反復積分への誘い：de Rham 理論の拡張として

伊藤哲也*

東京大学数理科学研究科　博士一年、2010 年

この報告集では反復積分の基本について、講演中では詳しく触れられなかったので、簡単な解説を行い、あまり知られていないが魅力的なこの理論への案内としたい。特にこの記事では、細かい証明に立ち入ることなく、反復積分の理論が良く知られた Rham 理論などの自然な拡張であることを説明する。反復積分の理論に興味を持たれた方は、最近出版された教科書 [?] などを読まれるとよいだろう。

1 Chen's Iterated integral theory

1.1 De Rham 理論

まず、古典的な de Rham 理論を積分の観点から復習する。M を連結 C^∞-多様体とし、M の de Rham 複体を $A^*_{DR}(M)$、そのコホモロジーを $H^*_{DR}(M)$ とする。以下、$\Delta^k = \{(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le 1\}$ を k-単体とする。

(滑らかな)M の特異単体 $\sigma : \Delta^k \to M$ に沿った q-form ω の積分 $\int_\sigma \omega$ は、次のように定義される。

$$\int_\sigma \omega \overset{Def}{=} \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

これにより、(滑らかな) M の特異チェイン複体と M の de Rham 複体との間の pairing

$$\int : C_*(M; \mathbb{R}) \otimes A^*_{DR}(M) \to \mathbb{R}, \quad \sigma \otimes \omega \mapsto \int_\sigma \omega$$

が定まる。さらに Stokes の定理を用いることで、チェインに沿った積分は M の $\mathbb{R}$ 係数特異ホモロジーと M の de Rham コホモロジーとの間の pairing

$$\int : H_*(M; \mathbb{R}) \otimes H^*_{DR}(M) \to \mathbb{R} \quad [\sigma] \otimes [\omega] \mapsto \int_\sigma \omega \tag{1.1}$$

を定めることがわかる。De Rham の定理は、このようなチェインに沿った積分により与えられる pairing が非退化であることを述べている。

定理 1.1 (de Rham の定理)**.** Pairing は非退化である。したがって、チェインに沿った積分により、同型

$$H^*_{DR}(M; \mathbb{R}) \to Hom(H_*(M); \mathbb{R}) \cong H^*(M; R)$$

が与えられる。

次数 1 の de Rham コホモロジー $H^1_{DR}(M)$ は閉 1 -form のなす空間と同一視されるので、上の定理は標語的には、「closed な『1 個』の微分形式の積分から、(コ) ホモロジーの情報が得られる」と述べられる。Chen の反復積分の理論は、「closed な『k 個』の微分形式の積分から、ホモトピーの情報を得る」理論であり、de Rham の定理の自然な拡張の一つであると捉えることができる。

*tetitoh@ms.u-tokyo.ac.jp

1.2 1-form の反復積分と基本群

前節で定義した、チェインに沿った微分形式の積分を 1-form の場合に拡張する。

定義 1.2. M の 1-form $\omega_1, \ldots, \omega_k$ の path $\gamma : I \to M$ に沿った反復積分を

$$\int_\gamma \omega_1\omega_2\cdots\omega_k \overset{Def}{=} \int_{\Delta^k} \alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2)\cdots\alpha_k(t_k)dt_1\cdots dt_k$$

により定める。ここで α_i は ω_i の γ による引き戻し $\gamma^*\omega_i = \alpha_i(t)dt$ で定める。

上の定義は、$k=1$ の時は 1-チェインに沿った積分（1-form の線積分）と一致することに注意しよう。2.2 節で説明するように、反復積分は微分方程式の解の逐次近似など、他の分野で自然に現れる形の積分である。

反復積分により、M のループ空間 ΩM と 1-form k 個以下の tensor product のなす空間 $T^kA^1_{DR}(M) = \bigoplus_{i=1}^k [A^1_{DR}(M)]^{\otimes k}$ の間の pairing

$$\int : \Omega M \otimes T^kA^1_{DR}(M) \to \mathbb{R}, \quad \gamma \otimes (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_l) \mapsto \int_\gamma \omega_1\cdots\omega_l$$

が任意の $k > 0$ に対して定まる。今、通常の 1-form 同様に、“closed form”の概念が 1-form を多数テンソル積したもの $T^kA^1_{DR}(M)$ の元に対しても定義できる[1]。de Rham コホモロジーと同様の記法を用いて、$H^0(T^kA^1_{DR}(M))$ を closed form 全体と書くことにすると[2]、通常の積分と同様に、この反復積分による pairing はホモトピー群（基本群）の群環との pairing

$$\int \mathbb{R}\pi_1(M) \otimes H^0(T^kA^1_{DR}(M)) \to \mathbb{R}, \quad [\gamma] \otimes [\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k] \mapsto \int_\gamma \omega_1\cdots\omega_k$$

を定める。Chen の基本定理はこの pairing が基本群の豊富な情報をもっていることを示している。

定理 1.3 (Chen の基本定理)**.** 反復積分による pairing は非退化な pairing

$$\int : \mathbb{R}\pi_1(M)/J^{k+1} \otimes H^0(T^kA^1_{DR}(M)) \to \mathbb{R}$$

を定める。ここで J は群環 $\mathbb{R}\pi_M$ の添加イデアルである。したがって、反復積分により同型

$$\int : H^0(T^kA^1_{DR}(M)) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}\pi_M/J^k, \mathbb{R})$$

が定まる。

特別な場合として、$k=1$ の時を考えると、$\mathbb{R}\pi(M)/J^2 = H_1(M;\mathbb{R})$, $H^0(T^1A^1_{DR}(M)) = H^1_{DR}(M)$ なので、上の定理は de Rham の定理となる。したがって、上の定理は de Rham の定理の拡張と見ることができる。

2 Formal homology connection

この章では、少し異なる立場から反復積分の理論を眺め、反復積分と平坦バンドルのホロノミー表現のかかわりを述べる。特に、反復積分と微分方程式の関係について簡単に解説する。

[1] ここで言う $T^kA^1_{DR}(M)$ が “closed” と言う概念は通常の 1-form の場合と多少異なる。non-closed な 1-form のテンソル積が “closed” となることもある。

[2] 実際に、微分 d を定義して、あるコチェイン複体（de Rham 複体の bar complex）の 0 次コホモロジーとしてきちんと定式化できる。

2.1 Holonomy representation of flat bundle

まず微分幾何などで現れる平坦バンドルのホロノミー表現が反復積分を用いて書けることを説明する。平坦接続や、そのホロノミーなどのより詳細な定義については適当な微分幾何の本などを参照してほしい。

$E = M \times \mathbb{R} \to M$ を M 上の自明な $\mathbb{R}$-bundle とする。E の平坦接続を一つ定める。E は自明なバンドルなので、グローバルな接続形式 $\omega \in A^1_{DR}(M)$ が定まる。接続が平坦であるという条件は、接続形式 ω を用いると

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0$$

と書ける。今、M のループ $\gamma : I \to M$ に対し、γ の水平なリフト $\widetilde{\gamma} : I \to E = M \times \mathbb{R}$ で、$\widetilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), 1)$ となるものが一意に定まる。ここで写像 $\widetilde{\gamma}$ が水平なリフトであるとは、ω の γ による引き戻しを $\gamma^*\omega = \alpha(t)dt$ とし、$s = pr \circ \widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ としたとき、s は常微分方程式

$$\frac{d}{dt}s(t) + s(t)\alpha(t) = 0 \tag{2.1}$$

を満たすということである。(pr は射影 $pr : E = M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である。) 水平なリフトの終点における値を $\widetilde{\gamma}(1) = (\gamma(0), \Theta(\gamma))$ と置く。ω の定める接続が平坦接続である時、$\Theta(\gamma)$ の値は γ をホモトピーで変形しても不変であることが分かり、基本群の表現

$$\Theta : \pi_1(M) \to GL(\mathbb{R}, 1) = \mathbb{R}^\times$$

が得られる。これを平坦接続 ω に関する M の基本群のホロノミー表現と呼ぶ。

ここで、常微分方程式の解の存在と一意性の証明を思い出そう。常微分方程式の解の存在の証明は、逐次近似により解の近似列 $\{s_i(t)\}$ を

$$\begin{cases} s_0(t) = 1 \\ s_i(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t s_{i-1}(t')\alpha(t')dt' \end{cases} \tag{2.2}$$

と作り、この近似列が $i \to \infty$ の時常微分方程式 (**??**) の解に一様収束することを示すことで行われた。今この近似列 $\{s_i(t)\}$ を具体的に計算していくと、

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 1 + \int_0^t \alpha(t_1)dt_1 \\ s_2(t) &= 1 + \int_0^t \alpha(t_1)\left(1 + \int_0^{t_1} \alpha(t_2)dt_2\right)dt_1 = 1 + \int_0^t \alpha(t_1)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} \alpha(t_1)\alpha(t_2)dt_2dt_1 \end{aligned}$$

となることが分かる。上の式において、$t = 1$ とすると、反復成分の定義より、$s_1(t), s_2(t)$ の値は反復積分の記号を用いて

$$\begin{aligned} s_1(1) &= 1 + \int_0^1 \alpha(t_1)dt_1 = \int_\gamma \omega \\ s_2(1) &= 1 + \int_0^1 \alpha(t_1)dt_1 + \int_0^1 \int_0^{t_1} \alpha(t_1)\alpha(t_2)dt_2dt_1 = 1 + \int_\gamma \omega + \int_\gamma \omega\omega \end{aligned}$$

と書けることが分かる。以下、同様の計算を続けることにより一般の $s_i(1)$ は反復積分を用いて

$$s_i(1) = 1 + \sum_{j=1}^{i} \int_\gamma \underbrace{\omega\omega\cdots\omega}_{j \text{ times}} \tag{2.3}$$

と書けることが示される。以上より次の定理を得る。

定理 2.1. ω を接続形式とする M 上の自明な平坦 $\mathbb{R}$ バンドルのホロノミー表現 $\Theta : \pi_1(M) \to \mathbb{R}^\times$ は

$$\Theta([\gamma]) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_\gamma \underbrace{\omega\omega\cdots\omega}_{y \text{ times}}$$

と、反復積分の無限和により表される。

このように、反復積分はある種の微分方程式の解の表示として自然に現れる。また、このような微分方程式の解の反復積分表示から、反復積分の理論を通していくつかの特殊関数（多重対数関数など）の値の間の関係式などを導くこともできる。

2.2 Formal homology connection の定義

では、次にホロノミー表現の反復積分表示を一般化する。以下、$H_{\geq 1}(M;\mathbb{R})$ は有限次元と仮定し、その $\mathbb{R}$-ベクトル空間の基底 $X_1,\ldots,X_m$ を $X_i \in H_{q_i}(M;\mathbb{R})$ となるようにとる。$X_1,\ldots,X_m$ を変数とする $\mathbb{R}$ 係数非可換形式的ベキ級数環を $\mathcal{R}$ とする。$\mathcal{R}$ には、$\deg X_i = q_i - 1$ と次数を定める。$\widehat{J}$ を $\mathcal{R}$ の添加イデアル（定数項が 0 となる形式的ベキ級数全体）とする。$\delta:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ を次数 1 の Derivation とする。つまり、δ は次数を 1 下げる線形写像で、Leibniz 則

$$\delta(uv) = (\delta u)v + (-1)^{\deg u}u(\delta v)$$

を満たし、$\delta(X_j)\in\widehat{J}^2$ となるものである。$\omega = \sum \omega_{i_1\cdots i_k}X_{i_1}\cdots X_{i_k}$ を $A^*_{DR}(M)$ を係数とする非可換形式的ベキ級数であり、$\omega_{i_1\cdots i_k}\in A_{DR}^{q_{i_1}+\cdots+q_{i_k}-k}(M)$ となるものする。

定義 2.2. 組 (δ,ω) が平坦条件

$$d\omega + \omega\wedge\omega = \delta\omega \tag{2.4}$$

を満たすとき、 formal homology connection と呼ぶ。

上で与えられた平坦条件は、通常のベクトルバンドルの接続の平坦条件の（非可換化した）拡張とみなせる。

$\mathcal{R}$ の次数ゼロの部分を $\mathcal{R}_0$ とする。次数 1 のホモロジー群 $H_1(M;\mathbb{R})$ の基底を $X_1,\cdots,X_l$ とすると、$\mathcal{R}_0$ は $X_1,\cdots X_l$ を変数とする形式的ベキ級数環と同一視される。Formal homology connection(ω,δ) に対し $\mathcal{N}=\mathcal{R}_0\cap\mathrm{Image}\,\delta$、$\omega_0$ を ω の次数ゼロの部分とする。$\omega_0=\sum_I \omega_I X_I$ とする。ここで $I=i_1i_2\cdots i_k$ は多重指数で、$X_I = X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}$ である。次数についての条件より、各 X_i は $H_1(X;\mathbb{R})$ の元であり、ω_I は M の 1-form となる。

定義 2.3. 写像 $\Theta:\mathbb{R}\pi_1(M)\to\mathcal{R}_0/\mathcal{N}$ を

$$\Theta([\gamma]) = \left[1+\sum_{k>0}\int_\gamma \underbrace{\omega_0\omega_0\cdots\omega_0}_{k\text{ times}}\right] = \left[1+\sum_{I_1\cdots I_k}\left(\int_\gamma \omega_{I_1}\cdots\omega_{I_k}\right)X_{I_1}\cdots X_{I_k}\right]$$

により定める。これを（普遍）ホロノミー写像と呼ぶ。

上で与えたホロノミー写像が 2.1 節で与えた通常のホロノミー表現と同じ形をしていることに注意しよう。

こうして構成されたホロノミー写像は、平坦接続のベキ零ホロノミー表現 $\rho:\pi_1(M)\to GL(n;\mathbb{R})$ （ホロノミー表現の中で、ベキ零となるもの全体）の普遍表現となることが示されている。すなわち、任意のベキ零ホロノミー表現 $\rho:\pi_1(M)\to GL(n;\mathbb{R})$ に対して、$\widetilde{\rho}\circ\Theta=\rho$ となるような写像 $\widetilde{\rho}:\mathcal{R}_0/\mathcal{N}\to GL(n;\mathbb{R})$ が存在する。

このことを基本群の言葉で書くと、次の定理を得る。

定理 2.4 (Chen)**.** 普遍ホロノミー写像 $\Theta:\mathbb{R}\pi_1(M)\to\mathcal{R}_0/\mathcal{N}$ に対し、$\mathrm{Ker}\,\Theta=\bigcap_{i\geq 0}J^i$ である。

3 群の両側普遍順序

講演では、講演では、反復積分から多様体の基本群の両側不変順序が構成できることを示し、純組みひも群の順序が有限型不変量を用いて与えられることなどを示した。ここでは簡単に講演の内容を振り返る。

定義 3.1. 群 G 上の全順序 $<$ に対し、全順序 $<$ が群 G 自身の右作用、左作用両方に対して不変であるとき、つまり、$f < h \Rightarrow gfg' < ghg'\ \forall g, g'f, h \in G$ が成り立つとき、$<$ を群 G の両側不変順序と呼ぶ。また、群 G が両側不変順序 $<$ を持つとき、G は両側順序付け可能であると呼ぶ。

すべての群が両側順序付け可能であるわけではない。例えば、両側順序付け可能な群はねじれ元を持たない (g をねじれ元とする。$1 < g$ とすると $1 < g < g^2 < \cdots < g^N = 1$ となり矛盾。$1 > g$ の時も同様に矛盾が生じる。) 従って、両側順序付け可能な群は常に無限群である。

両側順序付け可能な群のクラスとして、Residually torsion free nilpotent 群が知られている。

定義 3.2. 群 G の群環 $\mathbb{Z}G$ の添加イデアルを J とする。$i > 0$ に対して、G の i-th dimension series D^iG とは $D^iG = \{g \in G \mid g - 1 \in J^k\}$ で定義される G の部分群の減少列である。dimensional series の無限個の交わり $\bigcap_{i>0} D^iG$ が自明となるとき、群 G は residually torsion free nilpotent であると呼ぶ。

では、residually torsion free nilpotent group に対して、両側不変順序を反復積分を用いて具体的に構成しよう。G を Residually torsion free nilpotent group として、M を $\pi_1(M) = G$ となる多様体とする。Chen の定理より、反復積分により作られる普遍ホロノミー写像 $\Theta : G = \pi_1(M) \to \mathcal{R}_0/\mathcal{N}$ の Kernel は $\bigcap_{i>0} D^iG$ となることが分かるので、G が residually torsion free nilpotent の時、ホロノミー写像 Θ は単射になる。

ホロノミー写像 Θ を用いて、G の両側普遍順序 $<$ を構成しよう。まず非可換形式的ベキ級数環 $\mathcal{R}_0$ 上に新しく次数を $\deg X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k} = k$ により定義する。これにより、$\mathcal{R}_0/\mathcal{N}$ にも次数が定まる[3]。

今、非可換代数 $\mathcal{R}_0/\mathcal{N}$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間と見て、順序のついた基底 $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を次数が non-decreasing となるようにとり (つまり、$i < j \Rightarrow \deg\, v_i \leq \deg\, v_j$ となるということ)、$\{v_i^* : \mathcal{R}_0/\mathcal{N} \to \mathbb{R}\}$ をその双対基底とする。代数 $\mathcal{R}_0/\mathcal{N}$ 上の全順序 $<$ を

$$A < B \Longleftrightarrow \{v_i^*(A)\} <_{Lex} v_j^*(B)$$

により定義する。ここで、$<_{Lex}$ は実数列の辞書式順序を表す。この順序を用いて、群 G 上の順序 $<_H$ を

$$a <_H b \Longleftrightarrow \Theta(a) < \Theta(b)$$

により定義する。Θ は単射なので、$<_H$ は全順序である。次が講演で述べた主定理である。

定理 3.3 (I)**.** 上で定義された全順序 $<_H$ は群 G の両側不変順序である。

証明は、G の 元 a に対して、$\Theta(a) = 1+$(Higher degree part) となること、及び次数に対する不等式 $\deg(xy) \geq \deg(x) + \deg(y)$ が成り立つことを示すことで行われる。

反復積分の理論は他の理論といろいろなところでつながっており、例えば、反復積分の理論は Sullivan,Quillen らの有理ホモトピー論における空間の代数的モデルとしてみることができる。この順序の構成のよいところは、反復積分を通して、他の理論と両側不変順序の間の関係が見えてくることである。例えば、pure braid group P_n については、ホロノミー写像 Θ は Knot の Kontsevitch invariant と呼ばれる不変量に対応する braid の不変量であり、双対基底 $\{v_i\}$ は braid の有限型不変量と呼ばれるものに対応する。特に、P_n の両側不変順序が braid の有限型不変量から定義されていることが観察される。

参考文献

[河野] 河野俊丈, 反復積分の幾何学, シュプリンガー現代数学シリーズ第 14 巻, （2009）

[I] Tetsuya Ito, *A geometric construction of bi-invariant orderings of groups*, In preparation.

[3] 一般には $\mathcal{N}$ は homogeneous な ideal ではないので、次数を $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ に定義するときには少し注意を要する