# 円環に収束するスペシャルラグランジュ部分多様体

今城 洋亮*

京都大学大学院理学研究科数学教室

第 7 回城崎新人セミナーに参加させていただき，ありがとうございました．ポスター発表では筆者の修士論文 [2] の結果を説明しました．

Joyce [3] はスペシャルラグランジュ部分多様体の貼り合せを実行しました．筆者が取り組んでいる問題は貼り合せ方の一意性です．修士論文 [2] ではスペシャルラグランジュ部分多様体にエネルギーを導入することによって，一意性を証明するための中間的結果を得ました．

## 1　基本事項の復習

$m$ を正の整数とし，複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^m$ を考察する．$(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ を $\mathbb{C}^m$ の座標とする．$\mathbb{C}^m$ 上の $m$ 次微分形式 $\Omega$ を次式によって定義する：

$$\Omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_m.$$

$\mathbb{C}^m$ のスペシャルラグランジュ部分多様体の定義は以下の通りである．

**定義 1.1** (Harvey and Lawson [1])**.** $M$ を $\mathbb{C}^m$ の $C^\infty$ 級部分多様体とする．$M$ は実 $m$ 次元であり，向き付けられていると仮定する．このとき，$M$ がスペシャルラグランジュ部分多様体であるとは

$$\Omega|_M = d\,\mathrm{Vol}_M\,.$$

が成り立つことをいう．ただし，$d\,\mathrm{Vol}_M$ は $M$ の体積形式を表す．

次の定理はスペシャルラグランジュ部分多様体に関する基本定理である．

**定理 1.2** (Harvey and Lawson [1])**.** $M$ を $\mathbb{C}^m$ のスペシャルラグランジュ部分多様体とする．そのとき，$M$ は $\mathbb{C}^m$ の極小部分多様体である．

## 2　エネルギーの導入

$\mathbb{C}^m$ の Euclid ノルムを $|\bullet|$ と表す．すなわち，$w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{C}^m$ に対して，

$$|w| = \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \cdots + |w_m|^2}$$

とおく．$0 < a < b$ なる実数 $a, b$ に対して，$\mathbb{C}^m$ の円環 $A_{\mathbb{C}}(a, b)$ を次のように定義する：

$$A_{\mathbb{C}}(a, b) = \left\{ z \in \mathbb{C}^m \;\middle|\; a < |z| < b \right\}.$$

* imagi@math.kyoto-u.ac.jp

**定義 2.1.** $M$ を $A_{\mathbb{C}}(a,b)$ の $C^\infty$ 級部分多様体とする．$M$ は実 $m$ 次元であり，向き付けられていると仮定する．このとき，実数 $E(M)$ を次のように定義する：

$$E(M) = \int_{z\in M} \frac{1}{|z|^m}\left|\operatorname{proj}_{T_z^\perp M}\frac{z}{|z|}\right|^2 d\operatorname{Vol}_M(z).$$

ただし，点 $z$ における $M$ の接空間の直交補空間を $T_z^\perp M$ と表した．すなわち，次の直交分解が成り立つ：

$$\mathbb{C}^m = T_zM \oplus T_z^\perp M.$$

この直交分解に関して，$\mathbb{C}^m$ の $T_z^\perp M$ への射影を $\operatorname{proj}_{T_z^\perp M}$ と表した．
$E(M)$ を $M$ のエネルギーと呼ぶ．

## 3 主結果

$\mathbb{R}^m$ を $\mathbb{C}^m$ の部分集合とみなし，

$$A_{\mathbb{R}}(a,b) = \mathbb{R}^m \cap A_{\mathbb{C}}(a,b)$$

とおく．関数 $u : A_{\mathbb{R}}(a,b) \to \mathbb{R}^m$ に対して, $A_{\mathbb{C}}(a,b)$ の部分集合 $\operatorname{Graph}(u)$ を次のように定義する：

$$\operatorname{Graph}(u) = \left\{ \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2+|u(x)|^2}}\left(x+\sqrt{-1}u(x)\right) \,\middle|\, x \in A_{\mathbb{R}}(a,b)\right\}.$$

ただし，$\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m + \sqrt{-1}\mathbb{R}^m$ とみなした.

**定理 3.1.** $m$ のみに依存する定数 $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ：
円環 $A_{\mathbb{C}}(\frac{1}{8},1)$ 内のスペシャルラグランジュ部分多様体 $M$ が次の三条件

- $M$ は $A_{\mathbb{C}}(\frac{1}{8},1)$ の閉部分集合である
- $M$ のエネルギーは $\epsilon$ より小さい，すなわち，

$$E(M) < \epsilon$$

- ある $C^1$ 級関数 $u : A_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2},1) \to \mathbb{R}^m$ が存在して，

$$M \cap A_{\mathbb{C}}(\frac{1}{2},1) = \operatorname{Graph}(u),$$
$$\sup_{x\in A_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2},1)} |u(x)| + \sup_{x\in A_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2},1)} |Du(x)| < \delta \ (Du \text{ は } u \text{ の一階導関数を表す})$$

を満たすならば，ある $C^1$ 級関数 $v : A_{\mathbb{R}}(\frac{1}{4},1) \to \mathbb{R}^m$ が存在して，

$$M \cap A_{\mathbb{C}}(\frac{1}{4},1) = \operatorname{Graph}(v),$$
$$v|_{A_{\mathbb{R}}(\frac{1}{4},1)} = u.$$

## 参考文献

[1] R. Harvey and H.B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Mathematica **148** (1982), 47–157.
[2] 今城 洋亮, 円環に収束するスペシャルラグランジュ部分多様体, 京都大学修士論文, (2009 年 1 月提出).
[3] D.D. Joyce, *Special Lagrangian submanifolds with isolated conical singularities. III. Desingularization, the unobstructed case*, Annals of Global Analysis and Geometry **26** (2004), 1–58.