行列式環の F-pure threshold と Fedder type criterion による計算

千葉 隆宏*

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 博士前期課程 2 年

この度は, 第 7 回城崎新人セミナーに招待していただき, 講演の機会までいただきありがとうございます. 運営委員の皆様には御礼を申し上げます。

1 可換環論や代数幾何における正標数と標数 0 の関係

標数 0 の代数多様体の特異点を解析する手法の一つとして, 基となる体を正標数のものに置き換えて, 正標数の代数多様体として解析する方法がある. ある概念を, 正標数特有の概念に置き換えて解析するのだが, 正標数にしてしまうことで解析の方法が全く変わってしまうということがよく起きる. 例えば有理特異点はコホモロジーの消失によって定義されるが, それに正標数で対応する F 正則と呼ばれる特異点は, イデアルの密着閉包という概念を用いて全くイデアル論的に定義される.

今回講演で扱った F-pure threshold は, 正標数の環とイデアルの組に対して定義される数値的不変量である. この不変量は, log canonical threshold (標数 0 の代数多様体とその因子の組に対して定義される) に対応することが原-吉田,Mustata-高木-渡辺によって調べられている. log canonical threshold は, log resolution と呼ばれる特異点解消を用いて定義される. それに対して F-pure threshold は Frobenius 写像の分裂性を用いて定義される. log canonical threshold の計算は非常に難しいが, F-pure threshold を用いることで別の観点から計算することができる. (だからといって F-pure threshold の計算が易しい訳では全く無い)

この報告書では, F-pure threshold の定義を与えた後に, 局所環とその極大イデアルの組に対する F-pure threshold に関する定理 2.6 を紹介し, 実際の計算例として行列式環の場合についての計算を紹介する.

2 正標数の環論の一般論について

まず一般論から準備を行う. ここでは環は被約な可換 **Noether** 環であるとする. p は常にある素数を表すものとし, q はある $e \in \mathbb{N}$ に対して p^e を表す. 環 R に対し R° とは部分集合 $R \setminus \bigcup_{P \in \mathrm{Min}\, R} P$ を表す. 環 R が標数 p の体を部分環として含んでいるとき, R を標数 p の環であるという.

定義 2.1. R を標数 p の環とする. 次の写像

$$F: \begin{array}{c} R \longrightarrow R \\ x \longmapsto x^p \end{array}$$

を **Frobenius** 射と呼ぶ.

R を標数 p の環とするとき, ${}^eR$ とは R に対して環としての構造とは別に R の作用を

$$\begin{array}{ll} R \times R \longrightarrow R \\ (x,a) \quad \longmapsto x^q a \end{array}$$

* m08023c@math.nagoya-u.ac.jp

として R 代数とみなしたものであるとする．つまり ${}^eR$ とは, F^e を構造射として R を R 代数と見たものである．もちろん ${}^eR$ は環として自然に R と同型である．R のイデアル I に対して, この自然な環同型による ${}^eR$ における I の像を ${}^eI$ と表す．R の元 x に対しても同様に ${}^ex$ と書く．以降, R の作用との混同を避けるため, 特に断らない限り ${}^eR$ のイデアルや元を R のイデアル I や元 x を用いて ${}^eI, {}^ex$ などと書くこととする．イデアル I に対して $I^{[q]}$ を, I の元の q 乗が生成するイデアルとする．具体的に I の生成系 $\{a_i\}$ が与えられているときには, $I^{[q]}$ は $\{a_i^q\}$ が生成するイデアルであり, ${}^eR$ のイデアルとして ${}^e(I^{[q]}) = I{}^eR$ である．

定義 2.2. *R を標数 p の環とする．${}^1R$ が有限生成 R 加群となるとき, R は* **F-finite** *であるという．*

F-finite であるような環は優秀な性質を持っている (実際に "優秀環 (excellent ring)" である．その定義は [9]p.260, [13]p.385 等, F-finite なら優秀であることは [8] を参照)．例として, 正標数の完全体や, その上の有限生成代数は F-finite である．また, R が F-finite であるとき, 有限生成 R 代数や, 任意の局所化, 完備化は F-finite となり, 非常に多くの対象が F-finite であることが分かる．

定義 2.3. *R を標数 p の環とする．*

$F : R \longrightarrow {}^1R$ が分裂する時, R は **F-split** *であるという．*

また, 任意の R 加群 M に対して

$$F \otimes 1 : R \otimes M \longrightarrow {}^1R \otimes M$$

が単射となるとき, R は **F-pure** *であるという．*

これらは一般の加群の間の射の split, pure の概念を F に限ったものである．F-split であることは, $\psi({}^e1) = 1$ となる $\psi \in \mathrm{Hom}_R({}^eR, R)$ が存在する事と同値である．pure subring は元の環の重要な性質を多く引き継ぐので重要な対象である．一般に (R 加群の間の射が) split ならば pure であるが, [5] Corollary 5.3 によると F-finite 被約 Noether 環に対しては F-pure と F-split は同値な性質である．

2.1 環とイデアルの組の F-purity

ここでは標数 p の環と, そのイデアルの組に対する不変量として F-pure threshold を定義する．これは環が F-pure threshold 標数 0 のときに定義される不変量 log canonical threshold に対応すると考えられる概念である．log canonical threshold は幾何的には代数多様体とその閉部分多様体の組に対して定義される．詳しくは [11] 等を参照されたい．標数 0 の環の性質を調べる際に標数 p の環の技術を用いることがあるが F-pure threshold はそのようなものの中の一つである．

定義 2.4. *R を標数 p の F-finite で被約な環, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a} \cap R^\circ \neq \emptyset$ となる R のイデアル, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする．組 $(R, \mathfrak{a}^t)$ が* **F-pure** *であるとは, 十分大きな $q = p^e$ に対して, $\mathfrak{a}^{\lfloor t(q-1) \rfloor}$ の元 α が存在して,*

$$\begin{array}{c} R \xrightarrow{F^e} {}^eR \xrightarrow{{}^e\alpha} {}^eR \\ x \longmapsto {}^ex^q \longmapsto {}^e(\alpha x^q) \end{array}$$

が R 線形写像として split することである．

定義 2.5. *R を標数 p の環, $\mathfrak{a}$ を R のイデアルで $\mathfrak{a} \cap R^\circ \neq \emptyset$ とする．*

$$\sup\{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (R, \mathfrak{a}^s) \text{ は F-pure}\}$$

を $\mathfrak{a}$ の **F-pure threshold** *と呼び, $\mathrm{fpt}(R, \mathfrak{a})$ と書く．また, R を省略して $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a})$ とも表すことがある．*

私が注目しているのは, 局所環 $(R,\mathfrak{m})$ に対して, $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ を計算することである. $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ の値によって局所環を特徴づけ, 幾何などへの応用ができないか模索中である. 正則局所環の $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ に関しては [11] が次のような特徴づけをしている.

命題 2.6 ([11] Theorem 2.7(1))**.** $(R,\mathfrak{m},k)$ を標数 p の F-finite F-pure 局所環, k を無限体で $\dim R = d$ とする. このとき以下は同値である.

1) R は正則局所環である.
2) $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) > d-1$.
3) $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = d$.

ここまで定義と基本的な定理を紹介したが, F-pure threshold を定義どおりに計算するのは非常に難しい. そこで, 次に紹介するのが局所環の場合に有効な Fedder 型の判定法である.

定理 2.7 (Fedder 型の判定法, [11] Lemma 1.8)**.** $(S,\mathfrak{m})$ を標数 p の F-finite 正則局所環, $I,\mathfrak{a} \subset S$ をイデアルとし, $R = S/I$ とする. このとき, $(R,(\mathfrak{a}R)^t)$ が F-pure であることは, 十分大きな q に対し $\mathfrak{a}^{\lfloor t(q-1)\rfloor}(I^{[q]}:I) \not\subset \mathfrak{m}^{[q]}$ となることと同値である.

2.2 行列式環の F-pure threshold

ここでは具体的な例の計算として, 行列式環の極大イデアルに対する F-pure threshold の計算をかいつまんで行う. 残念ながら一部についてしか計算を完了していないが, その他の場合については予想という形で紹介させていただく.

定義 2.8. k を体, $X = (X_{ij} \mid 1 \le i \le r, 1 \le j \le s)$ を k 上の不定元を成分とする $r\times s$ 行列, $I = I_t(X)$ $(1 \le t \le \min\{r,s\})$ を X の t 次小行列式全体が生成する $S = k[X]$ のイデアルとする. このとき行列式環とは, S/I のような形にかける環のことを指す.

ここでは k を標数 p の完全体とし, 行列式環を唯一の斉次極大イデアルで完備化したものについて考える. これ以降 $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする. $r=s=t$, 例えば 2 の時は超曲面 $R = k[[X,Y,Z,W]]/(f = XY - ZW)$ である. $f^q : f = (f^{q-1})$ であり, $p \neq 2$ の場合,

$$(XYZW)^{\frac{q-1}{2}} f^{q-1} \notin (X,Y,Z,W)^{[q]},$$

$p = 2$ の場合,

$$(XY)^{\frac{q}{2}-1}(ZW)^{\frac{q}{2}} f^{q-1} \notin (X,Y,Z,W)^{[q]}$$

であるからいずれの場合にしても定理 2.7 により $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = 2$ である. 他の超曲面の場合も同様の方法で計算が可能である.

次に $(r,s,t) = (2,3,2)$ の場合であるが次の結果を用いる.

命題 2.9 ([2] Proposition 4.7)**.** k を標数 p の完全体, $X = (X_{ij} \mid 1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3)$ を k 上の不定元を成分とする 2×3 行列, $S = k[[X]], I = I_2(X)$ を X の 2 次小行列式全体が生成するイデアルとするとき,

$$(I^{[p]} :_S I) = I^{[p]} + I^{2p-2}.$$

これを用いると $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ に関して次の評価を得る.

命題 2.10.

$$2 \leq \mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) \leq 2 + \frac{4}{p}.$$

証明. 定理 2.7 により十分大きい q に対して

$$\mathfrak{m}_S^{\lfloor t(q-1) \rfloor}(I^{[q]} : I) \not\subset \mathfrak{m}_S^{[q]}$$

となるような t の値を評価すればよい. ただし $\mathfrak{m}_S$ は S の極大イデアルである. $S^{[q/p]} := k[[X_{ij}^{q/p} \mid 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 3]]$ とすると $S^{[q/p]}$ 自身も多項式環と同型であるから, J を $X^{q/p} = (X_{ij}^{q/p})$ の 2 次小行列式全体が生成する $S^{[q/p]}$ のイデアルとすると, J に対し命題 2.9 が適用でき, $J^{[p]} :_{S^{[q/p]}} J = J^{[p]} + J^{2p+2}$ を得る. 任意の $q \geq p$ に対して $S^{[q/p]}$ は S の部分環で S は $S^{[q/p]}$ の平坦拡大であるから,

$$\begin{aligned}(J^{[p]} :_{S^{[q/p]}} J)S &= J^{[p]}S :_S JS \\ &= I^{[q]} :_S I^{[q/p]} \\ &\supset I^{[q]} :_S I\end{aligned}$$

を得る. 一方,

$$\begin{aligned}(J^{[p]} :_{S^{[q/p]}} J)S &= (J^{[p]} + J^{2p-2})S \\ &= I^{[q]} + (I^{[q/p]})^{(2p-2)} \\ &\subset \mathfrak{m}_S^{[q]} + \mathfrak{m}_S^{4q-4q/p}\end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\mathfrak{m}_S^{2q+4q/p-5}(I^{[q]} :_S I) \subset \mathfrak{m}_S^{2q+4q/p-5}\mathfrak{m}_S^{4q-4q/p} = \mathfrak{m}_S^{6(q-1)+1} \subset \mathfrak{m}_S^{[q]}$$

であるから,

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) \leq \lim_{q \to \infty} \frac{2q + \frac{4q}{p} - 6}{q-1} = 2 + \frac{4}{p}$$

という評価を得る.

下からの評価を与えるにはまず次の補題を用いる.

補題 2.11 ([2] Lemma 4.2)**.** S を正則局所環, I を $\mathrm{ht}\, I = d$ の素イデアルとする. このとき任意の q に対して $I^{[q]} : I$ は準素イデアルであり,

$$I^{[q]} :_S I \supset I^{[q]} + I^{dq-d}$$

が成り立つ.

$\mathrm{ht}\, I = 2$ であるから, 補題 2.11 により $I^{[q]} :_S I \supset I^{[q]} + I^{2q-2}$ であることが分かる. ここで Δ_1, Δ_3 をそれぞれ $X_{12}X_{23} - X_{13}X_{22}, X_{12}X_{23} - X_{13}X_{22}$ とすると, $\Delta_1^{q-1}\Delta_3^{q-1} \in I^{2q-2} \setminus \mathfrak{m}_S^{[q]}$ である. 何故ならば, X に $(X_{11} > X_{12} > X_{13} > X_{21} > X_{22} > X_{23})$ という順序で辞書式順序を入れたとき, Δ_1, Δ_3 それぞれの先頭項は $X_{12}X_{23}, X_{11}X_{22}$ であるから, $\Delta_1^{q-1}\Delta_3^{q-1}$ には $X_{11}^{q-1}X_{12}^{q-1}X_{22}^{q-1}X_{23}^{q-1}$ という項が先頭項として存在するからである. 従って $X_{13}^{q-1}X_{21}^{q-1}\Delta_1^{q-1}\Delta_3^{q-1} \notin \mathfrak{m}_S^{[q]}$, すなわち $\mathfrak{m}_S^{2(q-1)}(I^{[q]} :_S I) \not\subset \mathfrak{m}_S^{[q]}$ であるから $2 \leq \mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ である. □

これは荒い評価であるが, $t = 2$ の場合は行列式環はトーリック環でもある. [7] によると, トーリック環の単項式イデアルの F-pure threshold はトーリック環を定義する扇の形状にのみ依る, つまりは k の標数に依らない. よって命題 2.10 の右辺の $p \to \infty$ の極限を見れば $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = 2$ であることが分かる.

次の目標は, この結果を拡張することにある. 拡張の方向性として元になる行列のサイズを上げる, 小行列のサイズをあげるといった方針が浮かぶが, 命題 2.9 の応用が利きそうなのが前者であるのと, 計算実験の結果により次の予想を与えた.

予想 2.12. k を標数 p の体, $X = (X_{ij})$ を k 上の不定元を成分とする $r \times s$ 行列 $(r \leq s)$, $S = k[[X]], \mathfrak{m}_S = XS, I = I_r(X), R = S/I, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_S R$ とする. このとき

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) = r(r-1).$$

現段階ではこの予想が正しいかどうかは分かっていない. 主な原因としては $I^{[q]} : I$ の一般の場合の計算ができないところにある.

しかし下からの評価は与えることができる. Δ_i $(1 \leq i \leq s-r+1)$ を, X の i 列から $i+r-1$ 列までを取り出してできる r 次の小行列式とする. $\mathrm{ht}\, I = s-r+1$ であり, $\Delta_1, \ldots, \Delta_{s-r+1}$ は正則列となる. $(r,s) = (2,3)$ のときと同様に $X_{ij} \geq X_{i'j'} \Longleftrightarrow i > i'$ または $i = i'$ かつ $j > j'$ という順序で辞書式順序を入れると, Δ_i の先頭項は $X_{1i} \cdots X_{r\ i+r}$ となる. よって $\Delta_1^{q-1} \cdots \Delta_{s-r+1}^{q-1}$ にはこれらの積の $q-1$ 乗となる項が含まれており, これに含まれない変数の数は $r(r-1)$ 個であるから $\mathfrak{m}^{r(r-1)(q-1)} \Delta_1^{q-1} \cdots \Delta_{s-r-1}^{q-1} \not\subset \mathfrak{m}^{[q]}$ である. 命題 2.11 により $\Delta_1 \cdots \Delta_{s-r-1} \in (I^{[q]} : I) \setminus I^{[q]}$ であることより, 任意の q に対して

$$\mathfrak{m}^{r(r-1)(q-1)}(I^{[q]} : I) \not\subset \mathfrak{m}^{[q]}$$

であるから $r(r-1) \leq \mathrm{fpt}(\mathfrak{m})$ となる.

上からの評価は次の予想が正しければ与えることができる. $\mathrm{ht}\, I = d$ とすると,

予想 2.13.

$$I^{[q]} : I \subset \mathfrak{m}^{[q]} + \mathfrak{m}^{rdq-rd}.$$

予想 2.13 はいくらかの具体的な場合に正しいことが計算ソフト Macaulay 2 による計算で得られている. 予想 2.13 が正しいと仮定される場合, 予想 2.12 において $d = s-r+1$ であり, 極大イデアルをもう 1 つかけることで

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{r(r-1)(q-1)+1}(I^{[q]} : I) &\subset \mathfrak{m}^{r(r-1)(q-1)+1}(\mathfrak{m}^{[q]} + \mathfrak{m}^{rqd-rd}) \\ &\subset \mathfrak{m}^{[q]} + \mathfrak{m}^{(rd+r(r-1))(q-1)+1} \\ &\subset \mathfrak{m}^{[q]} \end{aligned}$$

が得られるので, $\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}) \leq r(r-1)$ を得る.

参考文献

[1] M. Blickle, Multiplier ideals and modules on toric varieties, Math. Z. 248 (2004), no. 1, 113–121.

[2] R. Fedder, F-purity and rational singularity, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), no. 2, 461–480.

[3] N. Hara, K. Yoshida, A generalization of tight closure and multiplier ideals, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 8, 3143–3174.

[4] N. Hara, K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities, J. Algebraic Geom. 11 (2002), no. 2, 363–392.

[5] M. Hochster, J. L. Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Advances in Math. 21 (1976), no. 2, 117–172.

[6] C. Huneke, The theory of d-sequences and powers of ideals, Adv. in Math. 46 (1982), no. 3, 249–279.

[7] D. Hirose, Formulas of F-thresholds and F-jumping coefficients on toric rings, arXiv:0709.1627v2 [math.AC] 4 Aug 2008

[8] E. Kunz, Characterizations of regular local rings of characteristic p, Amer. J. Math. 91 (1969) 772–784.

[9] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press 1986

[10] S. Takagi, F-singularities of pairs and inversion of adjunction of arbitrary codimention, Invent. Math. 157 (2004), no. 1, 123–146.

[11] S. Takagi, K.-i. Watanabe, On F-pure thresholds, J. Algebra 282 (2004), no. 1, 278–297.

[12] K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure normal graded rings, J. Pure Appl. Algebra 71 (1991), no. 2-3, 341–350.

[13] W. Burns, J. Herzog, Cohen-Macaulay rings, Cambridge University Press 1993.