群作用のパラメータ剛性

丸橋広和[*]

京都大学大学院理学研究科数学教室

群 G と多様体 M が与えられたとき, G の M への作用全体の空間を理解しようという取り組みが本格的に始まったのは 1980 年代の末あたりではないかと思う. 群作用のパラメータ剛性はそのような大域的な観点に立ったとき自然に生じる概念の 1 つで, まだ分かっていないことがいろいろある.

G を Lie 群, M を C^∞ 級多様体とし, xg $(x \in M, g \in G)$ を G の M への C^∞ 級右作用とする. xg が**局所自由** (locally free) であるとは, M の任意の点における固定部分群が G の離散部分群になることをいう. 以下扱う作用はすべて局所自由である. xg が局所自由であるとき, その軌道の全体は M の葉層構造 $\mathcal{F}$ を定める. $\mathcal{F}$ を**軌道葉層** (orbit foliation) という. 作用を微分することによって $\mathcal{F}$ の接空間は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ と同一視することができる. したがって $T\mathcal{F} \simeq M \times \mathfrak{g}$ となる.

例 0.1. G を Lie 群 H の閉部分群, Γ を H の離散部分群とするとき, G の $\Gamma \backslash H$ への G の右掛算による作用は局所自由である.

定義 0.2. xg を局所自由作用とし, $\mathcal{F}$ をその軌道葉層とする. xg が**パラメータ剛性を持つ** (parameter rigid) とは, G の M への作用で軌道葉層が $\mathcal{F}$ であるものがすべて xg と共役になることをいう. つまり $x * g$ を軌道葉層が $\mathcal{F}$ である任意の作用とするとき, $\mathcal{F}$ の各葉を保つ C^∞ 級微分同相写像 $F : M \to M$ と G の自己同型 Φ が存在して

$$F(xg) = F(x) * \Phi(g)$$

を満たすことをいう.

作用の全体を考えるので, もとの作用がよく分かっていてもパラメータ剛性を持つかどうかを判定するのは簡単なことではないと予想できる. この定義を見ても, ある作用がパラメータ剛性を持つことを示すにはどうすればいいのかよく分からないのでもう少し扱いやすい形の十分条件を考えよう. 以下では G は可縮で M はコンパクトと仮定する. G が可縮というのは強い仮定だが, $\mathbb{R}^n$ や単連結べき零 Lie 群を念頭においている.

$x * g$ を軌道葉層が xg と同じ作用としよう. x と xg は同じ軌道にある点なので

$$xg = x * a(x, g)$$

となる $a(x, g) \in G$ が存在する. $a(x, 1) = 1$ という条件を課せば C^∞ 級写像 $a : M \times G \to G$ が一意的に定まる.

$$x * a(x, gg') = xgg' = xg * a(xg, g') = x * (a(x, g)a(xg, g'))$$

より a は

$$a(x, gg') = a(x, g)a(xg, g')$$

を満たす. 天下り的だがここでもし

$$a(x, g) = P(x)^{-1}\Phi(g)P(xg)$$

[*] h-maruha@math.kyoto-u.ac.jp

を満たす準同型 $\Phi : G \to G$ と C^∞ 級写像 $P : M \to G$ が存在したと仮定してみよう．$F : M \to M$ を $F(x) = x * P(x)^{-1}$ によって定めると F は各軌道を保つ C^∞ 級写像で

$$F(xg) = xg * P(xg)^{-1} = x * (a(x,g)P(xg)^{-1}) = x * (P(x)^{-1}\Phi(g)) = F(x) * \Phi(g)$$

が成り立つ．G と M に対する仮定から F が微分同相で Φ が自己同型であることがわかる．

定義 0.3. H を Lie 群とする．C^∞ 級写像 $a : M \times G \to H$ が xg の H 値コサイクルであるとは

$$a(x, gg') = a(x,g)a(xg,g') \tag{0.1}$$

が成り立つことをいう．

$a(x,g)$ が x に依らないようなコサイクルを定値コサイクル (constant cocycle) という．これは準同型 $G \to H$ と同一視できる．

xg の H 値コサイクル a, b がコホモロガスであるとは

$$a(x,g) = P(x)^{-1}b(x,g)P(xg)$$

を満たす C^∞ 級写像 $P : M \to H$ が存在することをいう．

作用 xg がコサイクル剛性を持つ (cocycle rigid) とは xg の G 値コサイクルが常に定値コサイクルとコホモロガスであることをいう．

さきほどの議論から次の命題が成り立つ．

命題 0.4. コサイクル剛性を持つならばパラメータ剛性を持つ．

次にコサイクルを微分形式として表すことを考える．a を xg の H 値コサイクルとする．H の Lie 環を $\mathfrak{h}$ とかこう．$x \in M$ を固定すれば写像 $a(x, \cdot) : G \to H$ が定まるが，これを微分したものを $\omega_x : T_x\mathcal{F} \simeq \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ とする．このようにして $\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}, \mathfrak{h})$ が得られる．ただし $\Omega^p(\mathcal{F}, \mathfrak{h})$ は $\mathrm{Hom}(\bigwedge^p T\mathcal{F}, \mathfrak{h})$ の C^∞ 級切断の全体である．このときコサイクルであるという条件 0.1 は

$$d_\mathcal{F}\omega + [\omega, \omega] = 0$$

という条件になる．ここで $d_\mathcal{F} : \Omega^p(\mathcal{F}, \mathfrak{h}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{F}, \mathfrak{h})$ は $T\mathcal{F}$ が完全積分可能であることから定まる．つまりコサイクル $a : M \times G \to H$ を与えることと $d_\mathcal{F}\omega + [\omega, \omega] = 0$ を満たす $\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}, \mathfrak{h})$ を与えることは同じである．またコホモロガスであるという関係は次のようにかける．

命題 0.5. a, b を xg の H 値コサイクルとし，ω_a, ω_b を対応する微分形式とする．C^∞ 級写像 $P : M \to H$ に対して次は同値．

1. $a(x,g) = P(x)^{-1}b(x,g)P(xg)$
2. $\omega_a = \mathrm{Ad}(P^{-1})\omega_b + P^*\theta$

ただし $\theta \in \Omega^1(H, \mathfrak{h})$ は H の左 Maurer-Cartan 微分形式である．

系 0.6. 次は同値．

1. xg がコサイクル剛性を持つ．
2. $d_\mathcal{F}\omega + [\omega, \omega] = 0$ を満たす任意の $\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}, \mathfrak{g})$ に対して，Lie 環の準同型 $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ と C^∞ 級写像 $P : M \to G$ が存在して
$$\omega = \mathrm{Ad}(P^{-1})\Phi + P^*\theta$$
となる．

さて次に $\mathbb{R}$ 値コサイクルを考えよう．微分形式の方でみると，$\mathbb{R}$ 値コサイクルは $d_{\mathcal{F}}\omega = 0$ を満たす $\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ で与えられる．また 2 つの $\mathbb{R}$ 値コサイクル ω, η がコホモロガスであるというのは $\omega = \eta + d_{\mathcal{F}}P$ となる $P : M \to \mathbb{R}$ が存在することである．したがって次のような de Rham コホモロジーを考える．

定義 0.7. コチェイン複体 $(\Omega^*(\mathcal{F}, \mathbb{R}), d_{\mathcal{F}})$ のコホモロジーを $H^*(\mathcal{F})$ で表し，$\mathcal{F}$ の **leafwise cohomology** という．

$H^1(\mathcal{F})$ は xg の $\mathbb{R}$ 値コサイクルの同値類全体である．このうち定値コサイクルの占める部分は Lie 環のコホモロジー $H^1(\mathfrak{g})$ として表される．ここで Lie 環のコホモロジーの定義を思い出そう．Lie 群 G 上の左不変微分形式の全体 $\Omega^*(G)^G$ は G の de Rham 複体の部分複体をなす．このコホモロジーを $H^*(\mathfrak{g})$ で表し，Lie 環 $\mathfrak{g}$ のコホモロジーという．つまり $H^*(\mathfrak{g})$ は複体 $(\bigwedge^* \mathfrak{g}^*, d)$ のコホモロジーである．ただし $\varphi \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$, $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$ に対して

$$d\varphi(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}).$$

さて各点 $x \in M$ で $T_x\mathcal{F} \simeq \mathfrak{g}$ であったことより，コチェイン写像 $(\bigwedge^* \mathfrak{g}^*, d) \to (\Omega^*(\mathcal{F}, \mathbb{R}), d_{\mathcal{F}})$ が定まり，コホモロジーに写像 $H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(\mathcal{F})$ が誘導される．M のコンパクト性からこの写像が $H^1(\mathfrak{g})$ において単射であることがわかるので以下 $H^1(\mathfrak{g}) \subset H^1(\mathcal{F})$ とみなす．コホモロジーの定義から明らかに $H^1(\mathcal{F})$ のうち定値コサイクルの占める部分は $H^1(\mathfrak{g})$ である．

命題 0.8. $G = \mathbb{R}^k$ に対して次は同値.

1. xg がパラメータ剛性を持つ.
2. $H^1(\mathcal{F}) = H^1(\mathfrak{g})$.

2⇒1 であることは命題 0.4 と系 0.6 から容易に分かる．1⇒2 であることの証明はここではしない．

系 0.9. $G = \mathbb{R}$ とし，流れ xg を生成するベクトル場を X とする．このとき次は同値.

1. xg がパラメータ剛性を持つ.
2. 任意の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対して定数 $c \in \mathbb{R}$ と C^∞ 級関数 $P : M \to \mathbb{R}$ が存在して

$$f = c + XP$$

を満たす.

証明. 命題 0.8 の条件 2 を具体的に書き下せばよい．$\mathfrak{g}$ の自然な基底 $\frac{d}{dt}$ の双対を $dt \in \mathfrak{g}^*$ とし，これらを $T_x\mathcal{F} \simeq \mathfrak{g}$ を通じて M 上に移したものと同一視する．$\frac{d}{dt}$ の方は X になる．このとき

$$[\omega] \in H^1(\mathcal{F}) \iff \omega = f dt \quad (\exists f \in C^\infty(M, \mathbb{R})),$$
$$[\omega] \in H^1(\mathfrak{g}) \iff \omega = c dt \quad (\exists c \in \mathbb{R})$$

なので命題 0.8 の条件 2 は

$$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\ \exists c \in \mathbb{R},\ \exists P \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\ f dt = c dt + d_{\mathcal{F}}P$$

と同値. 最後の式に $\frac{d}{dt}$ をあてると $f = c + XP$ となる. □

パラメータ剛性を持つ流れの例を見てみよう．$v \in \mathbb{R}^n$ に対しトーラス $\mathbb{T}^n = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n$ 上の流れ $\{T_v^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $T_v^t([x]) = [x + tv]$ で定める．$v \in \mathbb{R}^n$ が **Diophantus** 条件を満たすとは，ある $\alpha > 0$ と $C > 0$ が存在して，すべての $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ に対して

$$|\langle m, v \rangle| \geq C\|m\|^{-\alpha}$$

が成り立つことをいう.

定理 0.10. 次は同値.

1. $\{T_v^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ がパラメータ剛性を持つ.
2. v は Diophantus 条件を満たす.

証明. 2⇒1 のみ示す. 系 0.9 の条件を確かめる. $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ の Fourier 級数展開を

$$f([x]) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i\langle m,x\rangle}$$

とすると, すべての $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} \|m\|^N |a_m| = 0$$

となる. (f が C^∞ 級であるための必要十分条件.)

$\{T_v^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の定めるベクトル場を X とし, 微分方程式 $f = c + XP$ を考える.

$$P([x]) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b_m e^{2\pi i\langle m,x\rangle}$$

とおくと

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i\langle m,x\rangle} = c + \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b_m 2\pi i\langle m,v\rangle e^{2\pi i\langle m,x\rangle}$$

より

$$c = a_0,$$

$$b_m = \frac{a_m}{2\pi i\langle m,v\rangle} \quad (m \neq 0).$$

Diophantus 条件を使うと任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|m\|^N |b_m| \leq \frac{1}{2\pi C}\|m\|^{N+\alpha}|a_m| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

となるので P は C^∞ 級で $f = c + XP$ を満たす. P を実数値にするには実部を取ればよい. □

コンパクト多様体上のパラメータ剛性を持つ流れの例はトーラス上の Diophantus 条件を満たす流れしか見つかっておらず, 共役を除いてこれしかないだろうと予想されている. 実際 3 次元では正しいことが最近証明された.

参考文献

[1] L. Flaminio and G. Forni. *Invariant distributions and time averages for horocycle flows.* Duke Math. J. **119** (2003), 465–526.

[2] A. Katok and R. J. Spatzier. *First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity.* Publ. Math. IHES **79** (1994), 131–156.

[3] S. Matsumoto and Y. Mitsumatsu. *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 1839–1866.

[4] D. Mieczkowski. *The first cohomology of parabolic actions for some higher-rank abelian groups and representation theory.* J. Mod. Dyn. **1** (2007), 61–92.

[5] N. M. dos Santos. *Parameter rigid actions of the Heisenberg groups.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **27** (2007), 1719–1735.