至るところ発散している p 進新谷 L 関数

広瀬　稔[*]

京都大学数学教室修士 2 年

この報告集では、新谷 L 関数の p 進化について考えたことを書きたいと思います。この報告集での主な主張は次の点です。「新谷 L 関数は (通常の意味では)p 進補完を持たないことがある. ある場合には至る所発散しているような（病的な？）関数として p 進化が構成される」。このような病的な関数が、人工的ではなく自然に現れるのは面白いかなと思い、折角なので本報告集に書くことにしました。

1　はじめに

この報告集で解説する、新谷 L 関数はリーマンゼータ関数を一般化したものであり次のような級数で定義されます。

$$\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi) = \sum_{m_1,\dots,m_r \geq 0} \chi_1^{m_1} \cdots \chi_r^{m_r} \prod_{i=1}^{n} (b_i + a_{i1}m_1 + \cdots + a_{ir}m_r)^{-s_i}$$

パラメータの A, b, χ には不等式的な条件が必要ですが、ここでは省略します。この関数は $s_1, \dots, s_n$ の関数として複素平面全体に有理型関数として解析接続されます。この関数はパラメータの $\chi_1, \dots, \chi_r$ が全て 1 と異なる場合は特に扱いやすいので、まずその場合を 2 節で説明することにします。3 節では一般の $\chi_1, \dots, \chi_r$ に対して負の整数点での値について説明します。最後に 4 節で病的な p 進新谷 L 関数が出てくる例をやることにします。4 節以外は参考までに付けただけなので、4 節だけ読んでも支障はありません。

2　$\chi_1, \dots, \chi_r$ がすべて 1 と異なる場合

この節では $\chi_1, \dots, \chi_r$ は全て 1 と異なるとします。このとき $\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi)$ は複素平面全体に正則に解析接続されます。負の整数での値は次のように与えられます。まず、

$$g(t_1, \dots, t_n) = \frac{e^{-(b_1t_1+\cdots+b_nt_n)}}{\prod_{j=1}^{r} 1 - \chi_j e^{-(a_{1j}t_1+\cdots+a_{nj}t_n)}}$$

とおき、g を $t_1, \dots, t_n$ で展開したときの $t_1^{\alpha} \cdots t_n^{\alpha_n}$ の係数を $C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ とおきます。つまり

$$g = \sum_{\alpha} C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} t_1^{\alpha} \cdots t_n^{\alpha_n}$$

です。$\chi_1, \dots, \chi_r$ が全て 1 と異なるとしているおかげでこのような展開が一意に定まります。このとき $k_1, \dots, k_n$ を 0 以上の整数とすると

$$\zeta((-k_1, \dots, -k_n), A, b, \chi) = (-1)^{k_1+\cdots+k_n} k_1! \cdots k_n! \times C_{k_1,\dots,k_n}$$

となります。

* hirose@math.kyoto-u.ac.jp

この値の p 進補完について説明しておきます。$b \equiv 1 \pmod p$ でありさらに A の各成分が十分 0 に近いとします。このとき

$$\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi) = \sum_{\alpha} X_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \prod_{i=1}^{n} (s_i)(s_i+1)\cdots(s_i+\alpha_i-1) b_i^{-\alpha_i - s_i}$$

が $\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi)$ の負の整数点での値の p 進補完を与えます。ただし $X_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ は

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{r} 1 - \chi_j e^{-(a_{1j}t_1 + \cdots + a_{nj}t_n)}}$$

の係数です。

3　$\chi_1, \cdots, \chi_r$ が一般の場合

$\chi_1, \ldots, \chi_r$ の中に 1 と等しいものが存在するような場合は、一般に $\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi)$ は正則になりません。$\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi)$ は $s_1 + \cdots + s_n = m$ (m は r 以下の整数) で (高々)1 位の極を持っています。より正確には $\mathbf{s} = (-k_1, \ldots, -k_n)$ の周りで次のような展開を持ちます。

$$\zeta(\mathbf{s}, A, b, \chi) = \frac{c_1(s_1+k_1) + \cdots + c_n(s_n+k_n) + (s_1+k_1, \cdots, s_n+k_n\text{の二次以上の項})}{s_1 + \cdots + s_n + k_1 + \cdots + k_n}$$

よって近づき方によって $s = (-k_1, \ldots, -k_n)$ での値は違ってきます。一方、

$$g(t_1, \ldots, t_n) = \frac{e^{-(b_1t_1 + \cdots + b_nt_n)}}{\prod_{j=1}^{r} 1 - \chi_j e^{-(a_{1j}t_1 + \cdots + a_{nj}t_n)}}$$

は一般に極を持ってしまい、一意的な展開を持ちません。そこで各 $1 \leq i \leq n$ に対し g を $t_i, (\frac{t_1}{t_i}), \ldots, (\frac{t_{i-1}}{t_i}), (\frac{t_{i+1}}{t_i}), \ldots, (\frac{t_n}{t_i})$ で展開したときの $t_i^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(\frac{t_1}{t_i})^{\alpha_1}\cdots(\frac{t_n}{t_i})^{\alpha_n}$ の係数としてとして $C^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ を定義します。$\zeta(s, A, b, \chi)$ は次のようになります。

$$\lim_{\epsilon \to 0} \zeta((-k_1, \ldots, -k_i + \epsilon, \ldots, -k_n), A, b, \chi) = (-1)^{k_1+\cdots+k_n} k_1! \cdots k_n! \times C^i_{k_1,\ldots,k_n}$$

4　病的な p 進新谷 L 関数の例

p を十分大きな素数とします。$\zeta(s_1, s_2)$ を以下で定義します。

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + p + p^2 n)^{-s_1} (1 + pn)^{-s_2}$$

ここで 0 以下の整数 s_1, s_2 に対し

$$F(s_1, s_2) = \lim_{\epsilon \to 0} \zeta(s_1, s_2 + \epsilon)$$

とおきます。$F(s_1, s_2)$ の p 進化について考えます。まず $\zeta_p(s)$ を

$$\zeta_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + pn)^{-s}$$

で定義します。$\zeta_p(s)$ は $s = 1$ に極を持ちます。$\zeta_p(s)$ を p 進補完したものも同様です。$\zeta_p(s)$ を p 進補完する方法については省略します。

まず、$F(s_1)$ が連続的な p 進補完を持たないことを説明します。k を非負整数として $s_1 = -k$ の場合を考えると

$$F(s_1, s_2) = \frac{(1 + p(1 + pn))^k}{(1 + pn)^{s_2}} = \sum_{i=0}^{k} p^i \binom{k}{i} \zeta_p(-i + s_2)$$

となるので、$F(-k,s)$ は $s=1,\ldots,k+1$ で極を持ちます。$\{(s_1,s_2)\in\mathbb{Z}|1\leq s_2\leq 1-s_1\}$ という集合は $(Z)_p^2$ の中で p 進位相で稠密な集合となっているので、このような関数 $F(s_1,s_2)$ が連続な p 進補完を持つわけがありません。

次に $F(s_1,s_2)$ の (連続ではない)p 進補完を説明します。

$$F(s_1,s_2)=\sum_{i=0}^{\infty}(-p)^i\frac{s_1(s_1+1)\cdots(s_1+i-1)}{i!}\zeta_p(-i+s_2)$$

この級数でもって $F(s_1,s_2)$ の定義とします。$s_2\in\mathbb{Z}_p$ を固定したとき、$i\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ を動かすと $-i+s_2$ はいくらでも 0 に近づきますが、i を増やすと p^i はすぐに 0 に近づくので、ほとんどの $s_2\in\mathbb{Z}_p$ に対し、この級数は収束します。

参考文献

[Hi] H.Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math.Soc. Student Texts 26, Cambridge University Press, 1993.

[Y] Y. Hiroyuki, *Absolute CM-periods*, Mathematical Surveys and Monographs, 106. AMS