リジッド解析曲面の分類

三井健太郎*

京都大学大学院理学研究科数学教室博士後期課程２年

1　概要

付値の定まった体のことを付値体という．付値は付値体に距離を定める．付値体には 2 種類あって，実数体や複素数体のようなアルキメデス的付値体と p 進体のような非アルキメデス的付値体がある (2.1 節).

リジッド幾何学は非アルキメデス的付値体上の解析幾何学である (3 節)．もともと，数論的な問題と関連してこのような付値体上の幾何学の重要性が明らかになった．また，リジッド幾何学は数論だけでなく代数幾何学においても代数多様体の例の構成などに応用がある．リジッド幾何学は複素幾何学と多くの点で類似した性質を持つが，両者の間に違いも生じる．

リジッド幾何学における解析曲面と複素幾何学における解析曲面の類似性は上野によって指摘された [23]．最近までのリジッド幾何学に関する研究成果をもとに，著者はより詳しくリジッド解析曲面を研究した．その結果，大きく分けて次の 3 つのことがわかった (2.5 節)．1 つ目は，リジッド解析曲面の代数次元ごとの分類が，複素解析曲面の分類 [9], [10], [11] と類似していることである [19], [17], [16]．2 つ目は，正標数体上のリジッド解析楕円曲面の分類が，複素解析楕円曲面の分類 [12] と正標数体上の代数的楕円曲面の分類 [1] を合わせたようなものになることである [16]．特に，リジッド幾何学の場合に固有の曲面を構成することもできた．3 つ目は，リジッド幾何学においても楕円曲面の対数変換を定義できることである [18]．以下，3 つの結果を詳しく説明する．

まず，1 つ目の結果について説明する．ここでの具体的な結果は，代数次元が 2 の曲面が代数曲面の解析化になっていることと，代数次元が 1 の曲面が楕円ファイブレーションの構造を持つことである．前者は任意の基礎体に対して成り立ち，後者は基礎体が完全体の場合に成り立つ．複素解析曲面の分類においてこれらの主張を示す際に重要だったのは，双有理型射が爆縮 (blowing-down) の合成で書けるという事実である．リジッド幾何学でも，これに対応する主張を証明することが代数次元ごとの分類を進める上で重要になる．このことを示すために，まず，相対次元が 1 以下の射が行先に対し局所的には概型の射の解析化であることを示した (4.1 節)．双有理型射はこの条件を満たすため，射を代数化することで 2 次元のスキームの双有理幾何を用いて，リジッド解析曲面の間の双有理型射を研究することができるようになった．また，変形理論を使って第一種例外曲線の近傍を 2 次元の多重円板上のファイブレーションとすることができ (4.2 節)、上記と同様の手続きでスキーム論に帰着させることができた．さらに，爆縮によって曲面が代数的であるという条件が崩れないことを示し，代数次元が 2 の場合の定理を示した．代数次元が 1 の場合の定理は，射の代数化と，標準層やファイバーの余接層に関係したコホモロジー群の次元の評価により示すことができる．

次に，2 つ目の結果について説明する．ここでの主な結果は，小平次元が 0 の楕円曲面の分類と，複素解析曲面や代数曲面の分類には現れなかった不変量を持つ曲面の例の構成である．小平次元が 0 の楕円曲面の分類は，複素解析曲面や代数曲面の分類の場合と同様に，重複ファイバーに着目して行った．この分類を行うために重要

* mitsui@math.kyoto-u.ac.jp

な役割を果たす公式として標準束の公式と Noether の公式がある．これらを証明するために，底曲線のエタール被覆 (複素幾何の場合は不分岐被覆に対応する) で次の条件を満たすものを構成した (4.3 節)：各被覆の元の上ではファイブレーションの射が局所射影的である．射が局所射影的とは，適当な開被覆を取るとその被覆の上で射が射影的になることである．この不分岐被覆により射を代数化してスキーム論を用いる．そして，得られた結果をリジッド幾何学における降下理論 (descent theory) を用いて張り合わせることにより 2 つの公式を得る．この 2 つの公式から，現れ得る不変量の組が決まる．ここで得られた組の中には，複素解析楕円曲面の分類にも代数的楕円曲面の分類にも現れない組もある．実際に，以下で説明する対数変換を用いて，そのような不変量の組を持つ楕円曲面を構成した．

最後に，3 つ目の結果について説明する．対数変換は，複素解析楕円曲面の重複ファイバーを構成するために作られた [12]．この変換は，さまざまな性質を持つ楕円曲面の例を構成するときに役立つ．リジッド幾何学では特定の楕円曲線について Tate の一意化 (3.4 節) と呼ばれる，複素幾何の場合と類似した普遍被覆を取ることができるので，これを用いて対数変換の類似物を構成した (4.4 節)．具体的には，円板上の楕円ファイブレーションで，中心ファイバーが多重ファイバーになっており，原点を除いた円環上ではファイブレーションが，楕円曲線と円環の直積から円環への射影と同型となるようなものを構成した．このリジッド解析楕円曲面に対する対数変換を用いることで，重複ファイバーを持つ楕円曲面の例を構成することができる．その中には，代数化可能な曲面と代数化不可能な曲面がある．そこで，代数化可能であるか否か判定するための条件を求めた．これにより，いままでに知られていなかった代数的楕円曲面や非代数的リジッド解析楕円曲面の例を構成することができた．

残されている課題としては，代数次元が 0 のリジッド解析曲面の分類と，楕円曲面の重複ファイバーの研究がある．重複ファイバーの研究は，リジッド解析楕円曲面の分類だけでなく正標数体上の代数的楕円曲面の分類にも応用が可能である．

2 背景と主結果

リジッド幾何学を複素幾何学と比較しながら紹介し，リジッド解析曲面の分類に関する主結果を述べる．まず，リジッド解析空間について述べるため，付値と付値体を説明する．次に，リジッド幾何と複素幾何の類似点を挙げる．さらに，複素解析曲面や代数曲面の分類理論を復習する．最後に，リジッド解析曲面の分類に関する定理を述べる．リジッド解析空間に関する正確な定義は次節で述べる．

2.1 付値と付値体

体 K 上の関数 $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}$ が 3 つの条件

1. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$

を満たすとき $|\cdot|$ を K の (三角不等式を満たす乗法) 付値という．さらに $|\cdot|$ が条件 3 より強く，条件

3'. $|a+b| \geq \max\{|a|, |b|\}$

満たすとき $|\cdot|$ は非アルキメデス的であるという．$|0|_0 = 0$ と置き，非零元 $a \in K$ に対して $|a|_0 = 1$ と置けば，$|\cdot|_0$ は K の非アルキメデス的付値である．この付値を自明な付値という．付値は K に距離を定める．

体とその上の付値の組を付値体という．特に，誘導される距離について体が完備であるとき完備付値体という．付値 $|\cdot|$ が非アルキメデス的であれば，任意の正の実数 r に対して K の部分集合 $\{a \in K \mid |a| < r\}$ や

$\{a \in K \mid |a| \leq r\}$ や $\{a \in K \mid |a| = r\}$ は K の中で開集合であり，かつ閉集合であることが分かる．

以下，基礎体 K を非アルキメデス的完備付値体とし，その付値を $|\cdot|$ で表す．付値 $|\cdot|$ は自明でないと仮定する．体 K の例としては p 進数体 $\mathbb{Q}_p$，体 k 上の形式的巾級数の商体 $k((X))$，p 進数体の代数的閉包の完備化 $\mathbb{C}_p$ などがある．

2.2 リジッド幾何と複素幾何

複素解析空間の中で，コンパクトなもの，射影的なもの，スキームの解析化になっているものの間には次のような関係がある．リジッド解析空間の中で，完備 (proper) なもの，射影的なもの，スキームの解析化になっているものの間には次のような関係がある．このように複素解析空間の性質とリジッド解析空間の性質との間には対応関係がある．

次の 4 つの事実も複素幾何の場合と同様に成り立つ．

1. K 上の局所有限型スキームの圏から K 上のリジッド解析空間の圏への解析化関手が存在する．
2. 完備スキームの解析化に対して GAGA の原理が成立する．
3. 特に射影的リジッド解析空間 (射影空間の解析化の解析的閉部分空間と同型であるリジッド解析空間) はスキームの解析化である．
4. 1 次元の完備リジッド解析空間は射影的である．

このことから 1 次元の完備リジッド解析空間の研究は 1 次元の射影的スキームの研究に帰着されてしまうことがわかる．次に 2 次元の場合が問題になる．複素解析曲面の分類は既に研究されているが，それに対応するリジッド解析曲面の分類はそれほどには研究されていない．そこで次の問題を考えることになる．

Problem. 完備リジッド解析曲面を分類せよ．

ここで曲面とは，既約，被約，分離的，純次元 2 である空間を指す．以下，曲線といったら，既約，被約，分離的，純次元 1 である空間を指す．

2.3 複素解析曲面

コンパクト複素解析曲面の分類で重要となる 6 つの定理を紹介する．

Theorem 2.1. コンパクト複素解析曲面は特異点解消を持つ．正確にいうと，与えられたコンパクト曲面に対し非特異コンパクト曲面からの双有理型正則射 (次元の低い解析的閉部分集合を除いて同型である正則射) が存在する．

この定理により非特異である曲面の分類が重要であることがわかる．以下，非特異な曲面に関する定理を述べる．

Theorem 2.2. 非特異コンパクト複素解析曲面の間の双有理型正則射は爆縮 (blowing-down) の有限回の合成で書ける．ここで爆縮とは算術種数 0 の曲線を一点に潰すような双有理型正則射のことである．

Theorem 2.3. 非特異コンパクト複素解析曲面は極小モデルを持つ．正確にいうと，与えられたコンパクト曲面に対し，極小曲面への双有理型正則射が存在する．極小曲面とは，その曲面から任意の非特異コンパクト曲面への任意の双有理型正則射が同型射に限られるという性質を持つ非特異コンパクト曲面のことである．

この 2 つの定理により極小曲面の分類が重要であることがわかる．与えられた曲面が極小曲面であるかどうかは次の定理を使って判定できる．

Theorem 2.4. 非特異コンパクト曲面が極小であることと，その曲面が第一種例外曲線を含まないことは同値である．ここで第一種例外曲線とは，接束の次数が -1 であるような算術種数 0 の曲線のことである．

非特異コンパクト曲面 X に対し代数次元 $a(X)$ を有理型関数体 $\mathcal{M}(X)$ の $\mathbb{C}$ 上の超越次元で定義する．

Theorem 2.5. 不等式 $0 \le a(X) \le 2$ が成り立つ．さらに次が成り立つ．

- $a(X) = 2$ ならば X は射影的である．
- $a(X) = 1$ ならば X は楕円曲面である．

曲面が楕円曲面であるとは，その曲面から曲線への正則射があって曲線上の次元の低い解析的閉部分集合を除いて点の逆像が算術種数 1 の曲線となることをいう．この正則射を楕円ファイブレーションの構造射という．

正整数の部分集合 N_X を
$$N_X := \{m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \Gamma(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m}) \neq 0\}$$
で定める．ここで $\mathcal{K}_X$ は X の標準束である．その元 $m \in N_X$ に対し，正則射
$$\Phi_m \colon X \longrightarrow \mathbb{P}^{\dim \Gamma(X, \mathcal{K}_X) - 1}$$
が定まる．小平次元 $\kappa(X)$ を
$$\kappa(X) := \begin{cases} -\infty, & N_X = \emptyset, \\ \sup\limits_{m \in N_X} \dim \operatorname{Im} \Phi_m(X) & N_X \neq \emptyset \end{cases}$$
により定める．このとき不等式 $\kappa(X) \le a(X)$ が成り立つ．

Theorem 2.6. 小平次元 1 未満の曲面 X が極小楕円ファイブレーションの構造 $f \colon X \to C$ を持ったとする．ここで楕円ファイブレーションが極小とは，各ファイバーに第一種例外曲線を含まないという意味である．このようなファイブレーションに対する不変量の組 $(\kappa(X), g(C), \chi(\mathcal{O}_X), \mathcal{C})$ は表 ($\operatorname{char} K = 0$ の場合) のようなものに限られる．ここで $g(C)$ は曲線 C の種数，$\chi(\mathcal{O}_X)$ は X の構造層の Euler 標数，$\mathcal{C}$ は多重ファイバーの組み合わせ (以下の説明を参照) である．

体 K 上の (代数的または複素解析的) 極小楕円ファイブレーション $f \colon X \to C$ に対して，標準束の公式
$$\mathcal{K}_X \cong f^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$$
が成り立つ．ここで，$\mathcal{L}$ は C 上の直線束で
$$\deg \mathcal{L} = l + 2g(C) - 2$$
を満たす．ただし
$$l := \operatorname{length}_K \operatorname{torsion} R^1 f_* \mathcal{O}_X$$
であり，$\operatorname{char} K = 0$ のときには $l = 0$ が成り立つ．また，多重ファイバーの定義する X 上の因子を，その f による像 C_0 と $x \in C_0$ 上の素因子 D_x を使って
$$\sum_{x \in C_0} m_x D_x$$
と書く．このとき $0 \le a_x < m_x$ を満たす a_x が存在して
$$D = \sum_{x \in C_0} a_x D_x$$
が成り立つ．さらに $\operatorname{char} K = 0$ のときには $a_x = m_x - 1$ が成り立つ．$\operatorname{char} K \neq 0$ のときには重複ファイバーが暴分岐するばあいがある．

Type	$\kappa(X)$	$\chi(\mathcal{O}_X)$	$g(C)$	l	multiple fibers	char K
(i)	$-\infty$	0	0	0	none $(m-1/m)$ $(m_1-1/m_1, m_2-1/m_2)$ $(1/2, 1/2, m-1/m)$	
(ii)	$-\infty$	0	0	1	(a/m^*) $(a/m_1^*, m_2-1/m_2)$	$\neq 0$ $\neq 0$
(iii)	$-\infty$	1	0	0	none $(m-1/m)$	
(iv)	0	0	0	0	$(1/2, 2/3, 5/6)$ $(1/2, 3/4, 3/4)$ $(2/3, 2/3, 2/3)$ $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$	
(v)	0	0	0	1	$(0/2^*, 1/2, 1/2)$ $(1/2^*, 1/2)$ $(1/3^*, 2/3)$ $(1/4^*, 3/4)$ $(2/4^*, 1/2)$ $(2/6^*, 2/3)$ $(3/6^*, 1/2)$	2 2 3 2 2 2 3
(vi)	0	0	0	2	$(0/p^{a*})$ $(0/p^{a*}, 0/p^{b*})$	$p \neq 0$ $p \neq 0$
(vii)	0	0	1	0	none	
(viii)	0	1	0	0	$(1/2, 1/2)$	
(ix)	0	1	0	1	$(0/2^*)$	2
(x)	0	2	0	0	none	

表 1　極小楕円ファイブレーション $f\colon X \to C$ に現れうる不変量の組．$\kappa(X)$ は小平次元．$\chi(\mathcal{O}_X)$ は構造層 $\mathcal{O}_X$ の Euler 数．$g(C)$ は曲線 C の算術種数．l は $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ のねじれ加群の長さ．$(a_1/m_1, \ldots, a_n/m_n)$ は重複ファイバーの組み合わせ．m_i は i 番目の重複ファーバーの重複度．a_i は標準束の公式に現れる整数．$*$ は重複ファイバーが暴分岐することを意味する．

2.4　代数曲面

任意の体 L 上の代数曲面に対して定理 2.1 から定理 2.4 が成り立つ．ただし，非特異は正則に置き換える．体 L が代数的に閉じているとき定理 2.6 が成り立つ．現れうる組は変化し，実際に新しい組を与える楕円曲面の例を構成できる場合がある．

2.5　リジッド解析曲面

リジッド解析曲面の分類に関する 3 つの主定理を述べる．

Theorem 2.7. 完備リジッド解析曲面に対して定理 2.1 から定理 2.5 が成り立つ．ただし，次のように変更す

る：複素解析 $\to$ リジッド解析，コンパクト $\to$ 完備，非特異 $\to$ 正則．定理 2.5 では基礎体 K を完全体と仮定する．

Theorem 2.8. 基礎体 K が代数的に閉じているとき定理 2.6 が成り立つ．現れうる組は複素解析曲面の場合とも，代数曲面の場合とも異なり，実際に新しい組を与える楕円曲面の例を構成できる場合がある．

Theorem 2.9. 基礎体 K が代数的に閉じているとき対数変換 (以下を参照) を定義することができる．また対数変換を用いて，新しい代数曲面や非代数的リジッド解析曲面の例を構成することができる．

ここでの対数変換とは，次のような閉円板 C 上の楕円ファイブレーション $f\colon X \to C$ を使って作られる．f は 0 上でのみ $_mI_0$ 型の多重ファイバーを持つ．ここで $_mI_0$ 型とは重複度が m でファイバーの被約化がある楕円曲線と同型になるような特異ファイバーのことである．また f は次を満たす．$C^* := C - \{0\}$ と置く．f を C^* に制限して得られる楕円ファイブレーションは相対的な Tate 一意化をもつ C 上の楕円ファイブレーションに拡張できる．例えば E を Tate の楕円曲線とし，$g\colon E \times C^* \to C^*$ を第 2 成分への射影とすると，g は C 上の相対的な Tate 一意化をもつ楕円ファイブレーション $E \times C \to C$ に拡張できる．

最後に，複素解析曲面の分類にも代数曲面の分類にも現れないような不変量を持ったリジッド解析曲面の例を挙げる．n を正整数とする．組 $(\kappa, \chi, g, l, \mathcal{C}) = (-\infty, 0, 0, 1, (pn - n - 1/pn^*))$ を満たすようなリジッド解析的楕円曲面が存在する．この例はある代数曲面の多重ファイバーを対数変換の逆変換により解消することで構成できる．

3 リジッド幾何

この節ではリジッド解析空間を定義する．スキームは局所的には一般の可換環を用いて定義するが，リジッド解析空間はアフィノイド代数と呼ばれる K-代数を用いて定義する．前節で見たように付値から定まる距離の定義する位相をもちいると開かつ閉集合が多くなりすぎ，構造層の定義が上手くいかない．そこで Grothendieck 位相を用いて，開集合や開被覆を減らした位相を定義することになる [21]．この節の内容は，文献 [3], [8] にさらに詳しい説明がある．

3.1 アフィノイド代数とアフィノイド部分領域

体 K 上の n 変数 Tate 代数 T_n を次のように定義する．

$$\begin{aligned} T_n &:= K\langle X_1, \dots, X_n \rangle \\ &:= \left\{ \sum_{e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}_{geq0}} X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n} \;\middle|\; \lim_{e_1 + \dots e_n \to +\infty} |a_{e_1, \dots, e_n}| \to 0 \right\}. \end{aligned}$$

Tate 代数 T_n の元 $f(X_1, \dots, X_n)$ に，各 i に対し $|x_i| \leq 1$ を満たす K の元の組 $(x_1, \dots, x_n)$ を代入すると K の元 $f(x_1, \dots, x_n)$ が定まる．体 K 上の Tate 代数をそのイデアルで割って得られる商代数を K-アフィノイド代数という．以下，アフィノイド代数とその間の準同型写像は K 上定義されているものとする．次の定理が成り立つ．

Theorem 3.1. アフィノイド代数は Noether 環である．より強く，優秀環である．

優秀環は各点における剰余体の標数が 0 であるか，または Krull 次元が 2 以下の場合に (標準的な) 特異点解消を持つ [14]．Noether の正規化定理の類似である次の定理も成り立つ．

Theorem 3.2. A を零代数でないアフィノイド代数とする．任意の Tate 代数からの有限な準同型写像

$\alpha\colon T_n \to A$ に対して，T_n のチャート $X_1, \ldots, X_n$(関係式のない K 上の位相的生成系) と非負整数 d が存在して，α を T_n の部分代数 $K\langle X_1, \ldots, X_d\rangle$ へ制限すると有限かつ単射な準同型写像が得られる．

この定理より次のことがわかる．

Corollary 3.3. アフィノイド代数をその極大イデアルで割って得られる商代数は K の有限次拡大体である．

Corollary 3.4. アフィノイド代数間の準同型写像 $A \to B$ は，引き戻しによってその極大イデアル全体の間の写像 $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ を誘導する．

アフィノイド代数の極大イデアル全体の間の射を，アフィノイド代数間の準同型写像が誘導する写像で定義する．

$\bar{K}$ を K の代数的閉包とする．絶対値が 1 以下である $\bar{K}$ の元の n 個の組みをすべて集めた集合を $B^n(\bar{K})$ と書く．$B^n(\bar{K})$ の各成分に同時に $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ の元を作用させることで，$B^n(\bar{K})$ には $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用が定まる．$B^n(\bar{K})$ の元 $(x_1, \ldots, x_n)$ は K-代数準同型写像 $\phi_{x_1,\ldots,x_n}\colon T_n \to \bar{K}$ を $X_i \mapsto x_i$ という対応により引き起こす．

Corollary 3.5. 集合間の写像 $\tau\colon B^n(\bar{K})/\operatorname{Gal}(\bar{K}/K) \to \operatorname{Max} T_n$，$\overline{(x_1, \ldots, x_n)} \mapsto \operatorname{Ker} \phi_{x_1,\ldots,x_n}$ を定義することができる．さらに，τ は全単射である．

A をアフィノイド代数とする．$\operatorname{Max} A$ の部分集合 U が次の条件を満たすとき U を $\operatorname{Max} A$ のアフィノイド部分領域という．以下のような 2 つの性質を持つアフィノイド代数 A' と射 $\phi\colon \operatorname{Max} A' \to \operatorname{Max} A$ が存在する．

1. 包含関係 $\operatorname{Im} \phi \subset U$ を満たす．
2. 射 $\psi\colon \operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ が包含関係 $\operatorname{Im} \psi \subset U$ を満たすとき射 $\psi'\colon \operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A'$ で $\psi = \phi \circ \psi'$ を満たすものが一意的に存在する．

A' と ϕ は一意的な同型の差を除いて一意的に定まる．

Proposition 3.6. $\operatorname{Im} \phi = U$ が成り立つ．さらに ϕ は単射である．

Proposition 3.7. 次が成り立つ．

1. U が $\operatorname{Max} A'$ のアフィノイド部分領域であり，$\operatorname{Max} A'$ が $\operatorname{Max} A$ のアフィノイド部分領域であるとき，U は $\operatorname{Max} A$ のアフィノイド部分領域である．
2. 射 $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ による $\operatorname{Max} A$ のアフィノイド部分領域の引き戻しは $\operatorname{Max} B$ のアフィノイド部分領域である．
3. U と V が $\operatorname{Max} A$ のアフィノイド部分領域であるとき，$U \cap V$ も $\operatorname{Max} A$ のアフィノイド部分領域である．

Example 3.8. A をアフィノイド代数とする．$\operatorname{Max} A$ を X と書く．A の元 $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ を取る．

$$X(f, g^{-1}) := \{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| \leq 1, \forall j, |g_j(x)| \geq 1\}$$

と定義する．$X(f)$ を Weierstrass 部分領域と呼び，$X(f, g^{-1})$ を Laurent 部分領域と呼ぶ．対応するアフィノイド代数はそれぞれ $A\langle X\rangle/(X - f)$ と $A\langle X, Y\rangle/(X - f, gY - 1)$ で与えられる．ただし，添字は省略してまとめて書いた．A の元 $f_1, \ldots, f_m, g$ を取る．

$$X(f/g) := \{x \in X \mid \forall i, |f_i(x)| \leq |g(x)|\}$$

と定義する．$X(f/g)$ を有理部分領域と呼ぶ．対応するアフィノイド代数は $A\langle X\rangle/(gX - f)$ で与えられる．

有理部分領域を用いてアフィノイド部分領域が記述できる．

Theorem 3.9 (Gerritzen, Grauert)**.** アフィノイド部分領域は有限個の有理部分領域で覆うことができる．

3.2 G 位相空間とリジッド解析空間

集合 X 上の G 位相 T を条件 (i)–(v) を満たす (a) ような集合 S と (b) のような集合族 $\{\operatorname{Cov} U\}_{U\in S}$ の組みとして定義する．

(a) S は 2^X の部分集合である．S の元を許容開集合，または T-開集合と呼ぶ．
(b) $\operatorname{Cov} U$ の元 $\{U_i\}_{i\in I}$ は $\forall i, U_i \in S$ と $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ を満たす．$\operatorname{Cov} U$ の元を U の許容被覆，または T-被覆と呼ぶ．
(i) $U, V \in S \Rightarrow U \cap V \in S$.
(ii) $U \in S \Rightarrow \{U\} \in \operatorname{Cov} U$.
(iii) $U \in S$, $\{U_i\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov} U$, $\{V_{ij}\}_{j\in J_i} \in \operatorname{Cov} U_i \Rightarrow \{V_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i} \in \operatorname{Cov} U$.
(iv) $U, V \in S$, $V \subset U$, $\{U_i\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov} U \Rightarrow \{V \cap U_i\}_{i\in I} \in \operatorname{Cov} V$.
(v) $\emptyset, X \in S$.

組 (X, T) を G 位相空間と呼ぶ．T を略して X と書くこともある．G 位相空間上で層を定義し，適切な条件の元で層のコホモロジー理論を展開することができる．また，環付き G 位相空間や局所環付き G 位相空間も，通常の環付き位相空間や局所環付き位相空間の場合と同様に定義することができる．X の許容被覆 $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{V_j\}_{j\in J}$ で $\forall i, \forall j, U_i \cap V_j = \emptyset$ を満たすものが存在しないとき X は連結であるという．

(X, T_X) と (Y, T_Y) を G 位相空間とする．写像 $\phi\colon X \to Y$ が以下の条件を満たすとき ϕ は連続であるという．連続である写像を射として G 位相空間の圏 GTop を定義する．

1. Y の許容開集合の ϕ による逆像は X の許容開集合である．
2. Y の許容開集合 V の許容被覆 $\{V_i\}$ に対し次が成り立つ：集合 $\{\phi^{-1}(V_i)\}$ は $\phi^{-1}(V)$ の許容被覆である．

T, T' を集合 X の G 位相とする．T の定まった X から T' の定まった X への恒等写像 ϕ が連続であるとき，T は T' より強い (finer) であるという．次の 3 条件が満たされるとき，T' は T より少し強い (slightly finer) という．

1. T' は T より強い．
2. T-開集合は T' の開基である．即ち，T'-開集合は T-開集合からなる T'-被覆を持つ．
3. T-開集合 U の T'-被覆 $\mathcal{U}$ に対し，$\mathcal{U}$ を細分する U の T-被覆が存在する．

少し強い位相に位相を取りかえても層のコホモロジーは変化しない．

集合の圏の部分圏 $\mathcal{C}$ に対し，集合に G 位相を与える関手 $\widetilde{T}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{GTop}$, $X \mapsto (X, T_X)$ を $\mathcal{C}$ の G 位相という．$\widetilde{T}$ と $\widetilde{T}'$ を $\mathcal{C}$ の G 位相とする．任意の $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し T'_X が T_X より少し強いとき，$\widetilde{T}'$ は $\widetilde{T}$ より少し強いという．

Theorem 3.10. $\mathcal{C}$ の G 位相 $\widetilde{T}$ に対し，$\widetilde{T}$ より少し強い位相の中で最も強い位相が存在する．

リジッド解析空間を定義するために，まずアフィノイド空間を定義する．A をアフィノイド代数とする．$\operatorname{Max} A$ の弱 G 位相と呼ばれる G 位相を次のように定義する，

- アフィノイド部分領域を許容開集合とする．
- アフィノイド部分領域からなる許容開集合 U の有限被覆を U の許容被覆とする．

アフィノイド代数の間の準同型写像 $A \to B$ は弱 G 位相の定まった G 位相空間の間の射 $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ を誘導する．上記の定理を用いて $\operatorname{Max} A$ に強 G 位相と呼ばれる G 位相を定める．通常 $\operatorname{Max} A$ には強 G 位相を定め，単に $\operatorname{Max} A$ の G 位相といったら強 G 位相のことを指す．この位相に関して次が成り立つ．

Theorem 3.11. アフィノイド空間の Zariski 開集合は許容開集合であり，Zariski 被覆は許容被覆である．

Theorem 3.12. アフィノイド空間のアフィノイド部分領域による有限和集合 $\bigcup_{i\in I} U_i$ は許容開集合である．さらに，集合 $\{U_i\}_{i\in I}$ はこの許容開集合の許容被覆である．

次に，G 位相空間 $X = \operatorname{Max} A$ の構造層と加群の層を定義する．M を有限 A-加群とする．X 上の前層 $\mathcal{F}_M$ を，アフィノイド部分領域 $\operatorname{Max} A'$ に対して，

$$\mathcal{F}_M(\operatorname{Max} A') := A' \otimes_A M$$

とおくことにより定める．

Theorem 3.13 (Tate's acyclicity theorem)**.** 前層 $\mathcal{F}_M$ は層である．

Remark. M が一般の A-加群の場合には，$\mathcal{F}_M$ を定義する際に，テンソル積 $A' \otimes_A M$ をテンソル積の完備化 $A' \widehat{\otimes}_A M$ へ取りかえれば上記の定理が成立する．

X の構造層を $\mathcal{O}_X := \mathcal{F}_A$ とおくことにより定義する．こうして得られた局所環付き G 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ をアフィノイド空間と呼び $\operatorname{Sp} A$ で表す．アフィノイド空間の性質を環の性質 (正規，正則，被約，n 次元，純 n 次元) で表現する．

局所環付き G 位相空間の許容被覆で，各々の要素があるアフィノイド空間と同型であるようなものをアフィノイド被覆と呼ぶ．アフィノイド被覆を持つ局所環付き G 位相空間をリジッド解析空間と呼ぶ．アフィノイド被覆が有限枚で取れるとき，準コンパクトであるという．

局所環付き G 位相空間の射でリジッド解析空間の射を定義する．リジッド解析空間 X 上の $\mathcal{O}_X$-加群の層 $\mathcal{G}$ が次の条件を満たすとき連接層という：アフィノイド被覆があって各要素に制限すると上述の有限加群に対する $\mathcal{F}_M$ と同型になる．

Example 3.14 (1 次元射影空間)**.** $\operatorname{Sp} K\langle S\rangle$ と $\operatorname{Sp} K\langle T\rangle$ とを次のように張り合わせる．準同型写像の合成

$$K\langle S\rangle \longrightarrow K\langle S, S'\rangle/(SS'-1) \xrightarrow{\cong} K\langle S, S^{-1}\rangle$$

はアフィノイド空間の間の射

$$\operatorname{Sp} K\langle S, S^{-1}\rangle \longrightarrow \operatorname{Sp} K\langle S\rangle$$

を誘導する．同様に，アフィノイド空間の間の射

$$\operatorname{Sp} K\langle T, T^{-1}\rangle \longrightarrow \operatorname{Sp} K\langle T\rangle$$

が得られる．これらの射はそれぞれ有理部分領域を定義している．K が代数的に閉じている場合には，これらの部分領域は半径 1 の円板の中で，絶対値が 1 である点全体からなる開かつ閉集合に対応する．対応 $S \to T^{-1}$ によって定まる準同型から誘導されるアフィノイド空間の間の射

$$\operatorname{Sp} K\langle S, S^{-1}\rangle \longrightarrow K\langle T, T^{-1}\rangle$$

によって，$\operatorname{Sp} K\langle S\rangle$ と $\operatorname{Sp} K\langle T\rangle$ とを張り合わせる．こうして得られたリジッド解析空間を K 上の 1 次元射影空間という．このリジッド解析空間を $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ と書く．

Example 3.15 (n 次元多重閉円板)**.** $\operatorname{Sp} T_n$ を K 上の n 次元多重閉円板という．

Example 3.16 (解析的閉部分空間)**.** I をアフィノイド代数 A のイデアルとする．このとき $\operatorname{Sp} A/I$ を，I で定義される $\operatorname{Sp} A$ の解析的閉部分空間という．

Example 3.17 (1 次元アフィン空間)**.** K の元 π で $0 < |\pi| < 1$ を満たすものを取る．アフィノイド空間の族

$$\{\operatorname{Sp} K\langle S\rangle\} \cup \left\{\operatorname{Sp} K\left\langle \frac{\pi^{n+1}}{S}, \frac{S}{\pi^n}\right\rangle\right\}_{n\in\mathbb{Z}_{\leq -1}}$$

を張り合わせることによって得られるリジッド解析空間を K 上の 1 次元アフィン空間という．このリジッド解析空間を $\mathbb{A}_K^{1,\mathrm{an}}$ と書く．

Example 3.18 (Tate の楕円曲線)**.** K の元 α で $0 < |\alpha| < 1$ を満たすものを取る．さらに K の元 β で $0 < |\beta| < |\alpha|$ を満たすものを取る．2 つのアフィノイド空間

$$\left\{\operatorname{Sp} K\left\langle \frac{\alpha}{S}, \frac{S}{\pi}\right\rangle, \operatorname{Sp} K\left\langle \frac{\pi}{T}, T\right\rangle\right\}$$

を，$S = \alpha, T = 1$ のところを α 倍射で張り合わせ，$S = \pi, T = \pi$ のところをそのまま張り合わせる．このようにして得られたリジッド解析空間を K 上の Tate の楕円曲線という．π のとり方によらず決まるので，このリジッド解析空間を E_α と書く．

これらの例は高次元の場合や相対的な場合にも拡張できる．

3.3 性質と基本的な結果

Theorem 3.19. リジッド解析空間の圏にファイバー積が存在する．

Remark. アフィノイド空間の場合にはテンソル積の完備化を用いてファイバー積を記述できる．一般の場合は，アフィノイド空間の場合の張り合わせで得られる．

Definition 3.1. リジッド解析空間の間の射 $\phi\colon X \to Y$ は，次が満たされるとき閉埋め込み (resp. 有限) という：ある Y のアフィノイド被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して，その ϕ による引き戻しは X のアフィノイド被覆となる．さらに，各 $i \in I$ について ϕ を制限して得られるアフィノイド空間の間の射 $\phi^{-1}(U_i) \to U_i$ は全射 (resp. 有限) 準同型写像から誘導される．閉埋め込みを用いて，解析的閉部分空間を定義する．また，解析的閉部分空間を用いて，リジッド解析空間の既約性を定義する．

Definition 3.2. リジッド解析空間の間の射 $\phi\colon X \to Y$ は，次が満たされるとき射影的であるという：ある非負整数 n が存在して ϕ は，自然な射影 $\mathbb{P}_Y^{n,\mathrm{an}} \to Y$ を閉埋め込みで経由する．また，リジッド解析空間の間の射 $\phi\colon X \to Y$ は，次が満たされるとき局所射影的という：ある Y のアフィノイド被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して，各 $i \in I$ について ϕ を制限して得られる射 $\phi^{-1}(U_i) \to U_i$ は射影的である．

Definition 3.3. リジッド解析空間の間の射 $\phi\colon X \to Y$ は，次が満たされるとき分離的であるという：対角射 $X \to X \times_Y X$ が閉埋め込みである．

Definition 3.4. X, Y をそれぞれアフィノイド空間 $\operatorname{Sp} A, \operatorname{Sp} B$ とする．構造射 $X \to Y$ が準同型写像 $\alpha\colon B \to A$ から誘導されているとする．次の条件が満たされているとき，X の部分集合 U は Y 上 X 内で相対コンパクトであるといい，$U \Subset_Y X$ と書く：α を拡張した準同型写像 $\beta\colon B\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to A$ が全射であり，包含関係

$$U \subset \{x \in \operatorname{Sp} A \mid \forall i, |\beta(X_i)(x)| < 1\}$$

が成り立つ．ここで，絶対値は K 上の絶対値の一意的な拡張である．

Definition 3.5. リジッド解析空間の間の射 $\phi\colon X \to Y$ は，分離的であってかつ次が満たされるとき固有であるという：Y のアフィノイド被覆 $\{Y_i\}_{i\in I}$ と，各 $i \in I$ に対して 2 つの $\phi^{-1}(Y_i)$ の有限アフィノイド被覆 $\{X_{ij}\}_{j\in J_i}, \{X'_{ij}\}_{j\in J_i}$ があって，$X_{ij} \Subset_{Y_i} X'_{ij}$ が満たされる．

Theorem 3.20 (高次順像定理)**.** リジッド解析空間の間の固有射 $\phi\colon X \to Y$ と X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して，高次順像 $R^q\phi_*\mathcal{F}$ は Y 上の連接層である．

Theorem 3.21 (Stein 分解)**.** リジッド解析空間の間の固有射 $\phi\colon X \to Y$ に対して，次の 4 つの条件を満たすリジッド解析空間 Z と 2 つの射 $\rho\colon X \to Z$ と $\psi\colon Z \to Y$ が存在する：

1. 合成 $\psi \circ \rho$ は ϕ と一致する．
2. ρ は全射固有であって，各 Y の点上のファイバーは連結である．
3. 自然な射 $\mathcal{O}_Z \to \rho_*\mathcal{O}_X$ は同型射である．
4. ψ は有限射である．

Definition 3.6. リジッド解析空間の間の射 $\phi\colon X \to Y$ は，次が満たされるとき平坦 (resp. エタール) であるという：Y のアフィノイド被覆 $\{Y_i\}_{i\in I}$ と，各 $i \in I$ に対して $\phi^{-1}(Y_i)$ のアフィノイド被覆 $\{X_{ij}\}_{j\in J_i}$ があって，各制限 $X_{ij} \to Y_i$ が平坦 (resp. エタール) な準同形写像から誘導されている．

3.4 Tate の楕円曲線

Tate の楕円曲線について説明する．この節の内容は，文献 [22] にさらに詳しい説明がある．

$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E は，$\mathbb{C}$ 上の格子 $\Gamma = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\gamma$ を用いて $\mathbb{C}/\Gamma$ と書くことができる．Γ に付随した Weierstrass の $\mathcal{P}$ 関数を $\mathcal{P}$ と書く．対応 $x \mapsto (\mathcal{P}(x) : \mathcal{P}'(x) : 1)$ により E は 2 次元の射影空間へ埋め込める．$\mathcal{P}$ 関数の周期性 $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x+1)$ により，図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, "e^{2\pi i x}"] \arrow[dr, "(\mathcal{P}:\mathcal{P}':1)"'] & & \mathbb{C}^\times \arrow[dl, "\phi"] \\ & \mathbb{C}/\Gamma & \end{tikzcd}$$

が可換になるように射 ϕ を定義することができる．この射 ϕ はリジッド幾何の場合にも定義することができる．以下，このことを説明する．

K の元 α で $0 < |\alpha| < 1$ を満たすものを取る．$\mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}}$ 上の 2 つの関数を

$$P(x) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^i x}{(1-\alpha^i x)^2} - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^i}{(1-\alpha^i)^2}$$

と

$$Q(x) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha^i x)^2}{(1-\alpha^i x)^3} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^i}{(1-\alpha^i)^2}$$

とにより定義する．すると射

$$(P : Q : 1)\colon \mathbb{G}_{m,K}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbb{P}_K^{2,an}$$

が定まる．この射は E_α(Example 3.18) を経由する．像は方程式

$$Y^2Z + XYZ = X^3 - b_2XZ^2 - b_3Z^3$$

で与えられる．ただし，

$$b_2 := 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\alpha^n}{1-\alpha^n}$$

$$b_3 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7n^5+5n^3)\alpha^n}{12(1-\alpha^n)}$$

と置いた．さらに，

$$\Delta := \alpha \prod_{n=1}^{\infty} (1-\alpha^n)^{24}$$

と置き，E_α の j-不変量を

$$j := \frac{(1+48b_2)^3}{\Delta} = \frac{1}{\alpha}(1+744\alpha+196884\alpha^2+\dots)$$

で定義する．

Theorem 3.22. 不等式 $|j|>1$ が成り立つ．

逆に，$|j|>1$ を満たす任意の $j \in K$ に対して，j-不変量 j を持つ E_α を構成することができる．

4 主結果の証明

ここでは，リジッド解析曲面の分類に関係する定理の証明方針を簡単に説明する．リジッド幾何における楕円曲面の対数変換の構成方法も，複素幾何の場合と比較しながら説明する．

4.1 局所代数化

A をアフィノイド代数とする．関手

$$(\mathrm{Spec}\,A \text{ 上の局所有限型スキームの圏}) \longrightarrow (\mathrm{Sp}\,A \text{ 上のリジッド解析空間の圏})$$

が存在することが知られている．この関手を解析化関手と呼ぶ．

Theorem 4.1. リジッド解析空間の間の相対次元が 1 以下の固有射 $\phi\colon X \to Y$ と，Y 上の任意の点 y に対し，次の条件を満たすアフィノイド空間と同型な許容開集合 U が存在する：U は y を含み，ϕ の制限 $\phi^{-1}(U) \to U$ はスキームの間の射の解析化である．

この定理は次のように示される：まず，1 次元の K 上固有なリジッド解析空間が射影的であることを示す．このことから，y のファイバーに現れるリジッド解析空間は射影的だから，豊富因子が取れる．この豊富因子を近傍へ拡張することにより y を含む許容開集合 V と $\phi^{-1}(V)$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ が得られる．この直線束は y 上では豊富である．実は，その近傍でも豊富であることが知られており [6]，このことから定理が示される．

この定理を用いると，定理 2.7 で述べられている定理 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 に対応する主張はスキーム論に帰着され，スキームの場合の対応する定理を用いて証明を与えることができる．定理 2.1 の証明には 2 次元の優秀スキームの特異点解消定理 [14] を用いる．定理 2.2 の証明には 2 次元の Noether スキームの双有理幾何 [20] を用いる．定理 2.3 は定理 2.2 から従う．定理 2.5 は次のように示される：X の有理型関数体の正則モデル Y を射影空間 $\mathbb{P}^n_K$ の中に取る．X から Y へ有理型写像 (次元の小さな解析的閉部分集合を除いて定義された正則射) を定義することができる．最後に，$\mathbb{P}^n_X$ 内のこの写像のグラフの閉包を特異点解消し，得られたリジッド解析空間から X への射と Y への射を調べることによって定理が示される．

4.2 因子の変形

Theorem 4.2. D を準コンパクトリジッド解析空間 X 上の有効 Cartier 因子 (スキームの場合と同様に定義する) が定める解析的閉部分空間とする．もし接束 $\mathcal{N}_{D/X}$ がどこでも消えない切断を持ち $H^1(D, \mathcal{N}_{D/X}) = 0$ で

あれば，次の条件を満たす X の許容開集合 U が存在する：U は D を含み，U 上の正則関数 F があって D は F で定義される．

この定理の証明は，複素幾何の場合 [13] と同様に，まず形式的な変形を構成して次に収束性を示す．収束を示す際には，非アルキメデス付値体上の関数解析学に登場する Banach の開写像定理 [4] を用いる．

この定理を用いて，次のように定理 2.7 で述べられている定理 2.4 に対応する主張を示すことができる：第一種例外曲線 E と一点で正規交差する因子 D_1 を，E を含む適当な許容開集合上に構成する．$E+D_1$ に対して定理を適用し，関数 F_1 を得る．同様の手続きにより別の関数 F_2 を構成する．この 2 つの関数を用いて E の近傍から 2 次元の多重円板の上への射を構成し，局所代数化を用いてスキーム論へ帰着させる．

4.3 良い性質を持つエタール被覆

Theorem 4.3. 正則リジッド解析曲線 C と，リジッド解析空間の間の相対次元が 1 の固有平坦射 $\phi\colon X \to C$ に対し，次の条件を満たす C のアフィノイド被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在する：各 U_i に次の条件を満たす有限エタール Galois 被覆 $\{V_{ij}\}_{j\in J_i}$ が存在する：ϕ の V_{ij} による基底変換は局所射影的である．

この定理の証明は，この定理に類似した結果 [5] とエタール被覆に関する研究 [15], [7] を用いる．

この定理を用いて，定理 2.8 を次のように示すことができる：まず，上記の被覆を使って楕円曲面に対する Jacobian を構成する．さらに，降下理論 [2] を用いて，古典的な楕円曲面に対して成り立つ標準束の公式と Noether の公式を証明する．この 2 つの公式から定理が従う．

4.4 対数変換

リジッド幾何における楕円曲面の対数変換について説明する．この節では 3.4 節の記号を用いる．

まず複素幾何の場合の対数変換を復習する．自然な射影 $\mathbb{C} \to E$ による $x \in \mathbb{C}$ の像を $[x]$ と書く．D, D' を開円板とする．射 $D \to D'$ を原点でのみ分岐する n 重被覆とする．E の原始 n 等分点 $[a]$ を取る．D 上の作用 $s \mapsto \zeta_n s$ と，$E \times D$ 上の作用 $([x], s) \mapsto ([x+a], \zeta_n s)$ を考え，これらの作用で割って得られるファイブレーションを $X \to D'$ とする．このとき，可換図式

$$\begin{tikzcd} E \times D \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ D \arrow[r] & D' \end{tikzcd}$$

が得られる．これらのファイブレーションを原点を除いたところへ制限すると，可換図式

$$\begin{tikzcd} E \times D^* \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & X^* \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & E \times D'^* \arrow[dl] \\ D^* \arrow[r] & D'^* & \end{tikzcd}$$

が得られる．ただし，上の射は

$$([x], s) \longmapsto \overline{([x], s)} \longmapsto \left(\left[x - \frac{na}{2\pi i}\log s\right], s^n\right)$$

によって定義される．従って，ファイブレーション $X \to D'$ は n 重の重複ファイバーを与え，原点を除いた円板上へ制限すると自明なファイブレーション (直積の射影) と同型になる．このファイブレーションを用いると与えられた自明なファイブレーションから，重複ファイバーをたくさん持ったファイブレーションを構成することができる．この変換を対数変換と呼ぶ．

次に，リジッド幾何における対数変換について述べる．以下，基礎体 K は代数的に閉じているものとする．$C := \operatorname{Sp} K\langle T\rangle$ と置き，$C^* := C - \{0\}$ と置く．整数 a, b, m, n を条件 $\gcd(a, m) = 1, a \neq 0, m > 0, ab - mn = 1$ を満たすようにとる．さらに，

$$\mathcal{X} := \mathbb{G}_K^{1,\mathrm{an}} \times C$$

と

$$\mathcal{Y} := \{(y, u) \in \mathbb{G}_K^{1,\mathrm{an}} \times \mathbb{A}_K^{1,\mathrm{an}} \mid |y^b u^m| \leq 1\}$$

と置き，これらを C^* 上へ制限したものをそれぞれ $\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*$ と書く．すると，同型

$$\mathcal{X}^* \xrightarrow{\cong} \mathcal{Y}^*$$

を対応

$$(x, t) \longmapsto (y, u) = (x^{-m} t^a, x^b t^{-n})$$

により定義することができる．逆の対応は

$$(y, u) \longmapsto (x, t) = (y^n u^a, y^b u^m)$$

により与えられる．

α の $\mathcal{X}$ への作用を

$$(x, t) \longmapsto (\alpha x, t)$$

によって定め，$\mathcal{Y}$ への作用を

$$(y, u) \longmapsto (\alpha^{-m} y, \alpha^b u)$$

によって定めれば，これらの作用は C^* 上に制限すると上記の同型を介して一致する．これらの作用に関する基本領域をそれぞれ

$$\{(x, t) \in \mathcal{X} \mid |\alpha| \leq |x| \leq 1\}$$

と

$$\{(y, u) \in \mathcal{Y} \mid |\alpha|^m \leq |y| \leq 1\}$$

と取ることができる．従って，商を取ることができ，得られた空間をそれぞれ X, Y と置く．これらの C' 上への制限をそれぞれ X^*, Y^* と置く．

射 $f\colon X^* \to \mathbb{P}^2_{C^*}$ を対応

$$\overline{(x, t)} \longmapsto ((P(x) : Q(x) : 1), t)$$

で定め，射 $g\colon Y^* \to \mathbb{P}^2_{C^*}$ を対応

$$\overline{(y, u)} \longmapsto ((P(y^n u^a) : Q(y^n u^a) : 1), y^b u^m)$$

で定める．すると，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^* \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d] & & \mathcal{Y}^* \arrow[d] \\
X^* \arrow[dr, "f"'] & & Y^* \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{P}^2_{C^*} &
\end{tikzcd}$$

は可換であり，f と g の像は一致する．X は自明なファイブレーションだが，Y は原点上が m 重の重複ファイバーになっている．この重複ファイバーが順分岐であることも示すことができる．また，このファイブレーショ

ンは a, m によって定まり，b, n にはよらないことも示すことができる．以上より，リジッド幾何の場合の対数変換が得られる．

p を K の標数とする．C を K 上の種数 $g(C)$ の非特異固有曲線とする．自明ファイブレーション $E_\alpha \times C \to C$ を考える．上述の対数変換を $q \in C$ に施す作用を (q, a_q, m_q) と書く．S を C の有限部分集合とする．有限回の作用 $\{(q, a_q, m_q)\}_{q \in S}$ を施して得られる楕円ファイブレーションを Y と書く．さらに，

$$T := \{q \in S \mid p \mid m_q\}$$

と置く．連接層 $\mathcal{F}$ と非負整数 n に対して

$$h^n(\mathcal{F}) := \dim H^n(Y, \mathcal{F})$$

と置く．このとき以下の定理が成り立つ．

Theorem 4.4. $T \neq \emptyset$ ならば，等式

$$h^0(\Omega^1_Y) = g(C) + \sharp T - 1$$

が成り立つ．

Theorem 4.5. $T = \emptyset$ ならば，等式

$$h^0(\Omega^1_Y) = \begin{cases} g(C), & \eta \neq 0, \\ g(C) + 1, & \eta = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，

$$\eta := \sum_{q \in S} \frac{a_q}{m_q}$$

と置いた．

Theorem 4.6. $C = \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_K$ ならば，等式

$$h^2(\Theta_Y) = \begin{cases} 0, & \sharp S \leq 3, \\ \sharp S - 3, & S > 3 \end{cases}$$

が成り立つ．

Theorem 4.7. C 上の因子 D を

$$D := \sum_{q \in S} \frac{a_q l}{m_q} q$$

によって定義する．ここで l は m_q の最小公倍数である．mD が主因子となるような整数 m が存在するとき，楕円曲面 Y は射影的である．

この定理の証明は次ようにする：まず Y を $C - S$ と Tate の楕円曲線の直積で書き表す．仮定の主因子を利用して，その直積上に因子を定義する．この因子が Y に拡張できることを示し因子 D を得る．D の C への像は C と一致する．この事実から Y 上に豊富因子が存在することがわかる．

参考文献

[1] E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p. II*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 23–42.

[2] S. Bosch and U. Görtz, *Coherent modules and their descent on relative rigid spaces*, J. Reine Angew. Math. **495** (1998), 119–134.

[3] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry.

[4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XV. Livre V: Espaces vectoriels topologiques. Chapitre I: Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué. Chapitre II: Ensembles convexes et espaces localement convexes*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1189. Deuxième édition revue et corrigée, Hermann, Paris, 1966.

[5] B. Conrad, *Modular curves and rigid-analytic spaces*, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), no. 1, part 1, 29–110.

[6] ———, *Relative ampleness in rigid geometry*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 4, 1049–1126.

[7] J. de Jong and M. van der Put, *Étale cohomology of rigid analytic spaces*, Doc. Math. **1** (1996), no. 1, 1–56 (electronic).

[8] J. Fresnel and M. van der Put, *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics, vol. 218, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.

[9] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces. I*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), no. 1, 111–152.

[10] ———, *On compact analytic surfaces: II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), no. 3, 563–626.

[11] ———, *On compact analytic surfaces. III*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), no. 1, 1–40.

[12] ———, *On the structure of compact complex analytic surfaces. II*, Amer. J. Math. **88** (1966), 682–721.

[13] K. Kodaira and D. C. Spencer, *A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems*, Amer. J. Math. **81** (1959), 477–500.

[14] J. Lipman, *Desingularization of two-dimensional schemes*, Ann. Math. (2) **107** (1978), no. 1, 151–207.

[15] F. Mehlmann, *Ein Beweis für einen Satz von Raynaud über flache Homomorphismen affinoider Algebren*, Schr. Math. Inst. Univ. Münster (2) (1981), no. 19, iv+112.

[16] K. Mitsui, *Classification of rigid analytic surfaces*, preprint.

[17] ———, *Criterion for minimality of rigid analytic surfaces*, preprint.

[18] ———, *Logarithmic transformations of rigid analytic elliptic surfaces*, preprint.

[19] ———, *Minimal models of rigid analytic surfaces*, preprint.

[20] I. R. Shafarevich, *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Notes by C. P. Ramanujam. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, No. 37, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1966.

[21] J. Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289.

[22] ———, *A review of non-Archimedean elliptic functions*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 162–184.

[23] K. Ueno, *Compact rigid analytic spaces with special regard to surfaces*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 765–794.