ラフパス理論入門

稲浜　譲*

名古屋大学多元数理科学研究科

1　Introduction

本論文の目的はラフパス理論の簡単な紹介です．Terry Lyons が初めてラフパスの研究を発表したのが [LY] で, 初期の結果をまとめたのが Z. Qian との共著 [LQ] です．数学的内容はすばらしかったと思いますが, 誤植が多かったり, 非常に一般性が高い設定で議論しているなどの理由で非常に読みづらい本でした．そのため, この分野への参入を試みる人にはたいへん勉強しづらい状況になっていました．本論文では細かい計算や証明はすっとばして, 理論全体の話の流れをできるだけ平易に書こうと試みたつもりです．(なお現在では Lyons-Caruana-Levy [LCL] や Friz-Victoir [FV] などの本が出版されており, だいぶ勉強しやすくなったようです.)

ブラウン運動のサンプルパスは確率論では重要な具体例なのですが, まったく性質はよくありません．この理論により, かなり性質の悪いパスからつくる重複積分を使って, パスに沿った積分や常微分方程式の定義を拡張し, その結果, 確率微分方程式をブラウン運動のサンプルパスごとに研究することが可能になりました．特に確率微分方程式の解はブラウン運動の関数だと思ったときに連続になることが証明できました．これは従来のマルチンゲール積分論を使う確率論の常識からすると, 驚愕する結果です．確率微分方程式は確率論の中で一番重要といっても過言でない研究対象ですが, 歴史も古く大勢の研究者が徹底的に調べてきたために, 成熟してこれ以上の爆発的発展は望めないのではないか, というなんとなしの雰囲気が業界にあったことは否定しきれません．約 15 年前（ただし創業者の T. Lyons 以外が参入してからは約 8 年）に登場したラフパス理論は, まったく違った角度から確率微分方程式を眺める理論で, こういった状況を多少なりとも打破しつつあるように思います．歴史の新しさとあわせて考えると, この先が楽しみな研究分野です．

2　Driven ordinary differential equations

どのような常微分方程式 (ODE) を考えるのかをまず説明する．$x : [0,1] \to \mathbf{R}^d$ を与えられた連続なパスとし, 十分「よい」性質をもつとする．さらに, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n,d)$ および $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を十分「よい」関数だとする．

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t + b(y_t)dt \qquad \text{with given } y_0 \in \mathbf{R}^n.$$

これの正式な定義は次の積分方程式である:

$$y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(y_s)dx_s + \int_0^t b(y_s)ds.$$

この種のものを x のよって駆動 (=drive) される ODE という．一意解が存在する時には, y は x の関数 (=写像) だと思える．これを確率論業界の慣例に従い伊藤写像と呼ぶことにする．伊藤写像はパス空間からパス空間への写像であることに注意. 以下では, 簡単のため, $y_0 = 0$ かつ $b \equiv 0$ と仮定する．($(x_t)_{t\geq 0}$ の代わりに $n+1$ 次元のパス $(x_t, t)_{t\geq 0}$ を考え, かつ σ と b からサイズ $(n, d+1)$ 型のブロック行列を作ればよいから.) したがって以下では

$$dy_t = \sigma(y_t)dx_t \quad \text{with } y_0 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_t = \int_0^t \sigma(y_s)dx_s \tag{1}$$

を考えることにする．

さて, (1) に意味がつくかどうかは, 右辺のパスに沿った積分 (=線積分) が定義できるかどうかにかかっている．駆動する x が連続であるという条件のみでは, パスに沿った積分は定義できないことに注意. 例えば,

*inahama@math.nagoya-u.ac.jp

区分的に C^1 級であるとすれば, $dx_s = x'_s ds$ なので, 簡単に意味がつく. もう少し高級な例としては, x が有界変動な場合がある. このときは, リーマン・スティルチェス積分が可能なので, (1) は意味がつき, 一意解が存在する. しかもパス空間に有界変動ノルムを入れると, 伊藤写像は連続になる. ここまでは微分積分のちょっとした応用であり, そんなに難しくはない. ここでの興味は,「有界変動」という枠組みを超えて, どこまで確率論的に有用な方向に拡張できるのか, という点にある。

さて, ウィーナー測度 μ(=ブラウン運動) を導入しよう. それは $C_0(\mathbf{R}^d) = \{x : [0,1] \to \mathbf{R}^d \mid \text{conti}, x_0 = 0\}$ 上の確率測度であり, 確率論の中でもっとも重要な測度である. パス $t \mapsto x_t$ は μ のもとで $\mathbf{R}^d$ 内を走るランダムな運動と思えるが, こう思ったときには「$(x_t)_{t\geq 0}$ はブラウン運動である」という. d 次元の場合は 1 次元の場合の直積測度として定義されるので, $d = 1$ の場合にウィーナー測度 μ の定義を思い出しておこう.

1. $s < t$ のとき $x_t - x_s$ は μ のもとで平均 0, 分散 $t - s$ の正規分布に従う. すなわちボレル集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して
$$\mu(x_t - x_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp(-\frac{x^2}{2(t-s)})dx.$$
2. $s < t$ のとき増分 $x_t - x_s$ は過去 (つまり $\{x_u \mid 0 \leq u \leq s\}$ が生成する σ-集合族) と独立.

ブラウン運動は非常にジグザグした運動であることが知られている. 例えば $C_0(\mathbf{R})$ の中で, "nowhere differentiable"なパスがなす部分集合はウィーナー測度 μ ではかると重さ 1 である (Paley, Wiener, Zygmund (1933)). つまりウィーナー測度でみると高木関数的なパスがほとんどなのである. これと同じ路線の結果として, 次が知られている: 有界変動なパスがなす部分集合はウィーナー測度 μ ではかると重さ 0 である. したがって、ブラウン運動に沿った積分をスティルチェス積分を使って定義することはできない. またスティルチェス積分を多少拡張したヤング積分というのもあるのだが, 同様の理由でブラウン運動に沿った積分の研究には使えない.

ブラウン運動に沿った線積分は普通は次のように伊藤流の確率積分で定義される。

$$\int_0^t Z_s dx_s = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^N Z_{t_{i-1}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

ここで, $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ は $[0,t]$ の分割. 右辺の有限和のなかで, $y_{t_{i-1}}$ と小区間 $[t_{i-1}, t_i]$ の左端からとっていることには重大な意味がある. この積分の定義はブラウン運動のマルチンゲール性によっている (マルチンゲールであることは独立増分性から自明). もっとも重要なのは次の等式.

$$\mathbf{E}[|\int_0^t Z_s dx_s|^2] = \mathbf{E}[\int_0^t |Z_s|^2 ds]$$

これは, $L^2(\mu)$ と $L^2(\mu \times ds)$ の L^2-等長性を示している. ルベーグ積分論で学ぶように, L^2 の元はウィーナー測度にかんする almost sure に等しいという同値類なので, 確率積分に x-wise の意味はつかない. 例えば 2 次元のブラウン運動に対して,"Lévy's stochastic area" と呼ばれる次の量

$$x = (x^1, x^2) \mapsto \int_0^1 (x_s^2 dx_s^1 - x_s^1 dx_s^2) \tag{2}$$

は (仮にウィーナー空間 $C_0(\mathbf{R}^2)$ の位相を少々強めたとしても) 連続にならないことが知られている. 従って伊藤流の確率微分方程式 (SDE)(1) の解 y は x の写像だと思ったときに連続にならない. つまり伊藤写像は連続でない. これがラフパス理論が登場した時点での確率論業界の常識であった.

本論文の目的は T.Lyons の創始によるラフパス理論 [LY, LQ] を紹介することである. この理論により, 確率微分方程式 (SDE) の解をパスごとに研究するという道がひらかれた. この理論では, 普通の意味でのパスではなく, パスとそれが作る重複積分の組を考える. こういった組を「ラフパス」という. おそらくは K.T.Chen というトポロジーの専門家が考えた重複積分の理論が念頭にあったと思われる. しかし解析なのでかなり「ヘンな」パスも扱わざるをえず, どういったバナッハノルムでまともなパスの集合を完備化すればいいのかはかなり難問である. 「ラフパスの空間に適切な位相を入れると線積分や伊藤写像が測度と関係なく定義できるうえに連続になり, SDE の解が連続写像の像として手に入る, 」というのがこの理論の基本思想で, Lyons の連続性定理といわれる.

ラフパス理論においては, パスとは第 1 , 第 2 レベルの 2 つの部分の組になっている. 第 1 レベルのパスとは単に通常のパスの差分 (=あえていえば 1 重積分) であり, 第 2 レベルのパスとは重複積分のことである. このとき, $2 < p < 3$ を一つ決めて, 第 1 レベルのパスは p-variation 有限, 第 2 レベルのパスは $p/2$-variation 有限として, これに即した位相をラフパスからなる空間に入れる.

このとき重要なことは次の２点が両立すること. **(a).** ラフパスに対して線積分が定義できる. つまりこの程度にはラフパスの空間は小さい. 常微分方程式 (ODE) は定義から積分方程式であるので、ラフパスの意味での ODE が定義でき, しかも伊藤写像 (ODE を駆動するラフパスに対し, 解のラフパスを対応させるもの) は連続である. **(b).** ウィーナー測度のような測度はラフパスの空間にのる. つまりこの程度にはラフパスの空間は大きい.

ちなみに伊藤写像にブラウン運動のリフトを代入するとストラトノヴィッチ型 SDE の解が得られる. これは伊藤型 SDE に簡単な修正項を加えたものである. 上で微分方程式の定義が確率測度とは何も関係ないところに注意してほしい. これは SDE の非ランダム化である. 別の言葉でいえば、測度と微分方程式が分離された. 通常のマルチンゲール積分論を上でごく簡単に紹介したが, これを使うかぎり, こういったことはありえなかったのである.

最後に「◯◯でない」式の説明を追加すると, 従来の確率論にくらべてラフパス理論は (a) マルチンゲール性は使わない, (b) マルコフ性は出てこない, (c) フィルトレーション (時間とともに増加する部分 σ 代数の族のこと) とは関係ない, などなどの特徴がある. その結果, 確率論色の非常に薄い分野になっているといえよう.

3 Geometric rough paths

この章では Lyons-Qian の本 [LQ] に従いラフパスの定義をする. ラフネスと呼ばれる定数 p が $2 \le p < 3$ の場合のみ考える. ブラウン運動への応用を考える場合はこれで十分である. この場合、第１, 第２レベルのパスのみを使う. 第１レベルのパスは通常の意味でのパス (の差分) であり, 第２レベルのパスは重複積分からくるものを想定している. $p \ge 3$ 以上の場合もラフパス理論はあり, その場合は第 $[p]$ レベルのパスまで現れる.

例えば Fractional ブラウン運動というブラウン運動の変種があり, ハースト指数といわれるパラメーター ($\alpha \in (0,1)$) で添字づけされているのだが, $1/\alpha < p$ となるラフネス p にたいして, この確率過程がラフパス空間へリフトできることがわかっている. (例えば [CQ, TU, NT, UNT] を参照せよ. ちなみに, $\alpha = 1/2$ の時がブラウン運動). Fractional ブラウン運動は自己相似性とスケール性の両方を満たす事実上唯一つの平均 0 のガウス過程なのだが, $\alpha \neq 1/2$ ならばマルチンゲールでもなく, マルコフ性も満たさないことに注意.

なお, この章は ODE の一般化が目的であり, 確率測度とは関係ないことを注意しておく. ちなみに, 伝統的な Lyons 流の定義とは別に, SPDE への応用を念頭においた Gubinelli-Tindel 流の代数的な定義 [GUB, GT] もあるが, 本論ではふれない. またラフパスを step $[p]$ の自由ベキ零群上の通常の意味のパスだとみなすサブリーマン幾何的なものの見方もある ([FV] を参照せよ).

$\triangle := \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le 1\}$ とおく. 連続写像 $A : \triangle \to \mathbf{R}^d$ および $q \ge 1$ に対して q-variation ノルムを

$$\|A\|_q := \sup_{\mathcal{P}} \Big(\sum_{i=1}^n |A_{t_{i-1},t_i}|^q_{\mathbf{R}^d} \Big)^{1/q}, \qquad \mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$$

と定義する. ここで sup は $[0,1]$ 区間の全ての有限分割 $\mathcal{P}$ をわたる. $q = 1$ のときはよく知られた total variation ノルムであり, 有界変動ノルムともいわれる. $q < r$ のとき $\|A\|_q < \infty$ ならば $\|A\|_r < \infty$ となることは重要である. とくに 1-variation 有限 (=有界変動) なものは、ラフパスの世界では「すごく性質がいいもの」である.

さて, 以下では $2 \le p < 3$ とする.

定義 3.1 さて $X = (1, X^1, X^2) : \triangle \to \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^d \oplus (\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d)$ が *(*$\mathbf{R}^d$ *に値をとるラフネス* $p \in [2,3)$ *の)* ラフパスであるとは次の２条件をみたすことである.

(i) *(Chen's identity)* $(s,u), (u,t) \in \triangle$ として,

$$X^1_{s,t} = X^1_{s,u} + X^1_{u,t}, \qquad X^2_{s,t} = X^2_{s,u} + X^2_{u,t} + X^1_{s,u} \otimes X^1_{u,t}$$

(ii) *(p-variation ノルム有限)* $\quad \|X^1\|_p < \infty, \ \|X^2\|_{p/2} < \infty.$

$\mathbf{R}^d$ に値をとるラフネス p のラフパス全体の集合を $\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ とかく.

第 1 レベルのパス X^1 だけならば, 単なる普通の $\mathbf{R}^d$ 内の連続パス (の差分) だが, 第 2 レベルのパス X^2 がこの理論のキモである. ちなみに, 条件 (i) は X が truncated tensor algebra $T^{(2)}(\mathbf{R}^d) := \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^d \oplus (\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d)$ に値をとると思うと, 単に $X_{s,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}$ と書ける. $\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ には, 条件 (ii) にでてくる２つのノルムから自然に距離 d_p がはいり完備距離空間になる. (しかしこれは可分ではない.)

さて, 典型的なラフパスの例をあげる. 話の構成上も重要な例である. 有界変動な通常の意味でもパスから作られ, 重複積分を成分にもつもので, smooth ラフパスと呼ばれる. 有界変動なので, リーマン・スティルチェス積分が使えることに注意.

例 3.2 $x:[0,1]\to\mathbf{R}^d$ を 0 から出発する連続な有界変動パスとする．このとき，

$$X^1_{s,t}=x_t-x_s,\qquad X^2_{s,t}=\int_s^t(x_u-x_s)\otimes dx_u,\qquad (s,t)\in\triangle$$

とおくと簡単な計算で，$X\in\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ がわかる．これを (x の上にある)smooth ラフパス，あるいは x のリフトと呼ぶ．

定義 3.3 *smooth* ラフパスで近似できるラフパスを *geometric* ラフパスといい、その全体を $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ と書く．すなわち，$G\Omega_p(\mathbf{R}^d)=\overline{\{\textit{smooth rough paths in } \mathbf{R}^d\ \}}^{d_p}$.

$\mathcal{V}$ が可分であれば,$G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ は可分完備距離空間になる．また，$X\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して，$X^2_{s,t}$ の対称部分は $(X^1_{s,t}\otimes X^1_{s,t})/2$ であり，$X^1_{s,t}$ から自動的に決まっている．よって，実質的にきいてくるのは，X^1 と X^2 の反対称部分 (Lévy area) であり，式 (2) とほぼ同じ形のものである．ちなみに，$X^1=Y^1$ だが $X^2\neq Y^2$ となる $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ の元の例があることに注意.

$X,Y\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して，一般には加法は定義できないことに注意. (ただし， スカラー倍は定義できる.) また， $X\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d), Y\in G\Omega_p(\mathbf{R}^r)$ に対して，「直和ペアのラフパス $(X,Y)\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d\oplus\mathbf{R}^r)$」は一般には定義できないことに注意. ただし，$X,Y$ の片方が例えば smooth ラフパスならば，加法も直和ペアもできる．第 2 レベルパスの"cross term" がスティルチェス積分を使って定義できるからだ．(以後よく使うのは $r=1$ で $y_t=Y^1_{0,t}=t$ となる場合.)

4 Integration of 1-forms along rough paths

この章ではラフパスに沿った線積分を定義する．$X\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ として，$f:\mathbf{R}^d\to\mathrm{Mat}(n,d)$ を簡単のため C^3_b 級とする (つまり，C^3 級であり $|\nabla^i f|$ $(i=0,1,2,3)$ は有界) とする．以下では，積分 $\int f(X)dX$ を $G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ の元として定義したい．(一般には $\int f(X)dY$ は定義できないことに注意．(X,Y) が直和空間のラフパスを意味するときは例外.)

f の条件を多少ゆるめることはできる．たとえば，「C^3 級」とできるのはほぼ自明．(なぜなら，$|\nabla^i f|$ $(i=0,1,2,3)$ は有界集合上有界だし，あたえられた X^1 が動く像集合の上での f の情報以外はつかわないから.) 後述するように，微分方程式を考えるときは積分汎関数に代入するラフパス自体が確定していないので， こういったことは気軽にはできない.

天下りになるが， 次の量を考える． $X^1_{0,s}=x_s$ と書くことにする．$(s,t)\in\triangle$ に対して，

$$K^1_{s,t} = f(x_s)X^1_{s,t}+\nabla f(x_s)X^2_{s,t} \tag{3}$$
$$K^2_{s,t} = f(x_s)\otimes f(x_s)X^2_{s,t} \tag{4}$$

とおく．座標を使うと，たとえば $\nabla f(x_s)X^2_{s,t}=\sum_{i,j}\partial_i f_j(x_s)X^{2;i,j}_{s,t}$ などと書ける．(3) の右辺第 2 項がなければ，普通のリーマン和 (の和の中身) であることに注意.

さて，実は "almost rough path" という概念があり，積分の存在を議論するには (i)「almost rough path から標準的な手続きで唯一つ rough path が得られる.」(ii)「上記の K は almost rough path.」という順番で理論構築するのが普通であるが (Lyons-Qian[LQ])，ここでは紙幅の都合上， 天下り式に定義する.

$\mathcal{P}=\{s=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}$ を区間 $[s,t]$ の分割として，$|\mathcal{P}|$ を分割の幅とする.

$$Y^1_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0}\sum_{i=1}^n K^1_{t_{i-1},t_i}, \tag{5}$$
$$Y^2_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0}\sum_{i=1}^n\bigl(K^2_{t_{i-1},t_i}+Y^1_{s,t_{i-1}}\otimes Y^1_{t_{i-1},t_i}\bigr). \tag{6}$$

とすると， 両式の右辺は収束して，$Y\in\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ となる．(実は $Y\in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$.) 普通は $Y^j_{s,t}=\int_s^t f(X)dX^j$ $(j=1,2)$ と書く．$\Omega_p(\mathbf{R}^d),\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ の距離に関して，この写像 $X\mapsto\int f(X)dX$ は任意の有界集合上リプシッツ連続である (局所リプシッツ連続ということにする). (なお，0 から出発せずに $x_0\in\mathbf{R}^d$ から出発するパスの積分をあつかう場合は，f をずらして，$\tilde{f}=f(\cdot+x_0)$ を考える.)

さて，$x:[0,1]\to\mathbf{R}^d$ が 0 から出発する有界変動な連続関数とし，$X\in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ がその上にある smooth ラフパスのときに，積分概念がちゃんと拡張されていることを見る．このときは，$\omega(s,t)=\|x\|_{1,[s,t]}$ (x の $[s,t]$

区間における変動量) とおく. すると, $|X^2_{s,t}| \le c\omega(s,t)^2$ なので, ω の連続性と優加法性から (3) の右辺第２項からの寄与は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\nabla f(x_{t_{i-1}}) X^2_{t_{i-1},t_i}| &\le c\|\nabla f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \omega(t_{i-1},t_i)^2 \\ &\le c\|\nabla f\|_\infty \omega(s,t) \sup_i \omega(t_{i-1},t_i) \to 0 \quad (\text{as } |\mathcal{P}| \searrow 0)\end{aligned}$$

となって消える. すると, $Y^1_{s,t} = \lim_{|\mathcal{P}|\searrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{t_{i-1}})(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$ と普通のリーマン和の極限になってしまう. したがって, この場合は $Y^1 = \int f(X) dX^1$ は通常のスティルチェス積分と一致している. 同様の議論で, $Y^2 = \int f(X) dX^2$ は, $t \mapsto \int_0^t f(x_u) dx_u$ という連続かつ有界変動な $\mathbf{R}^n$ 値のパスから, 通常のスティルチェス積分を使って作った重複積分と一致していることがわかる. 以上により, $\int f(X) dX$ は連続かつ有界変動なパス $t \mapsto \int_0^t f(x_u) dx_u$ の上にある smooth ラフパスなので, 積分概念が拡張されていることが確認できた. これと積分写像の連続性を組み合わせると, X が geometric ならば $\int f(X) dX$ も geometric だとわかる.

ここまでをまとめると, 以下の命題になる.

命題 4.1 $f : \mathbf{R}^d \to \mathrm{Mat}(n,d)$ を C^3_b とする. このとき, 積分写像

$$X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d) \mapsto \int f(X) dX \in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$$

は局所リプシッツ連続であり, 通常のスティルチェス積分の拡張になっている.

5 Rough differential equations

この章では Lyons-Qian[LQ] に従い, ラフパスの意味での常微分方程式 (RDE) を考える. RDE の定義が確率測度とまったく無関係になされていることに注意してほしい. $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n,d)$ を C^3_b と仮定する.

与えられた $\mathbf{R}^d$ 値のパス X に対して $\mathbf{R}^n$ 値のパス Y を解とする次の方程式を考えたい.

$$dY_t = \sigma(Y_t) dX_t, \qquad Y_0 = 0 \tag{7}$$

初期値は $Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}^n$ として議論するときは, 係数行列を $\sigma(\cdot + y_0)$ に取り替えれば, ほとんど変わらない. 定石どおり, ODE は積分方程式として

$$Y_t = \int_0^t \sigma(Y_u) dX_u \tag{8}$$

と意味付けしたいのだが, ここで右辺をラフパスの意味の積分だとすると, X, Y が違うラフパスであると, 積分が定義できず都合が悪い. そこで, (7) にあえて自明の等式を加え,

$$\begin{cases} dX_t &= dX_t, \\ dY_t &= \sigma(Y_t) dX_t \end{cases} \tag{9}$$

という連立方程式だとみなす.

直和空間 $\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n$ において, $z = (x,y) \in \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n$ に対して, 第 1,2 成分を対応させる射影を π_1, π_2 と書くことにする ($\pi_1 z = x,\ \pi_2 z = y$). ここで $\hat\sigma : \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(d+n, d+n)$ を以下で定める.

$$\hat\sigma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(\pi_2 z) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad \hat\sigma(z)\langle z' \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \sigma(y) x' \end{pmatrix} \tag{10}$$

この記号を使うと, (9) は次に同値.

$$dZ_t = \hat\sigma(Z_t) dZ_t \qquad \text{with } \pi_1 Z_t = X_t \tag{11}$$

以上の考察をまとめて以下の定義を置く. (初期値 $y_0 = 0$ としている.) 射影 π_1 は自動的に射影 $G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n) \to G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ を導くが, これを再び同じ記号で書く (π_2 も同様).

定義 5.1 *$X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ が与えられているとする. 方程式 (7) のラフパスの意味での解とは, $Z \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n)$ で, 積分方程式*

$$Z = \int \hat\sigma(Z) dZ, \qquad \textit{with} \qquad \pi_1 Z = X \tag{12}$$

をみたすもののことである. 用語を濫用して $Y = \pi_2 Z$ のことを解ということも多い. 写像 $X \mapsto Y$ を伊藤写像とよび, $Y = \Phi(X)$ と書く.

ようするに, ラフパスの意味では解というのは, Y が単独でいきなりあるわけでなく, $Z = (X, Y)$ という組のことなのである. ただし, Gubinelli 流の枠組み [GUB] では, X と解 Y とは最初からある意味では分離されている.

ここで, ラフパス理論でもっとも重要な Lyons の連続性定理 (*T. Lyons' continuity theorem* or, *universal limit theorem*) を述べる. いろいろな本や解説がでているにもかかわらず, 誤植や証明の間違いなどが多いため, 命題と証明がともにきちんと書いてあるものが少なく, 非常にわかりづらい状況になっている. 参照する際は十分注意する必要がある. (たとえば, 定番とされている本の記述自体, 命題に誤植があるうえ, 証明がついていない部分がある.) ここではもっとも基本的な C_b^3 の係数の場合のみ扱うが, 連続性定理の係数の条件の改良はいろいろと試みられているようで, σ そのものには 1 次増大をゆるす場合や, $\mathrm{Lip}(2+\epsilon)$ の場合 (C_b^2 かつ 2 階導関数が ϵ 一様ヘルダー連続, $0 < \epsilon \leq 1$) などについて, 論文 (プレプリント) がでているようである.

定理 5.2 *$\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n, d)$ を C_b^3 とし, RDE(7) を考える (Definition 5.1 を参照). このとき, 任意の $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して, 方程式 (12) の一意解 $Z \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}^n)$ が存在して, 以下をみたす.*
(1) $X \mapsto Z$ は局所リプシッツ連続.
(2) 伊藤写像 $X \mapsto Y = \pi_2 Z = \Phi(X) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ は局所リプシッツ連続.

解の一意性より, X が $\mathbf{R}^d$ 値の x の上にある smooth ラフパスのときには, ラフパスの意味での解 Y はスティルチェス積分をつかった通常の意味での解 y の上にある smooth ラフパスである. よって, ODE 概念の拡張がなされたことになる.

Sketch of Proof of Theorem 5.2. 定石どおりのピカールの逐次近似法を使う. $Z(0)^1_{s,t} = (X^1_{s,t}, 0)$, $Z(0)^2_{s,t} = (X^2_{s,t}, 0, 0, 0)$ とおく. また, $Z(m-1)$ まで構成できたら,

$$Z(m) = \int \hat{\sigma}(Z(m-1))dZ(m-1)$$

として, $Z(m)$ を構成する. すると, 十分小さな $T_1 \in (0, 1]$ をとると, 小区間 $[0, T_1]$ 上に制限した場合 (13) の右辺の積分汎関数はリプシッツ係数 < 1 のリプシッツ写像になり, $\{Z(m)\}_{m=1,2,\ldots}$ はある Z に収束することがわかる. これで, $[0, T_1]$ 区間での解ができた.

次は $[T_1, T_2]$ 区間での解を ODE(7) を初期値 $y_0 = Y^1_{0,T_1}$ のもとで解いて作る. 以下, $[T_i, T_{i+1}]$ という各小区間で解を作っていく. この操作が有限回でおさまることは, 係数行列の有界性条件からくる. (有界性をうかつにはずすと, この辺が難しくなる.) 最後は各小区間での解を Chen's identity を逆に使ってつなぎあわせ, 全区間での解を作る.

局所リプシッツ連続性については, $X, \hat{X} \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ と 2 つの元に対して, $Z(m), \hat{Z}(m)$ の距離を測っておくことで証明できる. Q.E.D

この章の最後にドリフト項のついた RDE について述べる. $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を C_b^3 として, (7) のかわりに, 次の RDE を考える.

$$dY_t = \sigma(Y_t)dX_t + b(Y_t)dt, \qquad Y_0 = 0 \tag{13}$$

この ODE のラフパスの意味では次のように考える. まず, $X \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ および $\Lambda \in \mathrm{BV}(\mathbf{R})$ に対して, 直和空間におけるラフパス $(X, \Lambda) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R})$ を自然に対応させる写像はリプシッツ連続である. (ここで, $\mathrm{BV}(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 値の 0 から出発する連続な有界変動なパスの全体からなるバナッハ空間.) 次に与えられた σ, b に対して, $\sigma_0 : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Mat}(n, d+1)$ を

$$\sigma_0(y)\langle x, u\rangle := \sigma(y)x + b(y)u, \qquad (x, u) \in \mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}$$

と定めて, この σ_0 に対応する伊藤写像 $\Phi_0 : G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}) \to G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ を考える. $\lambda_t = t$ とおく. ODE(13) のラフパスの意味での解とは, $Y = \Phi_0(X, \lambda) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^n)$ のことである.

6 A little bit of stochastics

これまでは完全に deterministic' な議論であり, 確率測度はいっさい登場しなかったが, 本章ではパス空間の測度であるウィーナー測度を, ラフパス空間の測度になるようにリフトしたい. この章ではブラウニアンラフパス (=BRP と書くことにする) という $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数を構成する. この法則 (= image measure) は $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上の確率測度になることに注意. これは通常の確率論におけるブラウン運動の役割によく似た役割をはたす.

この章以降では $2 < p < 3$ とする．いままで (ラフ) パスを x, X などと表記してきたが, この章以降では固定された元ではなく,「(測度 μ のもとで) 確率変数である」という感じを強調するために w, W などと表記する．かえってわかりにくいかも知れませんが, ご容赦ください．

$w \in C_0(\mathbf{R}^d)$ に対して, w の 2 進折れ線近似 $w(m) \in C_0(\mathbf{R}^d)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ を分点 $\{0, 1/2^m, 2/2^m, \ldots, (2^m - 1)/2^m, 1\}$ に対応した折れ線近似とする．$w(m)$ は明らかに有界変動なので, そのリフトである smooth ラフパス $W(m)$ が存在する．このとき,

$$\mathcal{S} := \{w \in C_0(\mathbf{R}^d) \mid \{W(m)\}_{m=1,2,\ldots} \text{ is a Cauchy sequence in } G\Omega_p(\mathbf{R}^d)\}$$

はどれぐらいの大きさの集合だろうか. $\mathcal{S}$ の元にたいしては, $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ の元への「リフト」が $\lim_{m\to\infty} W(m)$ で定義できるので，ありがたいのである．ちなみに少し考えると, $\mathrm{BV}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}$ がわかる．

さて, ここまでは確率測度とは無関係であった．$\mathcal{S}$ がウィーナー測度 μ で測って重さ 1 のならば, $W := \lim_{m\to\infty} W(m)$ で BRP を定義することが可能である．これは $(C_0(\mathbf{R}^d), \mu)$ で定義された $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 値の確率変数であり, その法則は $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上の確率測度になることに注意. (この写像は残念ながら連続にはならず, 可測でしかない.)

定理 6.1 *このとき, $\mu(\mathcal{S}) = 1$ であり, Brownian Rough Path $W := \lim_{m\to\infty} W(m)$ は a.s. に存在する．*

これで $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上に「ウィーナー測度もどき」のような測度が構成できた. W の構成法は, 話の流れとしては自然で理解しやすいが, 実際に Theorem 6.1 を証明するためには, $W(m) - W(m-1)$ の p-variation ノルムを評価する必要があり, かなり技術的に難しい．最初に証明した T. Lyons はかなりの試行錯誤をしたのではないかと思われる．

ラフパスの意味での伊藤写像に W を代入すると, ストラトノヴィッチ型の SDE の解が得られることを示そう．ドリフト項のついた RDE(13) を考えて, $\Phi_0 : G\Omega_p(\mathcal{V} \oplus \mathbf{R}) \to G\Omega_p(\mathcal{W})$ で対応する伊藤写像を表す．また, 前と同じく $\lambda_t = t$ とおく．(13) に対応した SDE は次のものである．

$$\begin{aligned} dy_t &= \sigma(y_t) \circ dw_t + b(y_t)dt \\ &= \sigma(y_t)dw_t + \mathrm{Trace}[\nabla\sigma(y_t)\langle\sigma(y_t)\bullet, \bullet\rangle]dt + b(y_t)dt, \qquad y_0 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

ストラトノヴィッチ型の SDE は伊藤型にくらべると, 最右辺の第 2 項にある $\mathrm{Trace}[\cdots]$ の補正項がつく．リーマン和を使った方式で書くと,

$$\int_0^t \sigma(y_s) \circ dw_s = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^N \frac{\sigma(y_{t_i}) + \sigma(y_{t_{i-1}})}{2}(w_{t_i} - w_{t_{i-1}})$$

となる．伊藤積分を定義するリーマン和と比べてほしい．

定理 6.2 *上記のように, W をブラウン運動 (w_t) をリフトして作った BRP とする．このとき a.a.w (μ) に対して, $y_t = \Phi_0(W, \lambda)^1_{0,t}$ for all t.　(ただし, $\lambda_t = t$ という 1 次元のパス.)*

証明は簡単で, まず任意の有限の m に対して, $W(m)$ などなどについて等式を作っておく．その後, 左辺を Wong-Zakai の近似定理, 右辺を Lyons の連続性定理を使って極限をとればよい. (Wong-Zakai の近似定理というのは, ラフパス理論と関係なく昔からよく知られていた定理で, w の代わりに折れ線 $w(m)$ を使って (14) を考えると, これはもはや区分的に C^1 級なパスで駆動されるランダムな ODE であるから, 解 $y(m) = y(m)(w)$ が考えられるが, これがストラトノヴィッチ型の SDE の解 $y = y(w)$ にちゃんと収束していることを主張するものである.)

この定理 6.2 によって, SDE の解が連続写像の像として得られたことになる．通常の SDE 理論の範疇ではありえなかったことである．

7 Applications: Large deviation and Support theorem

この章ではラフパス理論を使って, SDE の解に対する有名な定理を 2 つ証明する．(1) Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理 (= large deviation principle) と, (2) Stroock-Varadhan の台定理 (=support theorem) である．どちらも伊藤写像の連続性があれば比較的簡単に証明できると思われていたのだが, 普通の確率論の枠組みでは連続性はなりたたないために, 非常に難しい計算により証明があたえられていた．ラフパス理論では T Lyons の連続性定理により伊藤写像の連続性があるので, とても見通しのよい証明が得られる．

7.1 Stroock-Varadhan's support theorem

説明が簡単なので, 台定理 (=support theorem) から始めよう．いままでと同じく $C_0(\mathbf{R}^d) = C_0([0,1] \to \mathbf{R}^d)$ を $\mathbf{R}^d$ 内を走る原点出発の連続なパス全体として, μ をその上のウィーナー測度とする．よく知られているように, μ の台は全体集合である．すなわち, 任意の空でない開部分集合の重みは正である．さて, $C_0(\mathbf{R}^d)$ の中で稠密な部分空間として, Cameron-Martin 空間と呼ばれる非常に重要なヒルベルト空間がある;

$$\mathcal{H} = \{k \in C_0(\mathbf{R}^d) \mid \ k \text{ is absolutely continuous with } k' \in L^2([0,1] \to \mathbf{R}^d)\ \}$$

内積は $(h,k)_{\mathcal{H}} = (h', k')_{L^2}$ で入る．このヒルベルト空間こそが μ の性質を反映したものであり, これにくらべると $C_0(\mathbf{R}^d)$ は「ただの入れ物」である, といのが確率論業界の多数派の感覚である．また $\mathcal{H}$ の元は $dk_s = k'_s ds$ より, 普通に積分ができることに注意.

SDE(14) を考える．解 y は $(C_0(\mathbf{R}^d), \mu)$ で定義されて, パス空間 $C_0(\mathbf{R}^n)$ に値をとるので, その像測度 (=y の法則という) が $C_0(\mathbf{R}^n)$ の確率測度になる．「この像測度の台はなんですか」という問いに答えるのが Stroock-Varadhan の台定理である．

$k \in \mathcal{H}$ によって駆動されるとき, SDE(14) に対応した通常の意味での ODE の解を $\tilde{y}^k$ と書こう;

$$d\tilde{y}^k_t = \sigma(\tilde{y}^k_t)dk_t + b(\tilde{y}^k_t)dt \qquad \text{with } \tilde{y}^k_0 = 0. \tag{15}$$

ODE 概念が一致していたので, これはラフパスの意味での解の第 1 レベルとなる．つまり $\tilde{y}^k = \Phi_0(K, \lambda)$.

定理 7.1 (Support Theorem)
SDE(14) の解 y の像測度の台は $\overline{\{\tilde{y}^k \mid k \in \mathcal{H}\}}$ である．

証明の概略を述べる．伊藤写像の連続性により, 値域の問題が定義域の問題に帰着できるところに注目してほしい．この集合 $\overline{\{\tilde{y}^k \mid k \in \mathcal{H}\}}$ の任意の開集合が重み正であることをいえばよいが,

$$G\Omega_p(\mathbf{R}^d) \ni X \mapsto G\Omega_p(\mathbf{R}^d \oplus \mathbf{R}) \ni (X, \lambda) \mapsto G\Omega_p(\mathbf{R}^n) \in \Phi_0(X,\lambda) \mapsto C_0(\mathbf{R}^n) \in \Phi_0(X,\lambda)^1$$

という連続写像で $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に引きもどしたものが重み正であることと同値. (ただし, $\lambda_t = t$ という 1 次元のパス.) したがって, BRP の法則が $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ にもつ台が全体集合であることを示せば十分. $\mathcal{H}$(のリフト) が $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ で稠密なことはすぐわかるので, 結局, 任意の $k \in \mathcal{H}$ の持ち上げ K の任意の開近傍の重みを BRP の法則で測って正になれば十分.

さすがにこの最後の部分は自明でなく, 少々は計算しなければいけない. 最初にこの方法を考えた Ledoux-Qian-Zhang は, Gaussian correlation inequality という種類の不等式を使って示している．これは慣れていない人にはそんなに簡単ではないが, 現在ではより簡明な別の方法が知られている．ここに書くには長いので省略します．いずれにせよ, Stroock-Varadhan の時代よりは相当わかりやすくなったのは確かだと思います.

7.2 Freidlin-Wentzell's large deviation principle

測度の台の場合と違い, 大偏差原理 (LDP) を知っている人は確率論関係者以外ではそんなに多くはないと思うので, まず大雑把に LDP を説明しよう．正確なことが知りたい人は, 専門書をみてほしい. S を可分完備な距離空間として, ν_n を $n = 1, 2, \ldots$ で添字づけられた確率測度の族で, $n \to \infty$ のときに, ある $a \in S$ におけるディラック測度 δ_a に弱収束しているとする．このときに, a から離れたところにある S の部分集合 A の重みは当然 0 に収束する. LDP というのは、**(i)** この収束の速さは指数的か？つまり, たとえば $\nu_n(A) \sim \exp(-\mathrm{Const} \times n)$ という感じになっているか? **(ii)** $\mathrm{Const} = \mathrm{Const}_A$ は適当な A の言葉で書けるのか? といったことを考える問題である．「漸近的に"rare な event"がどれぐらいホントに rare か」を議論している, という言い方もできるかもしれない．

さて正確な定義をここで与えよう．上の状況のときに $(\nu_n)_{n=1,2,\ldots}$ が LDP を満たすとは, ある下半連続な関数 $I : S \to [0, \infty]$ が存在して, 任意のボレル集合 $A \subset S$ に対して,

$$-\inf_{y \in A^\circ} I(y) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_n(A^\circ) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_n(\bar{A}) \le -\inf_{y \in \bar{A}} I(y)$$

となることである．この I を rate function という. (I は存在すれば一意.) また任意の $k \in [0, \infty)$ に対して, $\{y \in S \mid I(y) \le k\}$ がコンパクトのとき, good rate function という．

例 7.2 $\mathbf{R}$ 上で分散 $\varepsilon^2 > 0$ の正規分布 *(ガウス測度)* を考える． すなわち

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \exp(-\frac{|x|^2}{2\varepsilon^2})dx$$

これは $\varepsilon \searrow 0$ の時, 分散が 0 になるから, δ_0 に弱収束している. 密度関数の形から簡単に想像がつくように,

$(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ は *LDP* を満たし, *good rate function* は $I(x) = |x|^2/2$ である. *(*パラメータを n の代わりに $1/\varepsilon^2$ に書き直す必要はある. 簡単のため *1* 次元ガウス測度にしたが, もちろん n 次元ガウス測度でもまったく同様. 後述するが, 無限次元だとはっきり違うことがおきる.*)*

例 **7.3** *(Cramer* 型 *LDP)* X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を適当な確率空間で定義された独立同分布な確率変数列とする. 各 X_n はベルヌーイ分布をしている場合を考える. すなわち $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = 1/2$. *(*注*:* これは可算直積空間 $\mathbf{R}^\infty$ に値をとる確率変数 $(X_1, X_2, \ldots)$ がベルヌーイ測度 $(\delta_1 + \delta_{-1})/2$ の可算直積を像測度として誘導することと同値である.*)* このとき, $\mathbf{R}$ 値の確率変数 $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ が $\mathbf{R}$ に誘導する像測度を ν_n と書こう. $\mathbf{E}[X_n] = 0$ なので, 大数の法則より, $(X_1 + \cdots + X_n)/n \to 0$ *a.s.* 確率変数の概収束は像測度の弱収束を導くので $\nu_n \to \delta_0$ となっている. 実はこの $(\nu_n)_{n=1,2,\ldots}$ は次の *good rate function* に対して, *LDP* を満たすことが知られている.

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\bigl((1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)\bigr) & (\textit{ if } |x| < 1), \\ \infty & (\textit{ if } |x| \geq 1). \end{cases}$$

任意の有界線形写像 $\phi \in C_0(\mathbf{R}^d)^*$ に対して, $l_*\mu = \mu \circ l^{-1}$ が $\mathbf{R}$ 上に誘導する像測度が 1 次元の平均 0 のガウス測度になるという意味で, ウィーナー空間 $(C_0(\mathbf{R}^d), \mu)$ はガウス測度である. よって例 7.2 と同じ発想で, μ の分散を ε^2 倍したものを考えて, それが $\varepsilon \searrow 0$ のときに LDP を満たすかどうか, という問題がある. 答えは肯定的なのだが, 例 7.2 にあるよう有限次元の場合とはだいぶ様子が違う.

例 **7.4** *(Schilder* 型 *LDP)* $\varepsilon > 0$ としてスカラー倍写像 $w \in C_0(\mathbf{R}^d) \mapsto \varepsilon w \in C_0(\mathbf{R}^d)$ によって誘導される $C_0(\mathbf{R}^d)$ 上の像測度を μ_ε と書くことにする. もちろん, $\mu_1 = \mu$ であり, $\mu_\varepsilon \to \delta_0$ $(\varepsilon \searrow 0)$ である. このとき, $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ は次の *good rate function* に対して, *LDP* を満たす.

$$I(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|w\|_{\mathcal{H}}^2 & (\textit{ if } w \in \mathcal{H}), \\ \infty & (\textit{ if } w \notin \mathcal{H}). \end{cases}$$

測度はバナッハ空間 $C_0(\mathbf{R}^d)$ にのっているいるが, I は Cameron-Martin 空間のヒルベルトノルムで書けていることに注意. バナッハ空間 $C_0(\mathbf{R}^d)$ はウィーナー測度の「ただの入れ物」で, Cameron-Martin 空間こそがウィーナー測度を本質的に反映している, という感じがこのへんにも現れている. ところが面白いことに $\mu(\mathcal{H}) = 0$ である.

さて LDP と写像との相性をみよう. $\hat{S}$ をもう一つ別の可分完備距離空間として, $\phi : S \to \hat{S}$ としよう. このとき, $\phi_*\nu_n = \nu_n \circ \phi^{-1}$ は $\hat{S}$ 上の測度の列になるが, これは LDP を満たすだろうか? LDP の定義のなかに, 開集合, 閉集合がでてくることから容易に想像できるように, ϕ が連続であれば答えは肯定的である. このとき, rate function も自動的に決まる. これを contraction principle という. 証明は難しくない.

命題 **7.5** $(\nu_n)_{n=1,2,\ldots}$ は S 上で *good rate function* I に対して *LDP* を満たすとし, $\phi : S \to \hat{S}$ は連続写像だとする. このとき, $(\phi_*\nu_n)_{n=1,2,\ldots}$ は $\hat{S}$ 上で次の *good rate function* $\hat{I}$ に対して *LDP* を満たす*:*

$$\hat{I}(y) := \inf\{I(x) \mid x \in \phi^{-1}(y)\}.$$

さて $\varepsilon > 0$ として, SDE(14) に"small parameter"を入れたものを考えよう.

$$dy_t^\varepsilon = \sigma(y_t^\varepsilon) \circ \varepsilon dw_t + b(y_t^\varepsilon)dt, \qquad y_0^\varepsilon = 0 \tag{16}$$

もちろん, $\varepsilon \searrow 0$ とする"small noise limit"を考察したいわけだ. このとき $t \mapsto y_t^0$ は簡単な ODE の解で, w によらない $\mathbf{R}^n$ 内のパスになっていることに注意. y^ε は $C_0(\mathbf{R}^n)$ に値をとる確率変数なので, それが $C_0(\mathbf{R}^n)$ 上に誘導する像測度を ν_ε とすると, いま述べた理由により, ν_0 はディラック測度なので, LDP を議論できる状況になっている.

定理 **7.6** **(Freidlin-Wentzell's LDP)**
$(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ は $\varepsilon \searrow 0$ のときに次の *good rate function* について *LDP* を満たす*:*

$$\hat{I}(z) = \inf\{\|k\|_{\mathcal{H}}^2/2 \mid \; z = \tilde{y}^k \textit{ for some } k \in \mathcal{H}\}$$

ここで, $\tilde{y}^k$ は考えている *SDE* に対応した *ODE(15)* の解である. $\inf\{\cdots\}$ の中身が空集合になるときは, 通常どおり $\hat{I}(z) = \infty$ と約束する.

証明に入る前に, この結果は Schilder 型 LDP と伊藤写像に対して形式的に contraction principle を適用したものであることを確認してほしい. しかし, 残念ながら通常の確率論の範疇では, 伊藤写像は連続でないのでこの論法は使えない. そこで Freidlin-Wentzell は大変な計算をした結果, 証明に成功したわけである.「伊藤写像は連続でないのに, 連続であるかのように振る舞う不思議議な現象」という感じで受け止められてきたが, ラフパス理論の観点からすれば, これには非常に明快な説明がつく. 証明もそんなに長くない.

Sketch of Proof of Theorem 7.6. ブラウニアンラフパス $W := \lim_{m\to\infty} W(m)$ を ε 倍したものを $\varepsilon W = (\varepsilon W^1, \varepsilon^2 W^2)$ とする. ラフパスの意味では伊藤写像は連続なので, あとは εW が $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ 上に誘導する測度が Schilder 型 LDP を満たしていることを示せば一撃で証明が終わる. 以下に概略だけを述べる. まず, 固定された m に対して, $\varepsilon W(m) = (\varepsilon W(m)^1, \varepsilon^2 W(m)^2)$ が誘導する測度が LDP を満たしていることを示す. これは $d2^m$ 次元のガウス測度の LDP の話にほかならないことが簡単にわかるので, 例 7.2 とまったく同じである. あとは各 m で LDP が成立していたら, $m \to \infty$ とした場合も LDP が成立することを示せばよい. ここが残念ながら自明ではないが, 業界人のはよく知られている手法があり (exponential tightness という十分条件を示す), 多少の計算をすると証明できる. Q.E.D

References

[CQ] Coutin, L., Qian, Z., *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions.* Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 1, 108–140.

[FV] Friz, P., Victoir, N., Multidimensional diffusions as rough paths. Cambridge University Press, 2010.

[GUB] Gubinelli, M., *Controlling rough paths.* J. Funct. Anal. **216** (2004), no. 1, 86–140.

[GT] Gubinelli, M, Tindel, S., *Rough evolution equations.* Ann. Probab. **38** (2010), no. 1, 1–75.

[LQZ] Ledoux, M., Qian, Z., Zhang, T., *Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths.* Stochastic Process. Appl. **102** (2002), no. 2, 265–283.

[LY] Lyons, T. J., *Differential equations driven by rough signals.* Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 2, 215–310.

[LCL] Lyons, T. J., Caruana, M., Lévy, T., Differential equations driven by rough paths. Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–24, 2004. Lecture Notes in Mathematics, 1908. Springer, Berlin, 2007.

[LQ] Lyons, T., Qian, Z., System control and rough paths. Oxford University Press, 2002.

[NT] Nualart, D., Tindel, S., *A construction of the rough path above fractional Brownian motion using Volterra's representation.* arXiv:0909.1307

[TU] Tindel, S., Unterberger, J., *The rough path associated to the multidimensional analytic fbm with any Hurst parameter.* arXiv:0810.1408

[UNT] Unterberger, J., *A rough path over multidimensional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index by Fourier normal ordering.* arXiv:0901.4771