

結び目の thin position について

小谷 賀子*

奈良女子大学大学院 人間文化研究科博士前期課程 数学専攻 2 回

城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました。自分にとって大変良い刺激となり、運営委員の方をはじめ関わった皆様に変感謝いたします。この報告書では、結び目の thin position について自分が勉強したことをいくつか書きたいと思います。

1 橋数と width

任意の結び目に対し、橋数 (bridge number) というものが一意に定まります。そして2つの結び目の連結和において、その橋数に関するいくつかの自然な等式が成り立ちます。また、任意の結び目に対し、橋数の概念を一般化したものである width というものがあります。橋数について成り立つことは、width にも自然に拡張し得るであろうと予想ができます。

以下、 K を S^3 に埋め込まれた連結な一次元多様体 (結び目)、 h を S^3 から R への極大値、極小値を1つずつ持つような Morse 関数とします。また $h|_K$ は K 上の Morse 関数になっているとします。

定義 1.1. 橋数 (bridge number)

K の全ての埋め込みの中で $h|_K$ における極大値の最小個数を、その結び目 K の橋数 (**bridge number**) といい、 $b(K)$ と表す。

定義 1.2. (width)

$c_1 > c_2 > \dots > c_n$ を $h|_K$ における極値たちとし、 r_i を $c_i > r_i > c_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) となるようにとり、 $\sum_{i=1}^{n-1} |K \cap h^{-1}(r_i)|$ を h に関する K の **width** と呼ぶ。全ての埋め込みの中で最小の width のことを K の width といい、 $w(K)$ で表す。また、 h に関する K の width が $w(K)$ に一致するとき K は **thin position** にある、という。

一般に結び目 K の橋数、width を確定するのは難しい問題です。

橋数に関して、以下のような定理があります。

定理 1.3. (Schubert)

任意の二つの結び目 K_1, K_2 に対し、次が成り立つ。

$$b(K_1 \# K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1$$

ここで、 $\#$ は連結和を表す。

この橋数に関する定理を width に拡張すると、以下の予想が期待されます。

予想 1.4. (Scharlemann-Thompson [1])

$$w(K_1 \# K_2) = w(K_1) + w(K_2) - 2$$

* jay_kodani@cc.nara-wu.ac.jp

この予想において、一方の結び目をもう一方の結び目の上方において連結和させることにより、 \geq は明らかです。

次に、 R^3 内に埋め込まれた任意の結び目と、knot していないソリッドトラス内に埋め込まれた結び目の合成に関する不等式をもう一つ紹介します。

定義 1.5. K_1 を S^3 内に埋め込まれた結び目、 \tilde{V} を K_1 の小さな閉正則近傍とし、 \hat{V} を S^3 内の結び目 K_2 を含んでいるような knot していないソリッドトラスとする。

いま \hat{V} から V への同相写像を一つ固定する。この時、この写像による K_2 の像は S^3 内の結び目になっている。この結び目を K で表す。このとき、 K を **satellite knot**、 K_1 を K の **companion knot**、 V を K_1 に関する K の **companion torus** と呼び、 (\hat{V}, K_2) を、 K_1 に関する K のパターンと呼ぶ。また K_2 と \hat{V} のメリディアンディスクが交わる回数の最小値 k をそのパターンの **index** という。

特に index が 1 であるような特別な場合においては、この構成は K_1 と K_2 の連結和を与えることに注意する。

このとき以下のような不等式が成り立ちます。

定理 1.6. (Schubert)

上記の記号の下、次が成立する。

$$b(K) \geq k \cdot b(K_1)$$

この定理に関し、Schubert のオリジナルの証明よりずっと簡明な証明が Schultens [2] によって与えられています。以下でその Schultens による証明の概略を述べたいと思います。

まずいくつか用語を用意します。

以下 $T = \partial V$ とし、また $h|_T$ は T 上の Morse 関数になっているとします。

定義 1.7. K がホモトピー的非自明に V に含まれており、 h_K が $b(K)$ 個の極大値を持つという条件下で $h|_T$ の極値の個数の最小値を実現しているとき、 V は $b(K)$ に関して **taut** であるという。

定義 1.8. \mathcal{F}_T を h_T から誘導される T の singular foliation とする。このとき saddle singularity に対応する \mathcal{F}_T の leaf をサドルと呼び、 σ で表す。このとき σ は wedge $s_1 \cup s_2$ という形をしている、但し s_1, s_2 はある単純閉曲線を表す。

s_1 または s_2 の少なくとも一方が T において非本質的なき、サドル σ は非本質的である、という。またそうでないときサドル σ は本質的であるという。

定義 1.9. $\sigma = s_1 \cup s_2$ を本質的サドルとする。このとき σ より少し上又は下にある level surface L と T の交わり成分 c_1, c_2 で、 c_1 と s_1 、 c_2 と s_2 はそれぞれ T 上の円環を bound するようなものがとれる。この c_1 と c_2 が L 上で bound する円環を考えて、この L 上の円環における $c_1 \cup c_2$ のカラーが V に含まれているとき、サドル σ は **nest** している、という。

証明の概略に入ります。まず次の 3 つの補題を紹介します (証明はここでは省略します)。

補題 1.10. (The Pop Over Lemmma)

もし \mathcal{F}_T が非本質的サドルを含むならば、 $b(K)$ と h_T をそれらの極値の個数を変えないようなイソトピーで動かす、以下を満たすような非本質的サドルが存在するようになる。

s_1 は次のような T 内の disk D_1 をバウンドする。

- \mathcal{F}_T を D_1 に制限すると、共通部分を持たない円たちと 1 つの極大 (小) 値を含む。

- σ を含む h の level surface L に対し、 D_1 は円板 $\tilde{D}_1 \subset (L - T)$ とともに、次の条件を満たすような 3次元球体 B をバウンドする。

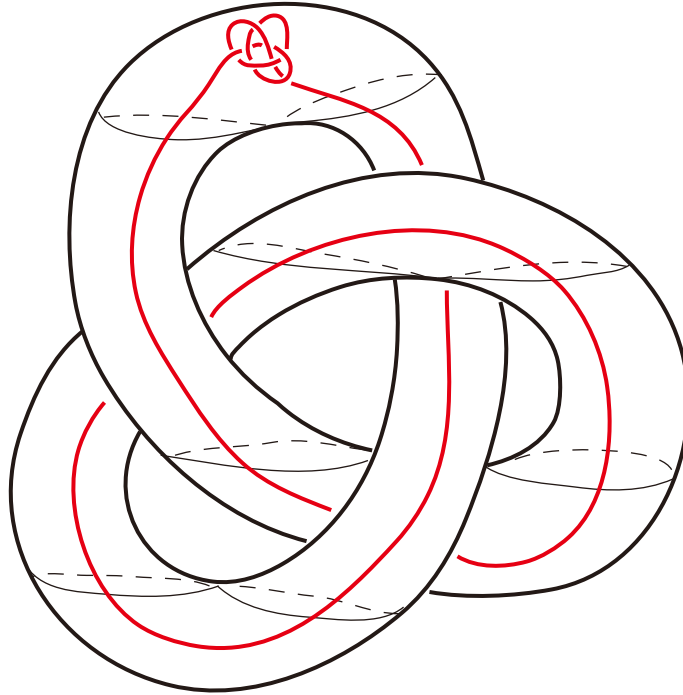
B は $\infty(-\infty)$ を含まず、 s_2 は B と共通部分を持たない。

補題 1.11. V が $b(K)$ に関して taut ならば \mathcal{F}_T における非本質的サドルは存在しない。

補題 1.12. V が $b(K)$ に関して taut であるならば \mathcal{F}_T は nest したサドルを持たない。

上記の 3つの補題を使って satellite knot が minimal bridge であるという条件を保ちつつ companion torus は非本質的サドルを持たないようにでき、更にこの companion torus の bound するソリッドトーラスはいくつかの円柱成分とひざ型成分たちのみからなるようにできます。また全て本質的なサドルなので、トーラスのサドルからトーラスの極値に一対一対応をつけることができます。また satellite knot K を結び目の極値の個数を変えないようなイソトピーで動かし、ソリッドトーラスを構成する成分たちのうち、円柱部分には K の極値は存在せず、一つを除いて全てのひざ型成分ではちょうど k 個の極値が存在するようにできます。ここまでできればあとは容易ですが、詳細は省略します。

特に index $k = 1$ の時の状況を以下に図示します。



今後、結び目やタングルにおいて thin position のがどれくらい有効な不変量になりうるのかなどを勉強、研究していきたいと思っています。

参考文献

- [1] M. Scharlemann, A. Thompson, *On the additivity of knot width*, ArXiv preprint math. GT/0403326.
- [2] J. Schultens, *Additivity of Bridge Number of Knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **135** (2003), 539-544.