_X^1 = \{q \in \mathcal{Q}_X \mid \|q\| = 1\}$$

いま、  $q \in S\mathcal{Q}_X$  に対して

$$r_q : [0, \infty) \rightarrow T_g$$

をタイヒミュラー・ベルトラミ微分

$$\tanh(t) \frac{|q|}{q}$$

により定義されるタイヒミュラー写像  $f_t$  とその像となるリーマン面  $X_t$  を用いて

$$r_q(t) = (X_t, f_t)$$

と定義される連続写像とする。この  $r_q$  なる測地半直線を**タイヒミュラー測地半直線 (Teichmüller ray)** と呼ぶ。タイヒミュラーの定理 (定理 4.3) により

$$d(r(t_1), r(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

が成立する。つまり、タイヒミュラー測地半直線は  $[0, \infty)$  から  $T_g$  への等長写像であり、従って、タイヒミュラー距離に関する測地半直線である。

ここで、

$$B_X = [0, \infty) \times S\mathcal{Q}_X^1 / (\{0\} \times S\mathcal{Q}_X^1)$$

とする。明らかに  $B_X$  は  $\mathbb{R}^{6g-6}$  と同相である。次はタイヒミュラー空間の構造を与えるタイヒミュラーの定理である。

**定理 4.4 (タイヒミュラー).** 写像

$$B_X \ni (t, q) \mapsto r_q(t) \in T_g$$

は同相写像である。特にタイヒミュラー測地半直線は  $q \in S\mathcal{Q}_X$  に関して連続に依存し、さらに  $T_g$  は  $\mathbb{R}^{6g-6}$  と同相である。

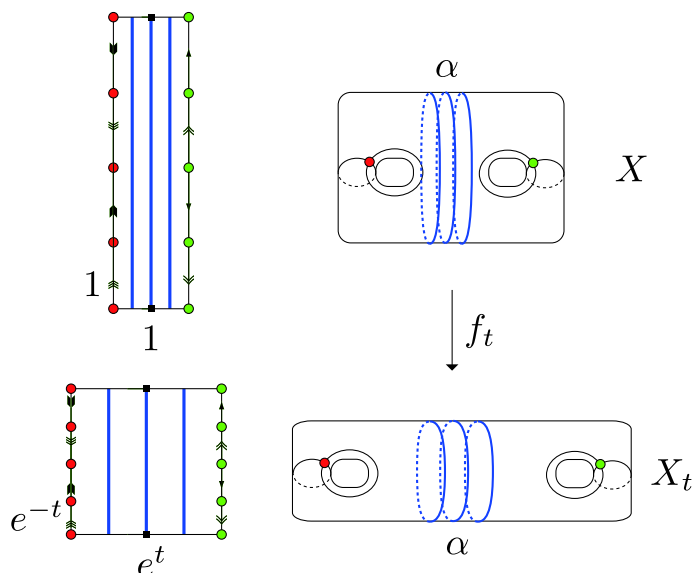


図2 タイヒミュラー変形：閉曲線に沿ったピンチング

**例 4.5** (タイヒミュラー測地半直線に関する変形の例). ここではタイヒミュラー測地半直線に沿った変形の例を与える. 図2の左上の長方形の対応する辺を貼り合わせる. このとき右上の種数2の閉曲面  $X$  および分割閉曲線  $\alpha$  を得る. 長方形上の正則2次微分  $q = dz^2$  を考える. 貼り合わせ写像は

$$z \mapsto z + a \quad \text{および} \quad z \mapsto -z + b \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

の形の写像であるため, 長方形上の正則2次微分  $q = dz^2$  は平面上の正則2次微分  $q$  を誘導する. このようにして得た正則2次微分  $q$  に関するタイヒミュラー・ペルトラミ微分

$$\tanh(t) \frac{|q|}{q}$$

に関するタイヒミュラー写像を  $f_t$  と書く. その値域となるリーマン面を  $X_t$  と書く.

$f_t : X \rightarrow X_t$  が与える曲面の変形がどのような変形なのかを考えてみよう. 貼り合わせを「はがす」こと(つまり長方形に戻す操作)により  $\alpha$  の周りの局所座標系を得る. この座標系では定義により  $q = dz^2$  と表される. 従ってタイヒミュラー・ペルトラミ微分は

$$\tanh(t) \frac{d\bar{z}}{dz}$$

と表されることに注意する. 故に, この座標においてタイヒミュラー写像  $f_t$  は

$$z \mapsto \cosh(t)z + \sinh(t)\bar{z} = e^t x + ie^{-t} y$$

により表現される<sup>\*9</sup>. これは  $f_t$  が縦方向に  $e^{-t}$  倍であり水平方向に  $e^t$  倍する変形を与える事を示す. いま, 図2の左下の長方形の上辺と下辺を同一視すると,  $X_t$  内の  $f_t(\alpha)$  とホモトピックな円環  $A_t$  を得る. 簡単な計算からこのモジュラスは

$$\text{Mod}(A_t) = e^{2t}/4$$

となることが示される (§4.1). 故に

$$\text{Ext}_{X_t}(f_t(\alpha)) \leq 4e^{-2t} \tag{4.8}$$

<sup>\*9</sup> 実際には, これに等角写像を前から合成しても良いので, 日本語としては「により表現される」よりも, 「なる表現を採用しても良い」と書く方が正確かもしれない(式(2.2)を見よ). しかし, 詳細は避けるが, この表現はタイヒミュラー写像の研究では基本的なものである.

となる。従って、Maskit の評価 (命題 4.1) により,  $\alpha$  の双曲的長さ  $\ell_{X_t}(f_t(\alpha))$  について

$$\ell_{X_t}(f_t(\alpha)) \leq 4\pi e^{-2t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

を得る。つまり変形族  $\{(X_t, f_t)\}_{t \geq 0}$  は  $\alpha$  に関するピンチング変形を与える。

このようにタイヒミュラー写像による変形とは  $q$  が「奇麗」に表現される座標系<sup>\*10</sup>においてアフィン変換により定義される写像である。特に接空間における円のつぶれ方は点によらず一様である<sup>\*11</sup>。

### 4.3.3 Jenkins-Strebel 微分

$q$  をリーマン面  $X$  上の正則 2 次微分とする。  $I$  を  $\mathbb{R}$  上の区間とする。  $C^1$  曲線  $\gamma: I \rightarrow X$  が

$$\arg(q(\gamma(t))(\gamma'(t))^2) = \theta$$

を満たすとき  $q$  の  $\theta$ -軌道である ([St]). 0-軌道を**水平軌道**,  $\pi$ -軌道を**垂直軌道**と呼ぶ。閉曲線となる軌道を**閉軌道**と呼ぶ。また軌道の両端が  $q$  の特異点に到達するときその軌道を**特異軌道**と呼ぶ。正則 2 次微分  $q$  の垂直軌道は特異軌道もしくは閉軌道であるとき **Jenkins-Strebel 微分**と呼ばれる。Jenkins-Strebel 微分から定まる幾何は主定理の証明にも用いられるので、後の §5 に (主定理の証明に用いる程度に) もう一度説明を与える。

Jenkins-Strebel 微分  $q$  に対して次を満たす、互いに交わらない単純閉曲線の族  $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$  および  $w_i > 0$  ( $i = 1, \dots, s$ ) が存在する。

(1)  $X$  上の任意の単純閉曲線  $\gamma$  に対して、

$$\sum_{i=1}^s w_i i(\gamma, \alpha_i) = \inf_{\gamma' \sim \gamma} \int_{\gamma'} |\operatorname{Re} \sqrt{q}| \quad (4.9)$$

が成立する。ただし、 $\gamma' \sim \gamma$  は  $\gamma'$  と  $\gamma$  はホモトピックである事を表し、 $i(\cdot, \cdot)$  は幾何学的交点数を表す。

(2)  $q$  の閉軌道はある  $\alpha_i$  にホモトピックである。

(3) すべての  $i$  に対して  $q$  は  $\alpha_i$  とホモトピックな閉軌道を含む。

係数  $w_i$  は  $\alpha_i$  の**幅**と呼ばれるべきものであるがこれは次の意味がある。つまり、 $\alpha_i$  とホモトピックな  $q$  の閉軌道の和集合を  $A_i$  と書く。このとき  $A_i$  は中心曲線が  $\alpha_i$  をホモトピックな  $X$  上の円環領域となる。この  $A_i$  を  $q$  の  $\alpha_i$  に関する**特性円環**と呼ぶ。  $q$  は  $A_i$  上で零点を持たず、従って  $|q| = |q(z)||dz|^2$  は  $A_i$  上で (非特異) 計量となる (ただし境界  $\partial A_i$  には  $q$  の零点がある)。今、 $\alpha_i$  とホモトピックな閉軌道の計量  $|q|$  に関する長さを  $L_i$  と書くとき、自然な等長同型

$$(A_i, |q|) \cong ((\mathbb{R}/\langle x \mapsto x + L_i \rangle) \times \{w \in \mathbb{R} \mid 0 \leq w \leq w_i\}, dx^2 + dw^2)$$

が成り立つ (図 3)。つまり  $w_i$  は  $A_i$  の  $q$  より誘導される計量  $|q|$  に関する幅と考えることが出来る。また、 $X - \cup_{i=1}^s A_i$  は  $q$  の特異垂直軌道の和集合であり、 $q$  の零点を結ぶ辺からなる  $X$  上のグラフになる。

このように Jenkin-Strebel 微分は  $X$  上の重さ付き閉曲線の形式和

$$\sum_{i=1}^s w_i \alpha_i$$

<sup>\*10</sup>  $q$  の自然座標系 (natural coordinates) と呼ばれる座標系である。ここではその詳細は省く。

<sup>\*11</sup> 正確には  $q$  の零点以外のところで一様である。

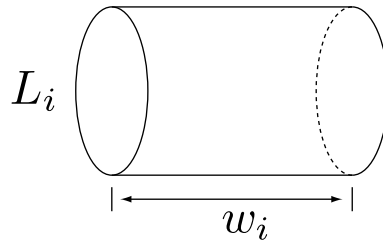


図3 Jenkins-Strebel 微分の特異円環

を定める<sup>\*12</sup>. さらに, 対応

$$q \mapsto \sum_{i=1}^s w_i \alpha_i \tag{4.10}$$

は  $X$  上の Jenkins-Strebel 微分の全体から重さ付き閉曲線の形式和の全体への写像として全単射である事は知られている.

さらに, ここで  $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$  を固定する. いま  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_s) \in \mathbb{R}_+^s$  に対して,  $\sum_{i=1}^s w_i \alpha_i$  に対応する Jenkins-Strebel 微分を  $q_{\mathbf{w}}$  と書くと,

$$\mathbb{R}_+^s \ni \mathbf{w} \mapsto q_{\mathbf{w}} \in \mathcal{Q}_X \tag{4.11}$$

は連続である ([St], [HM]).

#### 4.3.4 Strebel 測地半直線

Jenkins-Strebel 微分により定義されたタイヒミュラー測地半直線を **Strebel 測地半直線 (Strebel ray)** という. 図2により与えられるタイヒミュラー測地半直線は Strebel 測地半直線である. 図2の変形が  $\alpha$  に関するピンチング変形を与えたように, Strebel 測地半直線に関する変形は対応する閉曲線に関するピンチング変形を与える. 実際, タイヒミュラー幾何においてピンチング変形を考えるときは, Strebel 測地半直線による変形を考える事が多い.

2つの Strebel 測地半直線が**相似 (similar)** であるとは, それらを定義する正則2次微分が, 対応(4.10)における閉曲線の族が一致するときとする. ただし, 重さは変わっても良い. 相似な Strebel 測地半直線に関しては次の Masur の定理が基本的である.

**定理 4.6** (Masur [Ma]). 2つの相似な Strebel 測地半直線は漸近的である.

## 5 Jenkins-Strebel 微分の幾何

ここでは後に与える補題 6.3 の証明内で用いる, Jenkins-Strebel 微分から定まる特異平坦構造の幾何についてまとめておく. ただしここで取り扱うのは一般の Jenkins-Strebel 微分ではなく, 一つの単純閉曲線から定まる Jenkins-Strebel 微分である. Jenkins-Strebel 微分についての参考文献は沢山あるが, 例えば正則2次微分の標準的教科書である Strebel の本 [St] は詳しく取り扱っている.

<sup>\*12</sup> 一般の正則2次微分  $q$  に対しても同様な事が成立する. つまり, 式(4.9)の右辺は  $X$  上の測度付き葉層構造を定める. それに伴い, 式(4.10)も一般化される. 実際, Hubbard-Masur の定理 ([HM]) によれば, この対応により  $X$  上正則2次微分と測度付き葉層構造が一対一に対応する.

## 5.1 Minsky の不等式

$w\alpha$  を重み付き単純閉曲線とする ( $w > 0$ ,  $\alpha$  は単純閉曲線).  $q_{w\alpha} = q_{w\alpha}(z)dz^2$  を  $F$  に関する Jenkins-Strebel 微分とする (存在については [St] の §21 を見よ). このとき

$$w^2 \text{Ext}_X(\alpha) = \|q_{w\alpha}\| = A_{|q_{w\alpha}|} = \int_X |q_{w\alpha}(z)| dx dy \quad (5.1)$$

が成立する事が知られている (例えば [St] の §21 の内容と極値的長さの幾何学的定義を比べよ).  $w = 1$  のとき  $q_{w\alpha}(z)$  を  $q_\alpha$  と略記する. 始めに, 式 (5.1) を用いて次の Minsky の不等式を証明してみよう.

**命題 5.1** (Minsky, [Mil] の Lemma 5.1). 非自明な単純閉曲線  $\alpha, \beta$  に対して

$$i(\alpha, \beta)^2 \leq \text{Ext}_X(\alpha) \cdot \text{Ext}_X(\beta) \quad (5.2)$$

が成立する\*13.

**証明.** 式 (4.9) により

$$\begin{aligned} i(\alpha, \beta)^2 &= \left\{ \inf_{\beta' \sim \beta} \int_{\beta'} |\text{Re} \sqrt{q_\alpha}| \right\}^2 \leq \left\{ \inf_{\beta' \sim \beta} \int_{\beta'} |\sqrt{q_\alpha}| \right\}^2 \\ &= \ell_{|q_\alpha|}(\beta)^2 = (A_{|q_\alpha|}) \cdot \left( \frac{\ell_{|q_\alpha|}(\beta)^2}{A_{|q_\alpha|}} \right) \\ &\leq (A_{|q_\alpha|}) \cdot \text{Ext}_X(\beta) = \text{Ext}_X(\alpha) \cdot \text{Ext}_X(\beta) \end{aligned}$$

となる. ここで, 最後から2つめの不等式において極値的長さの解析的定義 ( $\rho = |q_\alpha|$  とする) を, 最後の等式に (5.1) を用いた.  $\square$

Minsky の不等式は交わる単純閉曲線の極値的長さの関係を与える. 例えば,  $(X_t, f_t)$  を例 4.5 のように取る. このとき  $X$  上の単純閉曲線  $\beta$  を  $i(\alpha, \beta) \neq 0$  の様にとると, (4.8) より

$$\text{Ext}_{X_t}(f_t(\beta)) \geq i(\alpha, \beta)e^{2t}/4 \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

となる. つまり, ピンチングされる曲線と交わる曲線の極値的長さは発散する. これは, 極値的長さが「長さ」たる『幾何学的自然さ』を持つ事を示す (勿論 (5.3) は Maskit の評価からも従う).

## 5.2 交わらない曲線の極値的長さの振る舞い

では交わらない場合にはどのような関係があるだろうか. これについては一般論はあまり知られていないが\*14, Strebel 測地半直線上の変形ではその振る舞いがある程度わかる.

### 5.2.1 Jenkins-Strebel 微分による円環領域分解および曲面の復元

このことを説明する前に Strebel 測地半直線上の変形について述べる. ただし簡単のためひとつの単純閉曲線に対応する Jenkins-Strebel 微分から定義されるものを考える. 複数の曲線の場合も本質的に同じである.

$w\alpha$  を  $X$  上の重み付き単純閉曲線とする. 定義から,  $w\alpha$  に対する Jenkins-Strebel 微分  $q_{w\alpha}$  の軌道は特異垂直軌道か閉軌道である.  $q_{w\alpha}$  の  $w\alpha$  に関する特性円環を  $A_{w\alpha}$  とする (§4.3.3). このとき  $X - A_{w\alpha}$  は  $X$  上のグラフであるが, 逆に,  $\partial A_{w\alpha}$  を適当に貼り合わせる事により曲面  $X$  は復元される (図 4).

\*13 不等式 (5.2) は sharp である. 例えば [GM] を見よ.

\*14 少なくとも筆者は知りません.



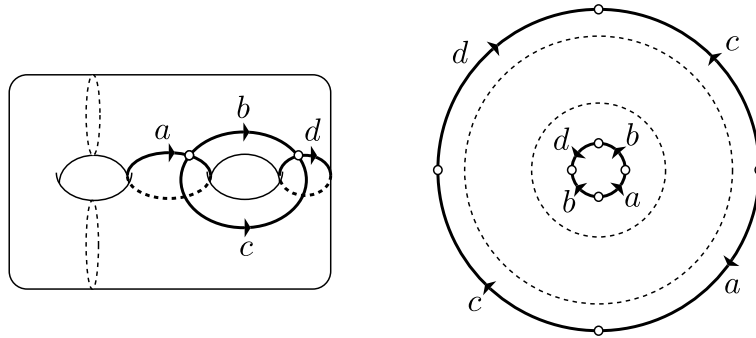


図4 Jenkins-Strebel 微分の特異垂直軌道の構造の例. 白点  $q_{w\alpha}$  の零点を表し, 太線は  $q_{w\alpha}$  の特異垂直軌道を表す. また点線は  $q_{w\alpha}$  の閉軌道 (の典型例) である.

$L$  を  $q_{w\alpha}$  に関する  $\alpha$  の長さ (閉軌道の長さ) とし, いま  $A_{w\alpha}$  の幅は  $w$  であることに注意する (§4.3.3).  $p_0$  を  $q_{w\alpha}$  の特異垂直軌道に取り,  $A_{w\alpha}$  上の写像

$$z = g(p) = \exp \left\{ \frac{2\pi}{L} \int_{p_0}^p \sqrt{q} \right\} \tag{5.4}$$

を考える. これは well-defined であり,  $\sqrt{q}$  の分枝を適当に選べば,  $z = g(p)$  は特性円環  $A_{w\alpha}$  を  $A_{w\alpha}$  を円環領域  $A_R$  に写像する. ただし  $\log R = 2\pi w/L$  である. そして, このとき  $A_R$  上で  $q$  は表示

$$q = q(z)dz^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \frac{1}{z^2} dz^2 \tag{5.5}$$

を持つ (実際, 写像  $z = g(p)$  で引き戻すとわかる). ここで極座標  $z = re^{i\theta}$  を用いると  $q$  は

$$q = -\frac{L^2}{4\pi^2} d\theta^2 \tag{5.6}$$

と表される事に注意する. 従って, 貼り合わせは  $q$  を保つので, **貼り合わせは角度を保つ写像**で行われる. 例えば, 図4の  $c$  の貼り合わせは, 極座標では

$$(r, \theta) \mapsto \left( \frac{R^2}{r}, \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \tag{5.7}$$

により貼り合わされる. これは正則座標では

$$z \mapsto -iR^2/z \tag{5.8}$$

と同じである.

$\mathbb{C}$  内の円環領域  $A_R$  上に正則2次微分 (5.5) を与えると, 貼り合わせは (5.8) のように正則写像で行われるので, 上記のように, 円環の境界を適当に貼り合わせる事により複素構造を持った曲面は**復元**されるが, さらにそれに伴って式 (5.5) の正則2次微分から  $\alpha$  に関する Jenkins-Strebel 微分が誘導される.

また, 曲面を復元する際には貼り合わせが問題になるが, 貼り合わせは基本的に式 (5.7) や式 (5.8) のように, **本質的に幅を固定すると写像は決められる. つまり, 円環の幅  $w$  を変えても同じ貼り合わせの方法を用いる, 新しい円環に貼り合わせ方を継承できる**のである. ただし幅を変えた場合には複素構造の違う曲面が出てくる (図5). この幅に関する自由度が次章で述べる Strebel 測地半直線に沿った変形を幾何学的に記述することによく作用する.

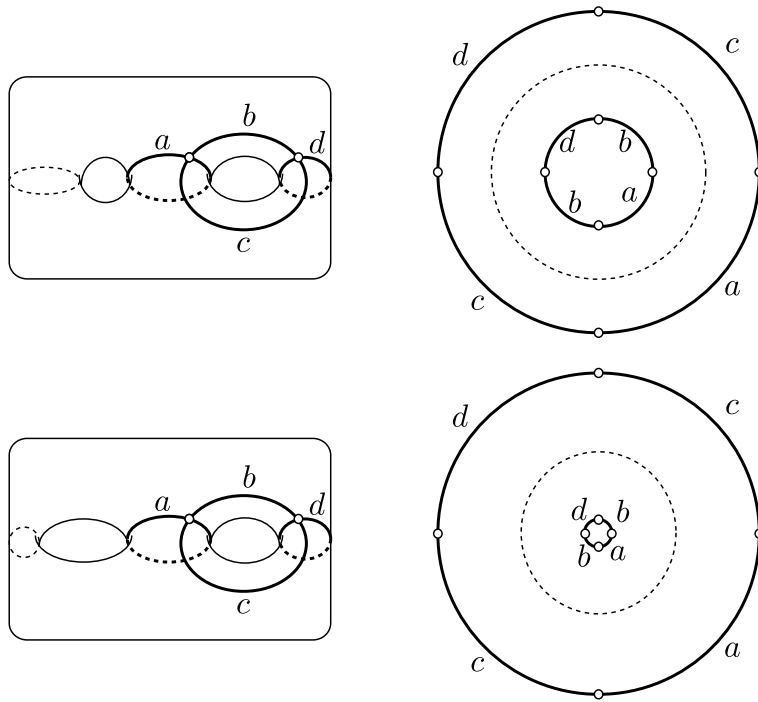


図5 円環の幅を変えても、元の貼り合わせを継承する事により曲面は復元できる。ただし、その場合には曲面の複素構造は変わる。

5.2.2 Strebel 測地半直線上の変形

ここではひとつの単純閉曲線に対応する Jenkins-Strebel 微分により定義される Strebel 測地半直線に沿った変形を考える。これは、円環領域のタイヒミュラー写像が基本的なモデルとなるので、始めにそれを説明する。  
 帯状領域

$$S_R = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Re}(\zeta) < \log R\}$$

このとき、写像  $z = \pi(\zeta) = e^\zeta : S_R \rightarrow A_R$  は普遍被覆写像であり、被覆変換は  $\zeta \mapsto \zeta + 2\pi i$  である。このとき  $S_R$  上の正則 2 次微分  $\tilde{q} = d\zeta^2$  は被覆変換で不変であるので、 $A_R$  上の正則 2 次微分  $q$  を定義する。また、 $\tilde{q}$  は垂直方向（虚軸方向）を垂直軌道に持つので、 $q$  は  $A_R$  内の原点中心の円を垂直閉軌道に持つ。計算により

$$q = q(z)dz^2 = \frac{1}{z^2}dz^2$$

となる。このとき

$$w = F_t(z) = z|z|^{e^{2t}-1} \tag{5.9}$$

とする。簡単な計算よりベルトラミ微分

$$\mu_{F_t} = \tanh(t) \frac{z}{\bar{z}} = \tanh(t) \frac{|q|}{q}$$

となるので  $F_t(z)$  は  $q$  に関するタイヒミュラー写像である。このとき  $R(t) = R^{e^{2t}}$  とすると  $f(A_R) = A_{R(t)}$  となる。

極座標  $z = re^{i\theta}$  に対して写像 (5.9) は

$$w = F_t(re^{i\theta}) = r^{e^{2t}} e^{i\theta}$$

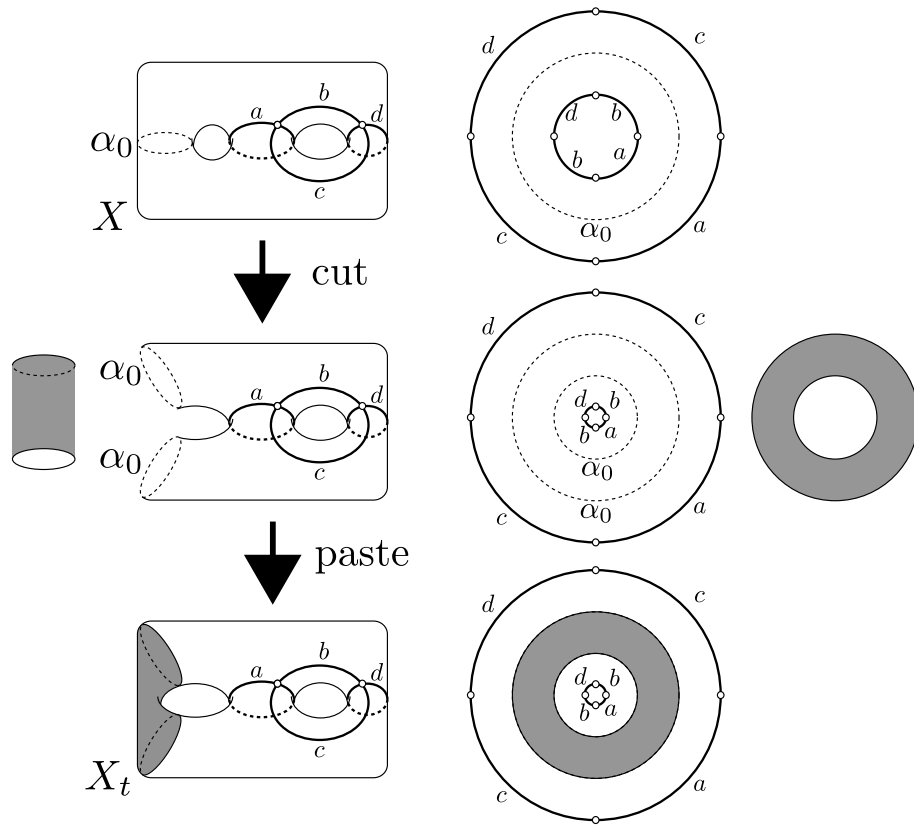


図6  $X$  を垂直閉軌道  $\alpha_0$  に沿って切り，中心曲線に沿って円環（灰色の部分）を貼付けると  $X_t$  が復元される。

となる。つまり  $w = F_t(z)$  は角度を保つ写像であることに注意する。

では，Strebel 測地半直線に沿った変形について考えてみる。前章のように Jenkins-Strebel 微分により曲面は円環に分割され，逆に境界の貼り合わせにより曲面は復元された。また境界の貼り合わせは**角度を保つ貼り合わせ**により行われた。前に見たように写像 (5.9) は角度を保つ写像である。故に， $\partial A_R$  にある貼り合わせ方は  $\partial A_{R(t)} = \partial F_t(A_R)$  の貼り合わせ方を誘導し，その貼り合わせ方は式 (5.5) の形の正則 2 次微分を保つ。ここで  $R(t) = R e^{2t}$  である。従って，写像  $F_t$  は  $X$  から  $X_t$  への擬等角写像  $f_t$  と  $X_t$  上の正則 2 次微分  $q_{w\alpha,t}$  を誘導する。

定義から  $f_t$  のベルトラミ微分は

$$\tanh(t) \frac{|q_{w\alpha}|}{q_{w\alpha}}$$

と  $A_{w\alpha}$  上で一致する。今  $X - A_{w\alpha}$  は  $q_{w\alpha}$  の (有限本の) 特異垂直軌道の和集合であるので測度 0 集合である。故に  $f_t$  は  $q_{w\alpha}$  に関するタイヒミュラー写像である。また簡単な計算により  $q_{w\alpha,t}$  は  $X_t$  上の重み付き単純閉曲線  $e^{2t} w \cdot f_t(\alpha)$  に関する Jenkins-Strebel 微分となることがわかる<sup>\*15</sup>。

重要なのは， $X_t$  は  $A_{R(t)}$  ( $R(t) = R e^{2t} > R$ ) の  $\partial A_{R(t)}$  上の ( $A_R$  から誘導された) 貼り合わせにより復元されることである。このことから  $X_t$  は  $X$  から次のように作られると考えることも出来る。  $X$  上の  $q_{w\alpha}$  に関する閉軌道を  $\alpha_0$  とする。  $\alpha_0$  は  $A_R$  の中心曲線  $\{|z| = R^{1/2}\}$  に対応するとしてもよい。このとき，  $X - \alpha_0$  を考える。このとき  $X - \alpha_0$  の境界は  $\alpha_0$  から誘導される閉曲線であるが，これらに沿って適当な円環を貼付けると  $X_t$  が復元される (図 6)。

<sup>\*15</sup> 実際，  $q_{w\alpha,t}$  はタイヒミュラー写像  $f_t$  の終微分と呼ばれる正則 2 次微分である。詳細は [IT] を見よ。

### 5.2.3 Strebel 測地半直線上の極值的長さの振る舞い

次が成立する.

**命題 5.2.**  $\alpha, \beta$  を  $X$  上の非自明な単純閉曲線で  $i(\alpha, \beta) = 0$  となるものとする.  $t > 0$  に対して  $(X_t, f_t) = r_{q_\alpha}(t)$  とする. このとき

$$\text{Ext}_{X_t}(f_t(\beta)) = O(1)$$

が成り立つ.

つまり,  $\alpha$  に関するピンチング変形においては交わらない曲線の極值的長さは有界である<sup>\*16</sup>. このことも極值的長さが「長さ」たる『幾何学的自然さ』を持つ事を示している.

命題 5.2 の証明. 前章のように  $X_t$  は  $A_\alpha$  を中心曲線  $\alpha_0$  に沿って切り, 適当な円環を貼る事により得られる. いま,  $\beta$  は  $i(\alpha, \beta) = 0$  を満たすので,  $\alpha_0$  と交わらないとしてもよい. このとき  $\beta$  の環状近傍  $N$  が  $\alpha_0$  に交わらないとしてよい. 貼り合わせは等角写像で得られるので,  $N$  を  $X_t$  内に, その中心曲線が  $f_t(\beta)$  とホモトピックな円環領域となるように等角に埋め込むことができる.  $N$  の埋め込みによる像を  $N_t \subset X_t$  と書くとき, 極值的長さの幾何学的定義およびモジュラスの等角不変性から,

$$\text{Ext}_{X_t}(\beta) \leq 1/\text{Mod}(N_t) = 1/\text{Mod}(N) = O(1)$$

を得る. □

## 6 定理 1.1 の証明

この章では定理 1.1 の証明を与える. 導入でも触れたように, ここではオリジナルの H.Masur と M.Wolf の証明 ([MaWo]) ではなく, J.McCarthy と A.Papadopoulos により与えられた証明 ([McPa]) を与える.

### 6.1 H. Masur と M. Wolf の証明について

とはいえ, オリジナルである H.Masur と M.Wolf の証明 ([MaWo]) についてもすこし触れておくべきであろう. 彼らの証明の方針は, 具体的に  $\delta$ -狭性が崩れるような三角形の列を構成することである. 実際,  $\beta_1$  と  $\beta_2$  を  $\Sigma_g$  上の互いに交わらない非自明な単純閉曲線とする. そして  $x_0 \in T_g$  を固定し,  $x_0, \tau_{\beta_1}^n(x_0), \tau_{\beta_1}^{-n}(x_0)$  の 3 点を頂点とする  $T_g$  内の三角形を  $T_n$  と書く. 彼らは次のことを証明することにより Gromov 双曲性が成り立たないことを示す.

**命題 6.1.** 上記の三角形  $T_n = [x_0, \tau_{\beta_1}^n(x_0)] \cup [\tau_{\beta_1}^n(x_0), \tau_{\beta_1}^{-n}(x_0)] \cup [\tau_{\beta_1}^{-n}(x_0), x_0]$  に対して,

$$d([x_0, \tau_{\beta_1}^n(x_0)], y_n) \rightarrow \infty \tag{6.1}$$

となる  $y_n \in [\tau_{\beta_1}^n(x_0), \tau_{\beta_1}^{-n}(x_0)]$  が存在する. ただし,  $[x, y]$  は  $x, y \in T_g$  を結ぶ測地線を表す.

実際, 彼らは具体的に  $y_n$  を決めている. つまり, 彼らの計算によると  $y_n \in [\tau_{\beta_1}^n(x_0), \tau_{\beta_1}^{-n}(x_0)]$  は  $d(\tau_{\beta_1}^n(x_0), y_n) = (\log n)/2$  となるように取れば

$$d([x_0, \tau_{\beta_1}^n(x_0)], y_n) \geq \frac{1}{2} \log n + O(1) \tag{6.2}$$

<sup>\*16</sup> 一見, これは自明に思えるが, よく考えるとあまり自明ではないことがわかる. 実際, 双曲幾何では測地線の周りのみに台を持つ擬等角写像でピンチング変形をするため, この変形では他の曲線の長さをほとんど変えない. しかし, タイヒミュラー変形では全体に台を持つバルトラミ微分から定まる擬等角写像により変形しているので, 他の曲線の長さの変化は一般には変わる可能性がある.

が成立する ([MaWo] の p.266 の最後の段落を見よ). 従って, 式 (6.1) が成立する事がわかる. なお, 式 (6.2) の証明には, 例えば Dehn のねじり変換を記述するタイヒミュラー写像の具体的構成など, すこし準備を要するため, ここでは式 (6.2) の証明は省略する. 興味のある人は原論文をあたる事をお勧めする.

## 6.2 J.McCauchy と A.Papadopoulos の証明について

この章では定理 1.1 の J.McCauchy と A.Papadopoulos の証明を解説する. 定理 1.1 は次の定理より導かれる.

**定理 6.2** (Theorem 3.1 in [McPa]).  $T_g$  の視境界  $\partial_{vis}T_g$  は Hausdorff 空間ではない.

実際, 距離空間  $(T_g, d_T)$  が Gromov 双曲空間であれば  $\partial_{vis}T_g$  は Hausdorff 空間であるため, この定理から  $T_g$  が Gromov 双曲的でない事がわかる<sup>\*17</sup>.

### 6.2.1 定理 6.2 の証明

$x_0 = (X, f) \in T_g$  を固定する.  $\beta_0$  と  $\beta_1$  を非分割・非自明な  $\Sigma_g$  上の互いに交わらない単純閉曲線とする.  $0 \leq t \leq 1$  に対して重み付き単純閉曲線の形式和

$$(1-t)f(\beta_0) + tf(\beta_1)$$

に関する Jenkins-Strebel 微分を  $q_t$  と書く.  $q_t$  の定義する  $x_0$  を始点とするタイヒミュラー測地半直線を  $r_t$  と書く. 今  $q_t$  は連続的に依存する (cf. (4.11)). 従って定理 4.4 より,  $\{r_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$  は  $R_{x_0}(T_g)$  内の  $t$  に関して連続な族である. 故に, 視境界の位相の定義 ( $R_{x_0}(T_g)$  からの商位相) により

$$[0, 1] \ni t \mapsto [r_t] \in \partial_{vis}T_g = R_{x_0}(T_g)/\sim \quad (6.3)$$

は連続である. ただし,  $[r_t]$  は  $r_t$  の漸近類 ( $\partial_{vis}T_g$  内の同値類) を表す.

一方で,  $0 < t_1, t_2 < 1$  に対して  $r_{t_1}$  と  $r_{t_2}$  は相似である. 従って,  $x = [r_{1/2}]$  とすると, Masur の定理 (定理 4.6) により

$$x = [r_t] \quad (0 < t < 1)$$

が成立する. 故に写像 (6.3) の連続性により, もし,  $\partial_{vis}T_g$  が  $T_1$ -分離公理を満たせば, 一点は閉集合であるので  $[r_0], [r_1] \in \bar{x} = x$  つまり,

$$[r_0] = x = [r_1]$$

が成立するはずである. しかしながら次の補題 6.3 により一点  $x$  は閉集合ではない. 従って  $T_g$  の視境界  $\partial_{vis}T_g$  が  $T_1$ -分離公理を満たさない (故に Hausdorff 空間ではない) ことがわかり, 定理 6.2 の証明が完了する.

**補題 6.3.** 上記の状況において  $[r_0] \neq [r_1]$  が成立する.

**証明.** 今,  $\beta_0$  と  $\beta_1$  は互いに交わらない非分割的曲線であるので,  $i(\alpha, \beta_0) = 1$  かつ  $i(\alpha, \beta_1) = 0$  となる  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線  $\alpha$  が存在する. 今,  $r_i$  は  $f(\beta_i)$  ( $i = 0, 1$ ) に関する Jenkins-Strebel 微分に関する Strebel 測地半直線なので特に

$$\text{Ext}_{r_0(t)}(\beta_0) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

である. 故に, Minsky の不等式 (5.2) より

$$\text{Ext}_{r_0(t)}(\alpha) \geq i(\alpha, \beta_0)/\text{Ext}_{r_0(t)}(\beta_0) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty) \quad (6.4)$$

<sup>\*17</sup> 証明から  $T_g$  の視境界  $\partial_{vis}T_g$  は  $T_1$ -分離公理を満たさない事もわかる.

となる (cf. (5.3)). 一方で,  $i(\alpha, \beta_1) = 0$  であるので, 命題 5.2 より

$$\text{Ext}_{r_0(t)}(\alpha) = O(1) \quad (t \rightarrow \infty) \quad (6.5)$$

となる. 故に, 式 (4.6) から

$$d_T(r_0(t), r_1(t)) \geq \frac{1}{2} \log \frac{\text{Ext}_{r_0(t)}(\alpha)}{\text{Ext}_{r_1(t)}(\alpha)} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる. 以上より  $[r_0] \neq [r_1]$  を得る. □

## 参考文献

- [Ah] L.V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand Mathematical Studies, **10**. D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London (1966) .
- [AB] L.V.Ahlfors and L.Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. (2), **72** (1960), 385-404.
- [Bu] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann surfaces*, Progress in Mathematics **106**, Birkhäuser (1992).
- [FM] B. Farb and H. Masur, *Teichmüller geometry of moduli space, I: Distance minimizing rays and the Deligne-Mumford compactification*, to appear in J. Diff. Geom.
- [GM] F. Gardiner and H. Masur, *Extremal length geometry of Teichmüller space*, Complex Variables Theory Appl., **16** (1991), no. 2-3, 209-237.
- [IT] 今吉洋一, 谷口雅彦, *タイヒミュラー空間論 (新版)*, 日本評論社 (2004)
- [Ker] S. Kerckhoff, *The asymptotic geometry of Teichmüller space*, Topology, **19** (1980), no. 1, 23-41.
- [HM] J. Hubbard and H.Masur, *Quadratic differentials and foliations*, Acta Math., **142** (1979), no. 3-4, 221-274.
- [Mas] B. Maskit, *Comparison of hyperbolic and extremal lengths*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **10** (1985), 381-386.
- [Ma] H.Masur, *On a class of geodesics in Teichmüller space*, Ann. of Math. (2), **102** (1975), no. 2, 205-221.
- [MaMi] H.Masur and Y.Minsky, *Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity*, Invent. Math., **138** (1999), no. 1, 103-149.
- [MaWo] , H. Masur and M. Wolf, *Teichmüller space is not Gromov hyperbolic*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., **20** (1995), no. 2, 259-267.
- [McPa] J. McCarthy and A. Papadopoulos, *The visual sphere of Teichmüller space and a theorem of Masur-Wolf*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **24** (1999), no. 1, 147-154.
- [Mi1] Y. Minsky, *Teichmüller geodesics and ends of hyperbolic 3-manifolds*, Topology, **32** (1993), no. 3, 625-647.
- [Mi2] Y.Minsky, *Extremal length estimates and product regions in Teichmüller space*, Duke Math. J., **83** (1996), no. 2, 249-286.
- [Oh] 大鹿健一, *離散群*, 岩波書店 (2008).
- [Ro] H.Royden, *Automorphisms and isometries of Teichmüller space*, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies, No. **66**. (1971), pp. 369-383
- [St] K. Strebel, *Quadratic differentials*, Springer-Verlag, Berlin, (1984).