# サブリーマン多様体の位相的分裂定理

伊藤　和貴 *

東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程前期 2 年

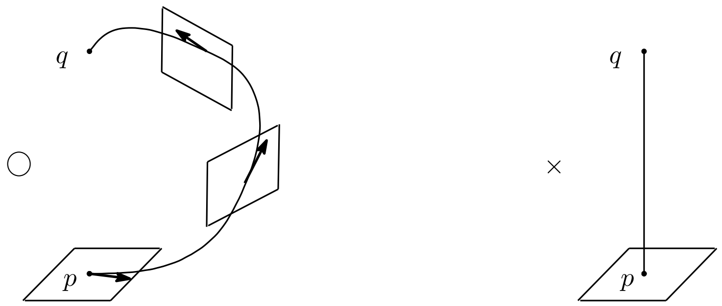
## 1　サブリーマン多様体

この記事では, 城崎新人セミナーでの発表内容に従い, サブリーマン多様体や測度収縮性質の紹介と修士論文の結果の説明をする. 主定理は第 3 節で述べる.

リーマン多様体では 2 点間の距離が, それらを結ぶ区分的に滑らかな曲線の長さの下限として定義されるが, この記事では $n$ 次元連結多様体 $M$ 上に正定値な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持つ分布 $\mathcal{D} \subset TM$ が与えられ, 2 点 $p, q \in M$ に対してそれらの距離 $d$ が次で与えられたものを考える.

$$d(p,q) := \inf_{c} \int_0^1 |\dot{c}(t)|\, dt.$$

ただし inf は $c : [0,1] \longrightarrow M$ は絶対連続, $c(0) = p$, $c(1) = q$, ほとんどすべての $t \in [0,1]$ で $\dot{c}(t) \in \mathcal{D}_{c(t)}$, という条件の下でとる [19].




しかし任意の分布 $\mathcal{D} \subset TM$ に対しては, この $d$ は一般には多様体として元から備わっている $M$ の位相と異なる位相を与えてしまうので, 次のヘルマンダー条件を考える.

**定義 1.1** ([13, 19] を参照)**.** $M$ を $n$ 次元多様体, $\mathcal{D} \subset TM$ を階数 $m$ の分布 $(m \leq n)$ とする. ある自然数 $r \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の点 $p \in M$ に対してそのまわりで $\mathcal{D}$ を張る一次独立なベクトル場の組 $X_1, \ldots, X_m$ の $r$ 回までのリーブラケットをとって得られるベクトル場たち,

$$X_1, \ldots, X_m, [X_i, X_j], \ldots, [X_{i_1}, [X_{i_2}, [\ldots, [X_{i_{r-1}}, X_{i_r}] \ldots]]]$$

$(i, j, \ldots, i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots m)$ の点 $p \in M$ での値で張られる部分空間が接空間 $T_pM$ に一致するとき, $\mathcal{D}$ はヘルマンダー条件を満たすという.

ヘルマンダー条件を満たす分布 $\mathcal{D}$ に対して, 次の定理が知られている.

---

* sa8m03@math.tohoku.ac.jp

**定理 1.2** (Chow-Rashevsky の定理 [3, 19, 20])**.** $M$ を $n$ 次元連結多様体とする. 分布 $\mathcal{D}$ がヘルマンダー条件を満たせば, $d$ は有限の値をとり, $M$ のもとの位相を与える.

この記事では $\mathcal{D}$ がヘルマンダー条件を満たすとき, 距離空間 $(M, \mathcal{D}, d)$ をサブリーマン多様体ということにする. サブリーマン多様体は古くから知られていた幾何学的概念であり, Dido の等周問題 [5, 19] や, Carnot の熱力学の研究 [4, 19] などと関連して研究されるようになった. $\mathcal{D} = TM$ とすると普通のリーマン多様体が得られるので, サブリーマン多様体はリーマン多様体を自明な例として含んでいるといえるが, 内積が分布 $\mathcal{D}$ 上でしか与えられないため, 一般に測地線のふるまいがリーマン多様体のものとは本質的に異なり, 現在でも基本的なことが知られていない [19]. 一方で, サブリーマン多様体の局所的な性質はよく研究されている. J. Mitchell [18], A. Bellaïche [3], G.A. Margulis and G.D. Mostow [17] らによって接錐の構造はよく調べられており, また, サブリーマン多様体の構造から曲率の概念がいくつも定義されている [1, 2, 10, 19]. しかしサブリーマン多様体の大域的な性質はあまり知られていない. この記事ではこれらの曲率とは異なる曲率 (定義 2.1 を参照) を定義して, サブリーマン多様体の大域的性質について調べて得た結果について述べる.

次にサブリーマン多様体上の測地線に関する基本事項を述べる. $(M, \mathcal{D}, d)$ を $\dim M = n$, $\operatorname{rank} \mathcal{D} = m$ のサブリーマン多様体とする. $(M, \mathcal{D}, d)$ 上の絶対連続曲線 $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ ($T > 0$ は実数) が測地線であるとは, 任意の $t \in [0, T]$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して, $\gamma|_{[t-\epsilon, t+\epsilon] \cap [0,T]}$ が 2 点を結ぶ最短線となることとする. ただし絶対連続曲線 $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ が最短線であるとは, ほとんどすべての $t \in [0, T]$ に対して $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ であって, $\int_0^T |\dot{\gamma}| \, dt = d(\gamma(0), \gamma(T))$ となることと定める. 任意の点 $p_0 \in M$ に対して, $p_0$ から出発する絶対連続な曲線 $c : [0, T] \longrightarrow M$ で, $t$ の関数 $|\dot{c}(t)|$ が 2 乗可積分であるものの集合を $\Omega([0, T], p_0 ; \mathcal{D})$ と書く. このとき endpoint map end: $\Omega([0, T], p_0 ; \mathcal{D}) \longrightarrow M$ を曲線 $c \in \Omega([0, T], p_0 ; \mathcal{D})$ に対して $\operatorname{end}(c) := c(T)$ と定める. $\Omega([0, T], p_0 ; \mathcal{D})$ に適切な微分構造を入れることで endpoint map は可微分写像となる [19].

**定義 1.3.** endpoint map の臨界点となる曲線を *singular curve* といい, それが測地線であるときに *singular geodesic*, 最短線であるときに *singular minimizer* という.

定値曲線は endpoint map の臨界点となるので, それ以外の臨界点を非自明な singular curve ということにする. サブリーマン多様体の測地線の中でも特に非自明な singular minimizer はふるまいが大変複雑で, 今のところよくわかっていないことが多いため, この記事では $(M, \mathcal{D}, d)$ は非自明な singular minimizer を含まないとする. 非自明な singular minimizer を含まないサブリーマン多様体のクラスでよく知られているものとして fat distribution から得られるクラスがある.

**定義 1.4.** 多様体 $M$ 上の分布 $\mathcal{D} \subset TM$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{D}$ を *fat distribution* という (*strong bracket-generating* とも言われる) [19]. $\mathcal{D}$ の局所枠を $X_1, \ldots, X_m$ とする. 任意の点 $p \in M$ と, $p \in M$ で 0 にならないような $\mathcal{D}$ に接する任意のベクトル場 $X$ に対して,

$$X_1, \ldots, X_m, [X_1, X], \ldots, [X_m, X]$$

の点 $p \in M$ での値で張られる部分空間が接空間 $T_pM$ に一致する.

接触分布は fat distribution である [19]. また, [8, 9] によると, 自然数 $n \geq 4$, $m \geq 3$ ($n \geq m$) と完備なリーマン多様体 $(M^n, g)$ に対して, 階数 $m$ の分布の集合に Whitney $C^\infty$ 位相を入れたものを $\mathcal{D}_m$ とすると, その稠密な開部分集合 $\mathcal{O}_m$ が存在して, $\mathcal{O}_m$ の任意の元に $g$ を制限して得られる内積を与えてサブリーマン多様体 $(M, \mathcal{D}, d)$ を考えると, $(M, \mathcal{D}, d)$ は非自明な singular minimizer を含まない [11].

サブリーマン多様体にはリーマン多様体のときのような標準的な接続の概念がないため, 一般には測地線の方程式を曲線の座標 $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ の時間についての 2 階の常微分方程式で書けない. しかし, 以下のようにしてサブリーマン計量に適合したハミルトン関数を考えることで, リーマン多様体の時のように余接束の上のハミ

ルトン方程式を測地線の方程式と考えて, 指数写像を定義することができる ( R. Montgomery [19]).

任意の点 $p \in M$ に対して線形写像 $g_p : T_p^*M \longrightarrow \mathcal{D}_p$ を任意の $v \in \mathcal{D}_p$, $\xi \in T_p^*M$ に対して $\langle g_p(\xi), v\rangle_p := \xi(v)$ と定める. $\mathcal{D}_p$上の計量をこの線形写像を使って, 任意の $\xi, \eta \in T_p^*M$ に対して $(\xi, \eta)_p := \langle g_p(\xi), g_p(\eta)\rangle_p$として余接空間 $T_p^*M$ 上の退化計量 $(\cdot,\cdot)_p$ に持ち上げる. $H(\xi) := (\xi, \xi)_p/2$ とすれば $H$ は余接束 $T^*M$ 上の関数を定める. $T^*M$ 上には標準的なシンプレクティック形式があるので, $H$ をハミルトン関数としてハミルトンベクトル場 $\vec{H}$ が決まる. 任意の$\xi_0 \in T^*M$ に対して $\xi_0$ を初期値とするハミルトン方程式 $\dot{\xi}(t) = \vec{H}_{\xi(t)}$ の解 は一意に存在するので, 任意の点 $p \in M$ に対して指数写像 $\exp_p : T_p^*M \longrightarrow M$ を, 任意の $\xi_0 \in T_p^*M$ に対してこれを初期値とするハミルトン方程式の解 $\xi(t)$ によって, $\exp_p \xi_0 := \pi \circ \xi(1)$ と定めることができる. ただし $\pi : T^*M \longrightarrow M$ は余接束の標準的な射影である. $M$ 上の曲線 $\pi \circ \xi(t)$ は必ず測地線になっている [19]. この測地線を *normal geodesic* という.

**注意 1.5.** 一般にはサブリーマン多様体の測地線であって, normal geodesic でないものが存在する. そのような測地線はリーマン多様体の測地線とはふるまいが本質的に異なり, 一般に滑らかであるかどうかさえ知られていない [19]. この記事では非自明な singular geodesic は存在しないと仮定しているので, すべての測地線が normal geodesic である [19]. normal geodesic $\exp_p(\,\cdot\,\xi_0) : [0, T] \longrightarrow M$ ($T > 0$ は実数) に対して, $\pi \circ \xi(\cdot) = \exp_p(\,\cdot\,\xi_0)$ を満たすハミルトン方程式の解を $\xi(t)$ とするとき, $\xi(t)$ を $\exp_p(t\xi_0)$ の余接束 $T^*M$ へのリフトという.

サブリーマン多様体の最小跡についての注意を述べる.

**定義 1.6.** 任意の点 $p \in M$ に対して, 点 $q \in M$ が $p$ の最小点 (cut point) でないとは, ある正の数 $\delta > 0$ と, 点 $q' \in M$ と, 2 点 $p, q'$ を結ぶ最短線 $\gamma : [0, d(p, q) + \delta] \longrightarrow M$ で $\gamma(0) = p$, $\gamma(d(p, q)) = q$, $\gamma(d(p, q) + \delta) = q'$ を満たすものが存在することと定める. $p$ とすべての最小点を集めてできる集合を最小跡 (cut locus) と呼び $\mathrm{Cut}(p)$ と書く.

**注意 1.7.** この記事では, $M$ に非自明な singular minimizer は存在しないと仮定しているので, L. Rifford and E. Trélat [25], A. Figalli and L. Rifford [11] より, 任意の点 $p \in M$ に対して $M$ 上の関数 $r_p(\cdot) := d(p, \cdot)$ は $M_p := M - \mathrm{Cut}(p)$ 上で 1 回微分可能で, $\mathrm{Cut}(p)$ のハウスドルフ次元は $n - 1$ である. R. Montgomery [19, Theorem 2.17] より, サブリーマン多様体 $(M, \mathcal{D}, d)$ のハウスドルフ次元は $n$ 以上で, $M$ 上のルベーグ測度 $\mu$ は局所的にハウスドルフ測度と互いに絶対連続なので, $\mu(\mathrm{Cut}(p)) = 0$ である. この記事において多様体 $M$ 上のルベーグ測度 $\mu$ とは, 各座標近傍の通常のルベーグ測度について絶対連続であり, 密度関数が滑らかな $M$ 上の測度のこととする.

サブリーマン多様体の例をひとつ挙げる.

**例 1.8.** $M = \mathbb{R}^3$, 二つのベクトル場 $X_1 := (1, 0, -y/2)$, $X_2 := (0, 1, x/2)$ をとって $X_1, X_2$ が生成する分布を $\mathcal{D}$ とすると, $\mathcal{D}$ はヘルマンダー条件を満たす. $\mathcal{D}$ には $X_1, X_2$ が正規直交枠となるような正定値内積を与える. ただし $X_1, X_2$ の定義式の $(\cdot,\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^3$ の座標を表す. このようにして定められるサブリーマン多様体 $(M, \mathcal{D}, d)$ を 3 次元のハイゼンベルグ群という. $\mathbb{R}^3$ 上の演算を

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2,\, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1))$$

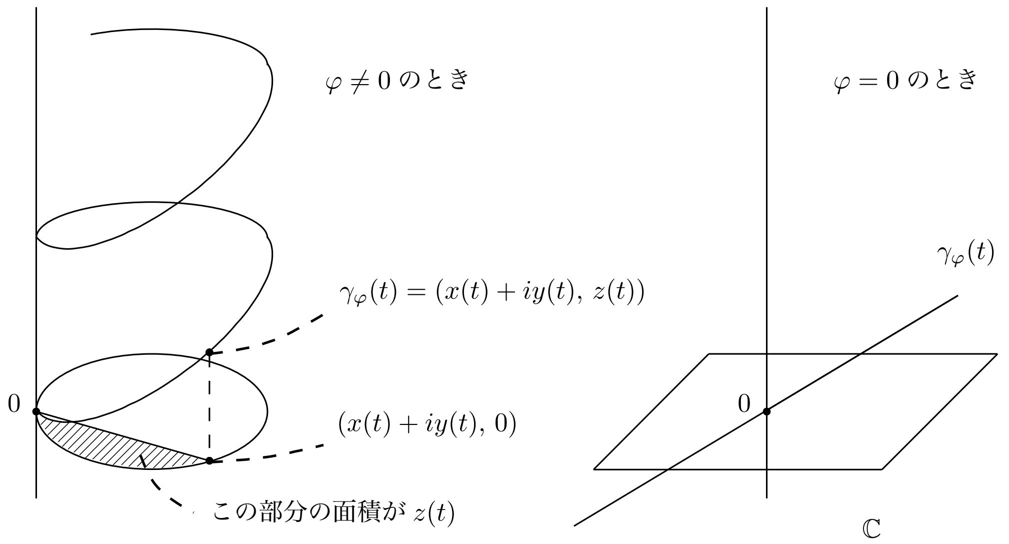
と定めると $M$ はリー群となり, $d$ はこの演算に関して左不変となる. 3 次元のハイゼンベルグ群はリーマン多様体でないサブリーマン多様体の中ではもっとも基本的でかつよく調べられているもので, 次のようにすべての測地線が具体的な式で書ける.

$d$ が左不変距離であることから, 原点 $(0, 0, 0)$ から出発する測地線についてわかれば十分である. $xy$-平面を

複素数平面 $\mathbb{C}$ として $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ とみなすと, 原点 $(0,0,0)$ から初期速度 $(v,0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ で出発する測地線 $\gamma_\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M$ は, $\varphi \in \mathbb{R}$ を族のパラメーターとする分だけ存在し, 次のような式で書ける [15].

$$\gamma_\varphi(t) = \begin{cases} \left( v \cdot \dfrac{e^{i\varphi t} - 1}{i\varphi},\ |v|^2 \left( \dfrac{\varphi t - \sin(\varphi t)}{2\varphi^2} \right) \right) & \varphi \neq 0 \text{ のとき} \\ (tv, 0) & \varphi = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし演算 $\cdot$ や絶対値 $|\cdot|$ は複素数平面のものとする. $\varphi \neq 0$ の式について $\varphi$ を固定したとき, $\gamma_\varphi(t) = (x(t) + iy(t),\, z(t))$ とすると, 次の絵のように $(x(t)+iy(t),\, 0)$ は複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の原点を通る円をえがき, $z(t)$ は原点と点 $(x(t)+iy(t),\, 0)$ を結ぶ線分と $(x(t)+iy(t),\, 0)$ がえがく円の弧とで囲まれる部分の面積に等しい.




$\varphi \neq 0$ のときは $\gamma_\varphi$ は直線にはならない. $(x(t)+iy(t),\, 0)$ が円周上を 1 回転した後に最短性が失われてしまうからである. 一方 $\varphi = 0$ のときは $\gamma_\varphi$ は複素数平面上の原点を通る普通の意味の直線になるが, サブリーマン距離 $d$ の意味でも直線になっている. これらの測地線はすべて非自明な singular minimizer でない. 3 次元のハイゼンベルグ群の原点 0 の最小跡は $z$ 軸である. 3 次元のハイゼンベルグ群は多様体としての次元は 3 だが, ハウスドルフ次元は 4 である [19].

## 2　測度収縮性質

この節では測度収縮性質について, サブリーマン多様体での定義と一般の測度距離空間に対して測度収縮性質を仮定したときに成り立つ結果について簡単に触れる.

**定義 2.1** (測度収縮性質)**.** $\mu$ を $M$ 上のルベーグ測度とする. 任意の点 $p \in M$ をとり, $M$ 上の関数 $r_p$ を $r_p(\cdot) := d(p,\cdot)$, $p$ への縮小写像 $\Phi_p(\cdot,\cdot) : [0,1] \times M_p \longrightarrow M$ を $\Phi_p(t,q) := \exp_q(\,(t-1)\, d(r_p^2)_q)$ と定める. $d(r_p^2)$ は関数 $r_p^2$ の外微分を表す. 任意の実数 $\kappa \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 $s_\kappa(\cdot)$ を

$$s_\kappa(r) := \begin{cases} \sin(\sqrt{\kappa} r)/\sqrt{\kappa} & \text{if } \kappa > 0, \\ r & \text{if } \kappa = 0, \\ \sinh(\sqrt{|\kappa|} r)/\sqrt{|\kappa|} & \text{if } \kappa < 0. \end{cases}$$

と定める. 任意に二つの実数 $\kappa \in \mathbb{R}$, $N \in [1, \infty)$ を取る. $(M, d, \mu)$ が任意の非負値可測関数 $f : M \longrightarrow [0, +\infty)$,

点 $p \in M$, 実数 $t \in (0,1]$ に対して次を満たすときに, $\mathbf{MCP}(\kappa, N)$ を満たすという.

$$\int_{\Phi_p(t,\,M_p)} f \circ \Phi_p(t,\,\cdot)^{-1}(q)\, d\mu(q) \;\geq\; \int_M \frac{t\, s_\kappa(t\, r_p(q))^{N-1}}{s_\kappa(r_p(q))^{N-1}}\, f(q)\, d\mu(q).$$

**注意 2.2.** (1) $\Phi_p(\cdot, q) : [0,1] \longrightarrow M$ は, 2 点 $p, q \in M$ を結ぶ定速度 $d(p,q)$ のただ一つの最短線である.

(2) $(M, \mathcal{D}, d)$ には非自明な singular geodesic が存在しないと仮定したため, 任意の $t \in (0,1]$ に対して, $\Phi_p(t, \cdot) : M_p \longrightarrow M$ は単射である [14].

(3) $M$ が $n$ 次元リーマン多様体の時は, $d$ をリーマン距離に, $\mu$ を標準的なリーマン体積に, $N = n$ と取ることで, $\mathrm{MCP}(\kappa, N)$ はリーマン多様体におけるリッチ曲率 $\kappa$ 以上の条件と同値である [21].

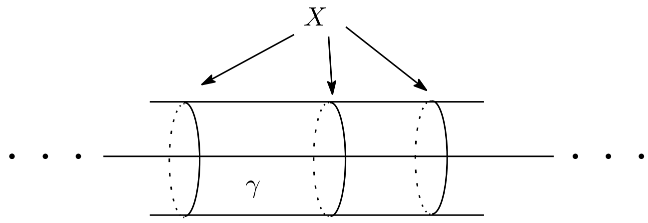
(4) 第 1 節で述べた 3 次元のハイゼンベルグ群は, $\mathbb{R}^3$ のルベーグ測度について $\mathrm{MCP}(0,5)$ を満たす [15]. 多様体としては 3 次元で, ハウスドルフ次元は 4 であるが, $\mathrm{MCP}(0,3)$ や $\mathrm{MCP}(0,4)$ は満たさない [15].

この記事で使われる $\mathrm{MCP}(\kappa, N)$ は, J. Cheeger and T.H. Colding [6] による距離球面の平均曲率の比較定理や, Bishop-Gromov の不等式 [12] などのリッチ曲率に対する深い考察をもとに, リッチ曲率がある定数 $\kappa \in \mathbb{R}$ で下から一様に評価されている, という条件を測度と距離の言葉で定義した概念である. この記事ではサブリーマン多様体上での定義しか述べていないが, より一般の測度距離空間に対して, 最適輸送問題の枠組みで定義することができる [21, 22, 26]. 測度収縮性質の幾何学的な性質は太田氏によって研究されている [21, 22]. その他にも, 測度収縮性質は一般の測度距離空間上で解析的に重要なポアンカレの不等式を導く [23, 24], 空間列の収束について安定である, 確率論的に良い条件を導く [26], などといったことが示されている.

## 3 分裂定理

この節では主定理を述べる. 第 2 節で述べた測度収縮性質は, リーマン多様体におけるリッチ曲率を下から評価する条件の一般化であるため, リーマン幾何で知られる定理をこの条件に置き換えてサブリーマン多様体上でのアナロジーを考えることができる. ここでは J. Cheeger と D. Gromoll による次の分裂定理を考える.

**定理 3.1** (J. Cheeger and D. Gromoll [7])**.** $(M, g)$ を非負リッチ曲率を持つ完備リーマン多様体とする. $(M, g)$ が直線 $\gamma$ を含めば, あるリーマン多様体 $X$ で, $M$ と直積リーマン多様体 $X \times \mathbb{R}$ とが等長同型となるものが存在する.




言葉の説明をする. 距離空間 $(X, d)$ 上の曲線 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow X$ が直線であるとは, 任意の実数 $a < b$ に対して $\gamma|_{[a,b]}$ が 2 点 $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ を結ぶ最短線になっている ( $\gamma|_{[a,b]}$ の長さ $= d(\gamma(a), \gamma(b))$ ) ことと定める. 曲線の定義域が半開区間 $[0, \infty)$ になっているときは半直線という. 直線 (あるいは半直線) $\gamma$ に対してブーズマン関数 $b_\gamma : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を点 $p \in X$ に対して $b_\gamma(p) := \lim_{t \to +\infty}(\, t - d(p, \gamma(t))\,)$ と定める. Cheeger-Gromoll の分裂定理は非負リッチ曲率を持つコンパクトリーマン多様体 $M$ の普遍被覆に適用することで, $M$ の基本群の構造を調べたり, $M$ の第 1 ベッチ数を評価する, などの重要な応用がある.

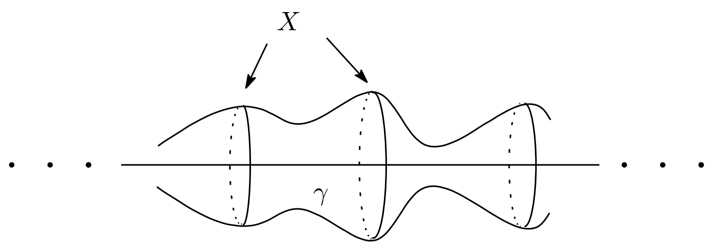
サブリーマン多様体上でのアナロジーの前に, 桑江氏と塩谷氏によるアレクサンドロフ空間上の位相的分裂定理の研究 [16] がある. アレクサンドロフ空間とは, 断面曲率が下から評価されたリーマン多様体の概念を距離空

間の言葉で一般化したものである．この論文では $\mathrm{MCP}(0,N)$ の仮定の下で, アレクサンドロフ空間に対しても Cheeger-Gromoll の分裂定理が弱い意味 (同相に分裂するという意味) で成り立つことが示されている. 等長に分裂すると予想されているが, 示されていない．このことから, サブリーマン多様体に対して $\mathrm{MCP}(0,N)$ を仮定したときに Cheeger-Gromoll の分裂定理が成り立つかどうか調べることは興味深いことである. 次に述べる主定理によるとサブリーマン多様体には, 微分同相に分裂して, 等長には分裂しないものがある.

**定理 3.2** (主定理 1)**.** $(M,\mathcal{D},d)$ を完備サブリーマン多様体とする．$M$ が非自明な singular minimizer を含まず, ルベーグ測度 $\mu$ とある実数 $N\in[1,\infty)$ に対して $\mathrm{MCP}(0,N)$ を満たし, 直線 $\gamma$ を含めば, そのブーズマン関数 $b_\gamma$ は滑らかで, $\nabla b_\gamma$ の積分曲線は直線であり, その 1 パラメーター変換群は $M$ と $b_\gamma^{-1}(0)\times\mathbb{R}$ の間の微分同相を与える.

**定理 3.3** (主定理 2)**.** $\mathrm{rank}\,\mathcal{D}=2$, $\dim M=3$, $N\in[1,\infty)$ とする．ルベーグ測度を備えた完備サブリーマン多様体 $(M,d,\mu)$ が非自明な singular minimizer を含まず, $\mathrm{MCP}(0,N)$ を満たせば, $M$ と $X\times\mathbb{R}$ とが距離空間として等長同型となるような距離空間 $X$ は存在しない.

第 1 節で述べた 3 次元のハイゼンベルグ群は非自明な singular minimizer を持たず [19], $\mathbb{R}^3$ のルベーグ測度について $\mathrm{MCP}(0,5)$ を満たす．これらのことから 3 次元のハイゼンベルグ群は定理 3.2 と定理 3.3 の仮定を満たすから, その任意の直線 $\gamma$ に対して直積多様体 $b_\gamma^{-1}(0)\times\mathbb{R}$ と微分同相になるが, 直積距離空間 $X\times\mathbb{R}$ と距離空間として等長同型になるような距離空間 $X$ は存在しない.




3 次元多様体上に接触分布を与えてサブリーマン距離を考えた時は, ある種のリッチ曲率の一般化の概念によって $\mathrm{MCP}(0,N)$ を与えるための十分条件が知られている ( A.A. Agrachev [1]). 3 次元のハイゼンベルグ群はこの条件を満たしている．一般に接触構造から得られるサブリーマン多様体は非自明な singular minimizer を含まない [19] ので, [1] にある条件を満たすようなサブリーマン多様体で直線 $\gamma$ を含むものは, 3 次元のハイゼンベルグ群と同じように直積多様体 $b_\gamma^{-1}(0)\times\mathbb{R}$ と微分同相になるが, 直積距離空間 $X\times\mathbb{R}$ と距離空間として等長同型になるような距離空間 $X$ は存在しない.

定理 3.2 の証明の大部分は [16] に従っており, サブリーマン多様体特有の性質は使っていないが, 定理 3.3 の証明には定義 1.1 のヘルマンダー条件を本質的に使う. 直感的には, ヘルマンダー条件によって分布 $\mathcal{D}$ がねじれるため, 対応する距離空間もねじれてしまって, きれいに分裂しない, と解釈できる. しかし, サブリーマン多様体 $(M,\mathcal{D},d)$ と $\mathbb{R}$ の直積サブリーマン多様体をとることで, $\mathrm{MCP}(0,N)$ を満たしていても等長に分裂してしまう例を構成することができるので, 一般にサブリーマン多様体の等長的分裂について論じるのは難しいと思われる.

## 4　最後に

この度は, 城崎新人セミナーで講演をさせていただきありがとうございました. 普段は交流のない他大学や他分野の皆さんと会話をし, 貴重な意見をいただくことができました. これからの研究の励みにしてがんばっていこうと思います.

この報告記事については, 定義や説明をまじめに書いたところ, 城崎新人セミナーの発表のときに略してし

まった分, 発表のときと異なる印象を与えてしまうかもしれません. 反省です.

## 参考文献


[1] A.A. Agrachev and P. Lee. Generalized Ricci curvature bounds for three dimensional contact subriemannian manifolds. *preprint*, 2009.

[2] F. Baudoin and N. Garofalo. Generalized Bochner formulas and Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds of rank two. *Arxiv preprint arXiv:0904.1623*, 2009.

[3] André Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In *Sub-Riemannian geometry*, volume 144 of *Progr. Math.*, pages 1–78. Birkhäuser, Basel, 1996.

[4] Ovidiu Calin and Der-Chen Chang. *Sub-Riemannian geometry*, volume 126 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. General theory and examples.

[5] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[6] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.*, 46(3):406–480, 1997.

[7] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *J. Differential Geometry*, 6:119–128, 1971/72.

[8] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat. Genericity results for singular curves. *J. Differential Geom.*, 73(1):45–73, 2006.

[9] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Emmanuel Trélat. Singular trajectories of control-affine systems. *SIAM J. Control Optim.*, 47(2):1078–1095, 2008.

[10] Elisha Falbel, Claudio Gorodski, and Michel Rumin. Holonomy of sub-Riemannian manifolds. *Internat. J. Math.*, 8(3):317–344, 1997.

[11] A. Figalli and L. Rifford. Mass Transportation on Sub-Riemannian Manifolds. *preprint*, 2008.

[12] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, english edition, 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[13] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119:147–171, 1967.

[14] Sébastien Jacquet. Regularity of the sub-Riemannian distance and cut locus. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1 (Paris)*, volume 258 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 521–533. Springer, London, 2001.

[15] Nicolas Juillet. Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13):2347–2373, 2009.

[16] K. Kuwae and T. Shioya. A topological splitting theorem for weighted Alexandrov spaces. *preprint*, 2009.

[17] G. A. Margulis and G. D. Mostow. Some remarks on the definition of tangent cones in a Carnot-Carathéodory space. *J. Anal. Math.*, 80:299–317, 2000.

[18] John Mitchell. On Carnot-Carathéodory metrics. *J. Differential Geom.*, 21(1):35–45, 1985.

[19] Richard Montgomery. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, volume 91

of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[20] Roberto Monti and Francesco Serra Cassano. Surface measures in Carnot-Carathéodory spaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 13(3):339–376, 2001.

[21] Shin-ichi Ohta. On the measure contraction property of metric measure spaces. *Comment. Math. Helv.*, 82(4):805–828, 2007.

[22] Shin-ichi Ohta. Products, cones, and suspensions of spaces with the measure contraction property. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1):225–236, 2007.

[23] Alireza Ranjbar-Motlagh. A note on the Poincaré inequality. *Studia Math.*, 154(1):1–11, 2003.

[24] Alireza Ranjbar-Motlagh. Poincaré inequality for abstract spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 71(2):193–204, 2005.

[25] L. Rifford and E. Trélat. On the stabilization problem for nonholonomic distributions. *Arxiv preprint math/0610363*, 2006.

[26] Karl-Theodor Sturm. On the geometry of metric measure spaces. II. *Acta Math.*, 196(1):133–177, 2006.