シンプレクティックホモロジー

入江慶*

京都大学数学教室 M2

第七回城崎新人セミナーに参加させていただいて，ありがとうございました．この原稿では，シンプレクティック幾何におけるフレアホモロジーの発展形のひとつであるシンプレクティックホモロジーについて，簡単な紹介を書かせていただきます．

1　はじめに

Floer は [F] において，閉シンプレクティック多様体の上で周期ハミルトン系のモース理論を考察し，フレアホモロジーを定義した．シンプレクティックホモロジーは，この理論を開多様体，あるいは境界付き多様体へと一般化するもので，Floer，Hofer らにより [FH] をはじめとする一連の論文で導入され，今でも活発に研究されている．シンプレクティックホモロジーには定義にいくつかのバリエーションがあり，ここで説明するのは Viterbo により [V] で導入されたものである．

シンプレクティックホモロジーは，開多様体の上で通常のフレアホモロジーの定義とほぼ同じ構成をすることで定義されるが，多様体がコンパクトでないことに起因する障害が現れる．このノートの主な目的は，どのような障害が現れ，それをどう回避するかを説明することである．この部分は§ 4 で行われている．§ 2 と§ 3 はその準備である．

§ 5 に，シンプレクティックホモロジーの応用例として，ハミルトン系の周期軌道に関する Rabinowitz の結果（[R]）の別証明を与えた．シンプレクティックホモロジーは，大域シンプレクティック幾何学・ハミルトン系などの研究に幅広い応用を持つ強力な道具であり，§ 5 で述べた応用は最もすぐにできるものにすぎない．シンプレクティックホモロジーについてのサーベイとしては [O], [S] などがあるので，興味を持たれた方はそちらも参照してほしい．

2　閉多様体上のフレアホモロジー

この節では，閉多様体上の（周期ハミルトン系に対する）フレアホモロジーについて簡単に復習する（特に，議論のなかで多様体のコンパクト性を用いる箇所は下線を引いて強調した）．詳しくは，原論文 [F] の他，[深] や [Mc] などを参照されたい．

多様体 M とその上の閉かつ非退化な 2-形式 ω の組 (M,ω) をシンプレクティック多様体という（ω の非退化性より，M は自動的に偶数次元になる）．最も基本的なシンプレクティック多様体は，$\mathbb{R}^{2n}$（座標を $p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n$ とする）とその上の 2-形式 $\sum_i dp_i \wedge dq_i$（以下，これを ω_{st} と書く）の組である．シンプレクティック多様体 (M,ω) 上のなめらかな関数 H について，ω の非退化性より $i_{X_H}\omega = -dH$ で M 上のベクトル場 X_H が定まる．これを H をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場という．

以下，本節では，(M,ω) はコンパクトなシンプレクティック多様体とし，$\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ を仮定する．

* iriek@math.kyoto-u.ac.jp

$H=(H_t)_{t\in S^1}$ を S^1 でパラメトライズされた $C^\infty(M)$ の元の滑らかな族とする（より正確には，$C^\infty(M\times S^1)$ の元）．そこで，H の生成するハミルトン流 $(X_{H_t})_{t\in S^1}$ の周期軌道，つまり $x\colon S^1\to M$ に対する微分方程式

$$\dot{x}(t)=X_{H_t}\bigl(x(t)\bigr) \tag{2.1}$$

の解を考える．以下，可縮な解のみを考えることとし，それらの全体の集合を $\mathcal{P}(H)$ とおく．また，任意の $x\in\mathcal{P}(H)$ は非退化，すなわち対応するポアンカレ写像が固有値 1 を持たないと仮定する．M がコンパクトであることを使うと，この仮定のもとで $\mathcal{P}(H)$ は有限集合であることを示すことができる．各 $x\in\mathcal{P}(H)$ には，コンレイ・ゼンダー指数という整数が定まる（この定義については，[FH] を参照されたい）．これを $\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x)$ と書く．$\mathcal{P}_k(H):=\bigl\{\,x\in\mathcal{P}(H)\bigm| \mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x)=k\bigr\}$ とおく．

M 上の概複素構造 J（すなわち，$\mathrm{End}(TM)$ の切断 J で $J^2=-1$ をみたすもの）は，$g_J(v,w):=\omega(v,Jw)$ が M 上の Riemann 計量となるとき ω 整合的であるという．ω 整合的な概複素構造全体のなす空間 $\mathcal{J}_\omega$ は，可縮であることが知られている．

$J=(J_t)_{t\in S^1}$ を S^1 でパラメトライズされた $\mathcal{J}_\omega$ の元の滑らかな族とする．[*1] $x_-,x_+\in\mathcal{P}(H)$ について，$u\colon\mathbb{R}\times S^1\to M$ に対する方程式

$$\begin{cases}\partial_s u-J_t(\partial_t u-X_{H_t}\circ u)=0,\\ u(s)\to x_\pm\ (s\to\pm\infty)\end{cases} \tag{2.2}$$

を考える．ただし二つ目の式で $u(s)$ は $t\mapsto u(s,t)$ で定められる S^1 から M への写像であり，収束は C^∞ 収束とする．これは楕円型の方程式であり，x_-,x_+ が非退化な解ならばその解全体のなす空間 $\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-,x_+)$ の仮想次元は $\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_-)-\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_+)$ で与えられる（[FH] を参照）．さらに，generic な J については $\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-,x_+)$ は実際に有限次元多様体の構造を持つ．

方程式 (2.2) は s について対称性を持つので，$\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-,x_+)$ には自然な $\mathbb{R}$ 作用

$$\sigma\cdot u(s,t)=u(s-\sigma,t)\qquad\bigl(\sigma\in\mathbb{R},\,u\in\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-,x_+)\bigr)$$

を持つ．$\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-,x_+)$ が有限次元多様体の構造を持つときは，$\mathbb{R}$ 作用による商空間 $\mathcal{M}_{H,J}(x_-,x_+)$ も（1 次元低い）有限次元多様体の構造を持つ．

フレアホモロジーの定義を可能にしているのは次の二つの事実である．

(a) $\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_-)-\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_+)=1$ のとき，$\mathcal{M}_{H,J}(x_-,x_+)$ はコンパクト（すなわち，有限集合）．
(b) $\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_-)-\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_+)=2$ のとき，$\mathcal{M}_{H,J}(x_-,x_+)$ は

$$\bigcup_{\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(y)-\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_+)=1}\mathcal{M}_{H,J}(x_-,y)\times\mathcal{M}_{H,J}(y,x_+)$$

を付け加えることでコンパクト化される．

(a) と (b) はいずれも次の主張から導かれる：「任意の $x_-,x_+\in\mathcal{P}(H)$ について，$\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-,x_+)$ の元の列 $(u_j)_j$ は必ずコンパクト C^∞ 収束する部分列を持つ」．この主張は次のようにして示される．まず，$(u_j)_j$ が $\mathbb{R}\times[0,1]$ の各コンパクト集合上で，C^1 有界であることを示す．M はコンパクトなので，C^0 有界であることは明らかである．そこで，C^1 有界でないと仮定すると，微分が発散するところに注目して極限をとることで非自明な J 正則球面の存在が分かる．これは $\omega|_{\pi_2(M)}=0$ に反する．これで，$(u_j)_j$ が各コンパクト集合上で C^1 有界であることが示された．ここから $(u_j)_j$ がコンパクト C^∞ 収束する部分列を持つことを示すのは，方程式の楕円性を用いた標準的な議論である（例えば，[MS] の Appendix B で解説されている）．

[*1] $\mathcal{J}_\omega$ の単独の元でなく S^1 でパラメトライズされた族を考えるのは，そうしないとモジュライ空間を定義する際の横断正則性が導けないからである．

フレアホモロジーは次のようにして定義される．まず，$\mathcal{P}_k(H)$ の元により生成される自由 $\mathbb{Z}_2$ 加群を $C_k(H)$ とおく（$\mathbb{Z}$ 係数で考えたいならば，$\mathcal{M}_{H,J}(\cdot,\cdot)$ の向きを考える必要がある．その点は省略する）．さらに，$\partial_{H,J}: C_k(H) \to C_{k-1}(H)$ を

$$\partial_{H,J}[x_-] = \sum_{x_+ \in \mathcal{P}_{k-1}(H)} \sharp \mathcal{M}_{H,J}(x_-, x_+) \cdot [x_+]$$

で定義する．右辺が意味を持つためには上の (a) が必要であることに注意されたい．(b) を使うと，簡単な考察で $\partial_{H,J}^2 = 0$ が分かり，$\bigl(C_*(H), \partial_{H,J}\bigr)$ はチェイン複体になる（フレア複体）．

フレア複体が H, J の選択にどう依存するか考えるために，二つの選択 (H,J) と (H',J') を考え，族 $(H^s, J^s)_{s\in\mathbb{R}}$ であって

$$(H^s, J^s) = \begin{cases} (H,J) & (s \le -1) \\ (H',J') & (s \ge 1) \end{cases}$$

となるものをとる（$\mathcal{J}_\omega$ は可縮なのでとれる）．$x_- \in \mathcal{P}(H), x_+ \in \mathcal{P}(H')$ について，方程式

$$\begin{cases} \partial_s u - J_t^s(\partial_t u - X_{H_t^s} \circ u) = 0, \\ u(s) \to x_\pm \, (s \to \pm\infty) \end{cases}$$

の解全体のなす空間 $\hat{\mathcal{M}}_{(H^s,J^s)_s}(x_-, x_+)$ は，$(H^s, J^s)_s$ を generic にとると $\mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_-) - \mathrm{ind}_{\mathrm{CZ}}(x_+)$ 次元の多様体の構造を持つ．そこで，準同型 $\varphi_{(H^s,J^s)_s}: C_k(H) \to C_k(H')$ を

$$\varphi_{(H^s,J^s)_s}[x_-] = \sum_{x_+ \in \mathcal{P}_k(H')} \sharp \hat{\mathcal{M}}_{(H^s,J^s)_s}(x_-, x_+) \cdot [x_+]$$

で定義する．すると $\varphi_{(H^s,J^s)_s}$ が $\bigl(C_*(H), \partial_{H,J}\bigr)$ から $\bigl(C_*(H'), \partial_{H',J'}\bigr)$ へのチェイン写像となることが，$\hat{\mathcal{M}}_{(H^s,J^s)_s}(\cdot,\cdot)$ のコンパクト化を調べることで分かる．この考察を推し進めると，$\varphi_{(H^s,J^s)_s}$ は $(H^s,J^s)_s$ のとり方を変えてもすべてチェインホモトープになっており，さらにすべてチェイン同値写像になることがわかる．結局，フレア複体のチェインホモトピー型は (H,J) に依存しないで決まる．

フレア複体 $\bigl(C_*(H), \partial_{H,J}\bigr)$ のホモロジー群を $\mathrm{FH}_*(H,J)$ と書くと，上の考察より $\mathrm{FH}_*(H,J)$ は H や J によらず (M,ω) だけで決まっていることになる．それを $\mathrm{FH}_*(M,\omega)$ と書き，(M,ω) のフレアホモロジーという．H と J をうまくとって計算すると $\mathrm{FH}_*(M,\omega)$ は M の特異ホモロジーと同型であることが分かる．特に，$\mathcal{P}(H)$ の個数は M の総ベッチ数以上であることが分かる．これが，Floer による（弱）アーノルド予想の証明の方針であった．

3 接触型の境界を持つシンプレクティック多様体

シンプレクティックホモロジーとは，境界付きのシンプレクティック多様体に対して定義されるフレアホモロジーであるが，境界が接触型であるという条件がないとうまく定義できない．そこでまず，本節でその条件を説明したい．

$2n-1$ 次元多様体 N に対して，$\lambda \in \Omega^1(N)$ であって $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \neq 0$ を満たすものを N 上の接触形式といい，組 (N,λ) を接触多様体という．N が向き付けられているときは，$\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ が正か負かということが意味を持つ．ここでは便宜的に，正の（負の）接触形式などということにしよう．

(M,ω) をシンプレクティック多様体とし，$\partial M \neq \emptyset$ とする．定義より $\wedge^n \omega \neq 0$ なので，M は標準的な向きを持ち，∂M にも向きが入る．M の境界 ∂M が接触型であるとは，∂M 上の正の接触形式 λ であって $d\lambda = \omega$ を満たすものが存在することをいう．容易に分かるように，このとき λ は $d\lambda = \omega$ を満たしつつ ∂M の近傍に拡張することができる．したがって，次を得る：

補題 3.1. 次の三つは同値：

(a) ∂M は接触型.
(b) ∂M の近傍で定義された 1 形式 λ で，$d\lambda = \omega$ かつ ∂M 上で $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} > 0$ なるものがある.
(c) ∂M の近傍で定義されたベクトル場 X で，$L_X\omega = \omega$ かつ X が ∂M 上で外向きになるものがある.

(b) と (c) の同値性は $\lambda = i_X\omega$ とおけばただちに導かれる．(c) は接触型であることの判定をするのに便利である．例として，（あとで使うので）$\mathbb{R}^{2n}$ 内の星型の領域が接触型の境界を持つことを示してみよう.

定義 3.2. $\mathbb{R}^N$ 内の領域 D が星型であるとは，$\mathbb{R}_{>0}$ に値を持つ S^{N-1} 上の滑らかな関数 u と $z_0 \in \mathbb{R}^N$ を用いて $D = \left\{ z_0 + tx \mid x \in S^{N-1}, 0 \le t \le u(x) \right\}$ と表せることをいう.

補題 3.3. $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ が星型の領域ならば，$(D, \omega_{\mathrm{st}})$ は接触型の境界を持つコンパクトシンプレクティック多様体である.

証明. D を適当に平行移動することで，定義 3.2 における z_0 は $(0, \dots, 0)$ であるとしてよい．このとき，$X = \dfrac{1}{2} \sum_i p_i \dfrac{\partial}{\partial p_i} + q_i \dfrac{\partial}{\partial q_i}$ とおけば補題 3.1 の条件 (c) を満たす. □

(M, ω) を接触型の境界を持つシンプレクティック多様体とし，λ を ∂M 上の正の接触形式であって $d\lambda = \omega$ を満たすものとする．一般に接触多様体 (N, α) に対して，$\big(N \times \mathbb{R}, d(e^r\alpha)\big)$ がシンプレクティック多様体となることが容易に分かる（r は $\mathbb{R}$ 成分の座標を表す）．そこで，$N = \partial M$ とおいてシンプレクティック多様体 $\big(\partial M \times \mathbb{R}, d(e^r\lambda)\big)$ を考え，その半分 $\big(\partial M \times [0, \infty), d(e^r\lambda)\big)$ と M とを $i : \partial M \to \partial M \times \{0\}; z \mapsto (z, 0)$ ではり合わせてシンプレクティック多様体 $(\hat{M}, \hat{\omega})$ を定義する．つまり

$$\hat{M} := M \cup_i \partial M \times [0, \infty), \qquad \hat{\omega} := \begin{cases} \omega & (\text{on } M) \\ d(e^r\lambda) & (\text{on } \partial M \times [0, \infty)). \end{cases}$$

これを (M, ω) の完備化という.

注意 3.4. この記号からは分かりにくいのだが，構成から明らかにシンプレクティック多様体 $(\hat{M}, \hat{\omega})$ は λ に依存して決まる.

4 シンプレクティックホモロジー

シンプレクティックホモロジーは，接触型の境界を持つコンパクトシンプレクティック多様体 (M, ω) に対して定義される不変量である．定義のアイデアは単純であり，(M, ω) の完備化 $(\hat{M}, \hat{\omega})$ を考え，$\hat{M}$ 上の C^∞ 級関数の族 $H = (H_t)_{t \in S^1}$ と $\hat{\omega}$ 整合的な概複素構造の族 $J = (J_t)_{t \in S^1}$ について 2 節と全く同じ構成を行う，というものである．しかし，$\hat{M}$ がコンパクトでないことが原因となって，H と J を勝手にとってくると 2 節と同様な議論を行うことはできない.

まず，固定された H と J に対して $\mathrm{FH}_*(H, J)$ を定義するために何が必要か考えてみる．$\mathcal{P}(H)$ が有限集合であるためには，[*2]

(A): $\mathcal{P}(H)$ の全ての元の像はあるコンパクト集合に含まれる

という条件が必要である．これが満たされると，$\mathcal{P}(H)$ の任意の元が非退化であるという仮定のもとで $\mathcal{P}(H)$ の有限性が導かれる．さらに，フレア複体の微分を定義するには，

[*2] $\mathcal{P}(H)$ が無限集合だと，$\partial_{H,J} : C_*(H) \to C_*(H)$ が定義できるかが自明でない.

(B): 任意の $x_-, x_+ \in \mathcal{P}(H)$ について，$\hat{\mathcal{M}}_{H,J}(x_-, x_+)$ のすべての元の像はあるコンパクト集合 $K \subset \hat{M}$ に含まれる

が必要である．これが満たされると，2 節と同様な議論で $\mathrm{FH}_*(H, J)$ を定義することができる．上の (A) と (B) を，それぞれ $\mathcal{P}(H)$ および $\mathcal{M}_{H,J}(x_-, x_+)$ に対する C^0 有界性という．

(A), (B) が成り立つようにするには，H と J にどのような条件を課せばよいかを説明したい．その前に，接触多様体上のレーブベクトル場について説明する．(N, α) を接触多様体とすると，条件 $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0$ より，$i_R d\alpha = 0$ かつ $\alpha(R) = 1$ を満たすベクトル場 R がただ 1 つ定まる．これを (N, α) 上のレーブベクトル場という．R の非自明な周期軌道全体の集合を $\mathcal{P}(N, \alpha)$ と書くことにし，各 $x \in \mathcal{P}(N, \alpha)$ について x 上の λ の積分を $T(x)$ で表す（これは，ちょうど x の周期に対応している）．集合 $\mathcal{T}(N, \alpha) = \{T(x) \mid x \in \mathcal{P}(N, \alpha)\}$ は，測度零の集合であることが知られている．

H と J に対する条件を説明する．以下，$(\partial M, \lambda)$ のレーブベクトル場を R と書き，∂M 上の余次元 1 の分布 $\ker \lambda$ を ξ と書く．また，$v \in T(\partial M)$ に対して，$(v, 0) \in T(\partial M \times [0, \infty))$ を $\bar{v}$ と書く．

$H = (H_t)_t$ としては，ある $r_0 > 0$ と $a_H \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathcal{T}(\partial M, \lambda)$, $b_H \in \mathbb{R}$ が存在して，$\partial M \times [r_0, \infty)$ 上で

$$H_t(z, r) = a_H e^r + b_H \tag{4.1}$$

が任意の $t \in S^1$ に対して成立するものを考える（これを「条件 (H)」と書く）．H が (H) を満たすとき，(A), すなわち $\mathcal{P}(H)$ の C^0 有界性が成立する．実際，簡単な計算により $\partial M \times [r_0, \infty)$ の上では $X_{H_t} = a_H \bar{R}$ と書けることが分かるが，$a_H \notin \mathcal{T}(\partial M, \lambda)$ なのでこれは周期軌道を持たない．したがって，$\mathcal{P}(H)$ の元はすべて $M \cup \partial M \times [0, r_0)$ に含まれることが分かる．

次に $J = (J_t)_t$ としては，ある $r_0 > 0$ が存在して，$\partial M \times [r_0, \infty)$ 上で

$$\begin{cases} J_t(\bar{\xi}) = \bar{\xi}, \\ J_t(\frac{\partial}{\partial r}) = \bar{R}, \\ J_t(\bar{R}) = -\frac{\partial}{\partial r} \end{cases} \tag{4.2}$$

が任意の $t \in S^1$ について成立するものを考える（これを「条件 (J)」と書く）．ただし $\bar{\xi} = \{\bar{v} \mid v \in \xi\}$ である．

H と J がそれぞれ条件 (H), (J) を満たすとき，(B) が成り立つことを証明してみよう．$x_-, x_+ \in \mathcal{P}(H)$ とする．r_0 を十分大きくとると，$\partial M \times [r_0, \infty)$ 上で (4.1) および (4.2) が成立するようにできる．このとき，任意の $u \in \hat{\mathcal{M}}_{(H,J)}(x_-, x_+)$ について u の像が $M \cup \partial M \times [0, r_0]$ に含まれることを示す．（これが示せれば，$K = M \cup \partial M \times [0, r_0]$ とおくことで (B) が従う．）

u の像が $M \cup \partial M \times [0, r_0]$ に含まれないとすると，$D := u^{-1}(\partial M \times (r_0, \infty))$ は $\mathbb{R} \times [0, 1]$ の空でない開集合である．u の両端，すなわち $x_\pm$ が $M \cup \partial M \times [0, r_0)$ に含まれることから D 上の関数 $(s, t) \mapsto r(s, t)$ は定数関数ではなく，また最大値をとる．

r の代わりに $\rho := e^r$ を用いたほうがあとの計算が見やすい．このとき (4.2) の二つ目の式は $J_t(\frac{\partial}{\partial \rho}) = \frac{1}{\rho}\bar{R}$ と書ける．$\partial M \times [r_0, \infty)$ 上では $X_{H_t} = a_H \bar{R}$ であるので，u の満たす方程式は $\partial_s u - J_t(\partial_t u - a_H \bar{R}) = 0$ と書ける．この方程式に $d\rho$ および λ をかけると

$$\partial_s \rho + \rho \lambda(\partial_t u) = 0, \qquad \partial_t \rho - \rho \lambda(\partial_s u) = 0$$

を得る．これを使って少し計算すると，$\Delta \rho = |\partial_s u|^2_{g_{J_t}} - a_H \partial_s \rho$ が導け，特に $\Delta \rho + a_H \partial_s \rho \geq 0$ が成り立つ．しかし，ρ は定数関数ではなく，また最大値をとるので，これは Hopf の最大値原理に反する．これで u の像が $M \cup \partial M \times [0, r_0]$ に含まれることが分かった．

上で述べたように，H と J が (H) と (J) を満たしていれば，閉多様体の場合と同じ構成でフレアホモロジー群 $\mathrm{FH}_*(H, J)$ が定義できる．これが J のとり方によらないことは，閉多様体の場合と同じ議論で証明できる．そこで単にこれを $\mathrm{FH}_*(H)$ と書く．

次に，$H, H' \in C^\infty(\hat{M})$ が条件 (H) を満たすとして，準同型 $\mathrm{FH}_*(H) \to \mathrm{FH}_*(H')$ が作れるか考える．閉多様体の場合と同じように H と H' を結ぶ族 $(H^s)_s$ と適当な $\mathcal{J}_{\hat{\omega}}$ の元の族 $(J^s_t)_{s\in\mathbb{R}, t\in S^1}$ をとって方程式 $\partial_s u - J^s_t(\partial_t u - X_{H^s_t} \circ u) = 0$ の解の個数を数えることで $\varphi_{(H^s, J^s)_s} : \big(C_*(H), \partial_H\big) \to \big(C_*(H'), \partial_{H'}\big)$ を定義する．

閉多様体の場合には，これがチェイン写像になり，より強くチェイン同値写像になるのであったが，開多様体の場合にはこれは無条件では成立せず，実際 $\mathrm{FH}_*(H)$ は一般に H により異なる．その理由は，方程式 $\partial_s u - J^s_t(\partial_t u - X_{H^s_t} \circ u) = 0$ の解の C^0 有界性が無条件には成立しないことである．

ただし，$\dfrac{\partial a_{H^s}}{\partial s} \geq 0$ が成立するときには，解の C^0 有界性が成り立ち，$\varphi_{(H^s, J^s)_s}$ がチェイン写像となって準同型 $\mathrm{FH}_*(H) \to \mathrm{FH}_*(H')$ が定義できることが分かる．（これも基本的には最大値原理に帰着させることで証明できるが，詳しい説明は省く．[O] § 1.3.3 に丁寧な解説があるので参照されたい．）$a_H \leq a_{H'}$ ならばこのような $(H^s)_s$ が存在することはすぐ分かるので，そのときは準同型 $\mathrm{FH}_*(H) \to \mathrm{FH}_*(H')$ が定義できる．

条件 (H) を満たす H の元全体のなす集合（$\mathcal{H}$ と書く）に $H \leq H' \iff a_H \leq a_{H'}$ により半順序を入れると，$\mathcal{H}$ は有向集合となる．そこで，(M, ω) のシンプレクティックホモロジー[*3]$\mathrm{SH}_*(M, \omega)$ を

$$\mathrm{SH}_*(M, \omega) := \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} \mathrm{FH}_*(H)$$

で定義する．

注意 4.1. 注意 3.4 で述べたように，シンプレクティック多様体 $(\hat{M}, \hat{\omega})$ は λ に依存してきまる．したがって，$\mathrm{SH}_*(M, \omega)$ が (M, ω) の不変量であると主張するには λ に依存しないことを示さなければならない．これは，次に述べる変形不変性の証明と同時に行うことができる．

シンプレクティックホモロジーの重要な性質はその変形不変性である．すなわち，次が成り立つ：

定理 4.2. $(M, \omega^s)_{0 \leq s \leq 1}$ をコンパクトシンプレクティック多様体の滑らかな族とし，各 s について (M, ω^s) は接触型の境界を持つと仮定する．このとき $\mathrm{SH}_*(M, \omega^0) \cong \mathrm{SH}_*(M, \omega^1)$.

証明は，閉多様体上の場合にフレアホモロジー群が (H, J) に依存しないことの証明に似ているが，擬正則曲線の C^0 評価が無条件には成り立たないので注意が必要である．[S] § 3 を参照されたい．

シンプレクティックホモロジーの計算例として最も基本的なのは次のものであろう．

命題 4.3. $r > 0$ について，$B(r) := \big\{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \;\big|\; |p|^2 + |q|^2 \leq r^2\big\}$ とおく．このとき $\mathrm{SH}_*\big(B(r), \omega_{\mathrm{st}}\big) = 0$.

命題 4.3 の証明は難しくないが，コンレイ・ゼンダー指数の計算を必要とするのでここでは述べない．[O] § 3 や [S] § 3f に詳しい解説があるので参照されたい．

5 Rabinowitz の定理

本節では，シンプレクティックホモロジーの最もすぐできる応用のひとつとして，Rabinowitz による古典的な結果（[R]）の別証明を与える．5.1 で定理の内容を説明し，5.2 で証明を与える．

5.1 定理の紹介

(M, ω) をシンプレクティック多様体とし，$H \in C^\infty(M)$ とする．$dH(X_H) = -\omega(X_H, X_H) = 0$ となるので，X_H の任意の積分曲線 $x(t)$ について $H\big(x(t)\big)$ は定数関数となる．

[*3] 単にフレアホモロジーということもある．

そこで，$h \in \mathbb{R}$ をひとつ固定して $H^{-1}(h)$ の上に X_H の周期軌道がのっているかを問題にすることができる．簡単のため，h は H の正則値としよう．このとき，$S := H^{-1}(h)$ 上の 1 次元分布 $\mathbb{R}X_H$ は，H によらず S だけで完全に決まる．実際，ω は M 上非退化な 2-形式であるから，$\omega|_{TS}$ は退化する方向を 1 次元だけ持つ．それを $\mathcal{L}_S$ とおくと明らかに $\mathbb{R}X_H = \mathcal{L}_S$ となる．

周期軌道の存在や個数を問題にするならば分布 $\mathbb{R}X_H$ だけで十分であるから，H のことは忘れて「M 内の超曲面 S について，$\mathcal{L}_S$ の定める S 上の葉層構造は，閉葉を（どのくらい）持つか？」が意味を持つ．この問題は，$M = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathrm{st}})$ の場合でもすでに十分難しい．この問題に関する初期の大きな結果が，Rabinowitz による次の定理である（[R]）．

定理 5.1 (Rabinowitz). D が星型の領域（定義 3.2 を見よ）ならば，$\mathcal{L}_{\partial D}$ は閉葉を持つ．

注意 5.2. 星型の定義としては，「ある $z_0 \in \operatorname{int} D$ が存在して，$z \in D, t \in (0,1] \implies tz_0 + (1-t)z \in \operatorname{int} D$ が成り立つ」を採用することもあるようである（[田]）．コンパクトな領域 D がこの意味で星型である，というのは定義 3.2 よりも（アプリオリには）弱い条件であるが，この条件でも定理 5.1 の結論は正しい．しかし，このとき ∂D が接触型の境界になるか，私には分からなかった．

5.2 定理の証明

証明の鍵となるのは次の補題である．

補題 5.3. (M, ω) を接触型の境界を持つ $2n$ 次元コンパクトシンプレクティック多様体とし，λ を $d\lambda = \omega$ を満たす ∂M 上の正の接触形式とする．$(\partial M, \lambda)$ のレーブベクトル場 R が閉軌道を持たないとすると，$\mathrm{SH}_*(M, \omega) \cong H_{*+n}(M, \partial M)$.

証明の概略. $H : \hat{M} \to \mathbb{R}$ が次の性質を満たすとしよう：

- ある $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ が存在し，$\partial M \times [0, \infty)$ 上で $H(z, r) = h(e^r)$ と書ける．また，$h'(1) > 0$.
- $H|_M$ の C^2 ノルムは十分小さい．

X_H は $\partial M \times [0, \infty)$ 上で $X_H(z, r) = h'(e^r)\bar{R}$ と書けるので，R が閉軌道を持たないという仮定より，$\partial M \times [0, \infty)$ の上には $\mathcal{P}(H)$ の元は存在しない．また，$H|_M$ の C^2 ノルムが十分小さいとすると，$\mathcal{P}(H)$ は $H|_M$ の臨界点への定値写像のみからなり，そのフレア複体は $H|_M$ のモース複体と次数のずれを除いて一致する（この部分は，閉多様体のフレア理論と同じなので省略する）．また，$h'(1) > 0$ という仮定より ∇H は ∂M において外向きのベクトル場である．これから，同型 $\mathrm{FH}_*(H) \cong H_{*+n}(M, \partial M)$ が定まる．最後に，上の条件を満たすような H からなる $\mathcal{H}$ における共終な列 $H_1 \leq H_2 \leq \cdots$ をとる．すると各 j について，$\mathrm{FH}_*(H_j) \to \mathrm{FH}_*(H_{j+1})$ は同型であることが，上で述べたフレア複体とモース複体の一致を用いると分かる．ゆえに $\mathrm{SH}_*(M, \omega) = \varinjlim_{i \to \infty} \mathrm{FH}_*(H_j) \cong H_{*+n}(M, \partial M)$ を得る． □

次の系は補題 5.3 から直ちに従う．

系 5.4. (M, ω) を接触型の境界を持つコンパクトシンプレクティック多様体とする．$\mathrm{SH}_*(M, \omega) = 0$ とすると，$d\lambda = \omega$ を満たす ∂M 上の任意の正の接触形式 λ について，$(\partial M, \lambda)$ 上のレーブベクトル場は閉軌道を持つ．

さて，D を $\mathbb{R}^{2n}$ 内の星型領域とする．補題 3.3 より $(D, \omega_{\mathrm{st}})$ は接触型の境界を持つシンプレクティック多様体である．そこで $d\lambda = \omega_{\mathrm{st}}$ を満たす ∂M 上の正の接触形式 λ をとり，そのレーブベクトル場を R とおく．$\mathcal{L}_{\partial D}$ は $\omega_{\mathrm{st}}|_{\partial_D}$ の退化する方向として定義されたが，定義より $i_R\omega = 0$ なので，$\mathbb{R}R = \mathcal{L}_{\partial D}$ となる．したがって定理 5.1 を示すには R が閉軌道を持つことを示せばよく，そのためには，系 5.4 より $\mathrm{SH}_*(D, \omega_{\mathrm{st}}) = 0$ を示せばよい．

D は星型であるので，適当に平行移動することにより $S^{2n-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; |x| = 1\right\}$ 上の $\mathbb{R}_{>0}$ 値関数 u を用いて $D = \left\{tx \;\middle|\; x \in S^{n-1}, 0 \le t \le u(x)\right\}$ と書くことができる．さて，$0 \le s \le 1$ について，$\mathbb{R}^{2n}$ 内の領域 D_s を

$$D_s = \left\{tx \;\middle|\; x \in S^{n-1}, 0 \le t \le s + (1-s)u(x)\right\}$$

で定めれば，$D_0 = D$, $D_1 = B(1)$ であり，$(D^s, \omega_{\mathrm{st}})_s$ は接触型の境界を持つコンパクトシンプレクティック多様体の族となる．したがって，定理 4.2 と命題 4.3 より $\mathrm{SH}_*(D, \omega_{\mathrm{st}}) = 0$ が従う．これで定理 5.1 の証明が完了した．

参考文献

[F] Floer, A, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm.Math.Phys, **41** (1988), 775–813.

[FH] Floer, A, Hofer, H, *Symplectic homology I*, Math.Z, **215** (1994), 37–88.

[深] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波講座, 現代数学の展開, 岩波書店, 1999.

[Mc] Mcduff, D, *Elliptic methods in symplectic geometry*, Bulletin AMS, **23(2)** (1990), 311–358.

[MS] Mcduff, D, Salamon, D, *J-holmorphic curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society Collocium Publications, **52**, 2004.

[O] Oancea, A, *A survery of Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology*, Ensaios Math, **7** (2004), 51–91.

[R] Rabinowitz, P, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math, **31** (1978), 157–184.

[S] Seidel, P, *A viased view of symplectic cohomology*, Current Developments in Mathematics (Harvard, 2006), (2008), 211–253.

[田] 田中和永, 非線形問題 2, 岩波講座, 現代数学の展開, 岩波書店, 2000.

[V] Viterbo, C, *Functors and computations in Floer homology with applications I*, Geom. Funct. Anal., **9** (1999), 985-1033.