変形量子化と一般化された幾何学

東 大介*

大阪大学理学研究科数学専攻

城崎新人セミナーに参加させていただき, ありがとうございました. 刺激的な議論の場を提供してくださった運営委員の皆さまに感謝いたします. このレポートでは, 変形量子化 (deformation quantization) と, 一般化された幾何学 (generalized geometry) という二つのアイディアを紹介します. 近年, 理論物理学との関わりのなかで興った若い理論たちであり, 何より幾何学の新たな可能性を拓く魅力的なアイディアであるように思います. 現在, これらの理論のあいだの関係について考えています. 私自身まだ理解が不足しているところもありますが, その瑞々しさを少しでも伝えることができたら嬉しいです. 尚, 一般化された幾何学の部分については, 後藤竜司先生の講義を大いに参考にさせていただきました. この場を借りてお礼申しあげます.

1　変形量子化

1.1　存在問題

X を有限次元実多様体とし,$A := C^\infty(X)$ とする.A には $\mathbf{R}-$ 代数の構造が自然に入る. また $A[[\hbar]]$ で $\hbar$ をパラメーター,A の元を係数とする形式ベキ級数環を表す. この $\hbar$ は結合定数 (coupling constant) に対応している. いま, スター積と呼ばれる $A[[\hbar]]$ 上の $\mathbf{R}[[\hbar]]$ 双線形な積 $\star : A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$ を考えよう. まず A の元 f, g に対して,

$$f \star g := fg + B_1(f,g)\hbar + \cdots + B_n(f,g)\hbar^n + \cdots$$

とする. ここで各 $B_k : A \times A \to A$ は双微分作用素である. これを線形かつ $\hbar$-進に拡張すればよい. このスター積は一般に可換ではないが, いまは結合性, つまり

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \tag{1}$$

を満たすことを仮定しておく. このとき,A 上の非可換積 $\{,\} : A \times A \to A$ を,

$$\{f, g\} := \frac{f \star g - g \star f}{\hbar}|_{\hbar=0} \tag{2}$$

で定めると, これは以下を満たす.

- $\{f,g\} = -\{g,f\}$
- $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$　(B_1 が微分作用素であることから)
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$　(スター積の結合性から)

つまりこの $\{,\}$ は A にポアソン環の構造を定め,X はポアソン多様体となる. 積 $\star$ の結合性が本質的に用いられていることに注意しよう. さて, 変形量子化の存在問題とは, この逆を考えるとき現れるものである.

Problem 1.1 (存在問題)**.**
X 上の任意のポアソン構造 β に対して, *(1) (2)* を満たす $\star$ は存在するか？

* u620397k@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

歴史的には,X がシンプレクティック多様体である場合に DeWilde-Lecomte([1]), 大森-前田-吉岡([8]),Fedosov([2],[3]) によって解かれ, 一般のポアソン多様体の場合には Kontsevich([7]) によって解決された. そこで次に, この Kontsevich の証明を概観しよう.

1.2 Kontsevich の構成

多様体上のポアソン構造の空間と, 多重微分作用素による $\star$-積の空間はそれぞれ, 多重ベクトル場の空間 $T_{poly}(X)$, 多重微分作用素によるホッホシルト複体の空間 $D_{poly}(X)$ の部分空間になる. さらにこの $T_{poly}(X)$ と $D_{poly}(X)$ には, どちらも微分次数付きリー環 **(differential graded Lie algebra=dgLa)** と呼ばれる代数系の構造が入る. 変形量子化の存在問題は, この dgLa の言葉によって解釈するのがよい.

Definition 1.2 (微分次数付きリー環)**.**
dgLa とは, 次数付き線形空間 $g = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} g^k$ に微分 d とリー括弧積 $[,]$;

- $d : g^k \to g^{k+1}$
- $[,] : g^k \otimes g^l \to g^{k+l}$

が存在し,$\bar{\gamma} = \deg\gamma$ として,

- $d^2 = 0$
- $d[\gamma_1, \gamma_2] = [d\gamma_1, \gamma_2] + (-1)^{\bar{\gamma}_1}[\gamma_1, d\gamma_2]$
- $[\gamma_2, \gamma_1] = -(-1)^{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}[\gamma_1, \gamma_2]$
- $[\gamma_1, [\gamma_2, \gamma_3]] + (-1)^{\bar{\gamma}_3(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2)}[\gamma_3, [\gamma_1, \gamma_2]] + (-1)^{\bar{\gamma}_1(\bar{\gamma}_2+\bar{\gamma}_3)}[\gamma_1, [\gamma_2, \gamma_3]] = 0$

を満たすものである.

Example 1.3 (ホッホシルト複体 (Hochschild complex)**.**
$A = C^\infty(X)$ に対して,

$$g^k = \begin{cases} D^{k+1}_{poly}(X) & k \geq -1 \\ 0 & k < -1 \end{cases}$$

$$D^k_{poly}(X) := Hom(A^{\otimes k+1}, A) \cap \{\text{ 多重微分作用素 }\}$$

として次数付けをする. 微分にホッホシルトコバウンダリ作用素 *(Hochschild coboundary operator)*, リー括弧にゲルステンハーバー括弧 *(Gerstenhaber bracket)* をそれぞれ採用する. 即ち,

$$\begin{aligned}(d\Phi)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) :=& a_0 \cdot \Phi(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) \\ & - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Phi(a_0 \otimes \cdots \otimes (a_i \cdot a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes a_{k+1}) \\ & + (-1)^k \Phi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k) \cdot a_{k+1} \ (\Phi \in g^k)\end{aligned}$$

$$[\Phi_1, \Phi_2] := \Phi_1 \circ \Phi_2 - (-1)^{k_1k_2}\Phi_2 \circ \Phi_1 \ (\Phi_i \in g^{k_i})$$

ここで,

$$(\Phi_1 \circ \Phi_2)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2}) := \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^{ik_2} \Phi_1(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes (\Phi_2(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+k_2})) \otimes a_{i+k_2+1} \otimes \cdots \otimes a_{k_1+k_2})$$

とする. このとき,$D_{poly}(X) = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} g^k$ は *dgLa* になる.

Example 1.4 (多重ベクトル場)**.**

$$g^k = \begin{cases} T^k_{poly}(X) & k \geq -1 \\ 0 & k < -1 \end{cases}$$

$$T^k_{poly}(X) := \Gamma(X, \wedge^{k+1}TX)$$

として次数付けをする. 微分は $d = 0$ とし, リー括弧としてスカウテン-ナイエンハイス括弧 *(Schouten-Nijenhuis bracket)* を採用する. 即ち,

$$\begin{aligned}[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k, \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_l] := &\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}(-1)^{i+j+k}[\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{i-1} \wedge \xi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \\ &\wedge \xi_k \wedge \eta_0 \wedge \cdots \wedge \eta_{j-1} \wedge \eta_{j+1} \wedge \cdots \wedge \eta_l \ (\xi_i, \eta_j \in \Gamma(X, TX))\end{aligned}$$

$$[\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k, h] := \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \xi_i(h) \cdot (\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_{i-1} \wedge \xi_{i+1} \wedge \cdots \wedge \xi_k) \ (h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X), \xi_i \in \Gamma(X, TX))$$

とする. このとき,$T_{poly}(X) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} g^k$ は $dgLa$ になる.

さて, スター積 $f \star g = fg + \Sigma_{n=1} B_n(f,g)\hbar^n$ において $\bar{\beta} := \Sigma_{n=1} B_n(f,g)\hbar^n$ とおくと, $\bar{\beta}$ は $\hbar g^*[[\hbar]] = D^1_{poly}(X)$ の元である. このとき, この $\star$ の結合性は,dgLa の言葉を用いて, $d\bar{\beta} + \frac{1}{2}[\bar{\beta}, \bar{\beta}] = 0$ とかける. この微分方程式をモーレー・カルタン方程式 **(Maurer-Cartan equation)** という. つまり $D^1_{poly}(X)$ の元である $A[[\hbar]]$ 上の双線形な積 $\star$ が結合律を満たすための必要十分条件は, それがモーレー・カルタン方程式の解となることである.

一方, 多様体 X 上のポアソンテンソル場 β は局所的に $\beta = \beta^{ij}\partial_i \wedge \partial_j \in T^1_{poly}(X)$ と書ける (アインシュタインの規約を用いた). このとき, ポアソン括弧 $\{f, g\} = \beta^{ij}\partial_i f \partial_j g$ は, ポアソン環の公理のうちヤコビ恒等式を除いたものを自明に満たす. ヤコビ恒等式は,dgLa の言葉に直すと $[\beta, \beta] = 0$ となるが,$T_{poly}(X)$ の微分は $d = 0$ であるから, これは $d\beta + \frac{1}{2}[\beta, \beta] = 0$ と同値である. つまり,$T^1_{poly}(X)$ の元がポアソン構造を定めるためには, やはりモーレー・カルタン方程式の解であることが必要十分である.

以上の議論より, 変形量子化の存在問題は,$T_{poly}(X)$ から $D_{poly}(X)$ への, モーレー・カルタン方程式の解空間を保つような写像を構成する問題に帰着される. これは Kontsevich[7] によって解決されたが、その手法は豊かな数学的内容を含んでおり, その定式化や応用をめぐって現在でも活発に研究されている.

2 一般化された幾何学

一般化された幾何学は, 複素幾何学とシンプレクティック幾何学の拡張として Hitchin により導入された [6]. 複素幾何学やシンプレクティック幾何学においては, 理論を展開する場は接バンドル TX であった. この TX の代わりに $TX \oplus T^*X$ の上で幾何学を展開しようというのが一般化された幾何学の基本的な発想である.

2.1 一般化された概複素構造

X を実 2n 次元のコンパクト多様体とし,$T := TX$,$T^* := T^*X$ とおく. $x \in X, u, v \in T_x, \zeta, \eta \in T^*_x$ に対して

$$\langle u + \zeta, v + \eta \rangle := \frac{1}{2}(\eta(u) + \zeta(v))$$

とおくことで,$T \oplus T^*$ 上に不定値で非退化な内積が fiberwise に定まる. すると, この内積に関する直交束や特殊直交束を考えることができる.

Definition 2.1.

$$
\begin{aligned}
O(T \oplus T^*) &= \bigcup_{x \in X} O(T_x \oplus T_x^*) \\
O(T_x \oplus T_x^*) &= \{g \in GL(T_x \oplus T_x^*) | \langle gE_1, gE_2 \rangle = \langle E_1, E_2 \rangle\} \\
SO(T \oplus T^*) &= \bigcup_{x \in X} SO(T_x \oplus T_x^*) \\
SO(T_x \oplus T_x^*) &= \{g \in O(T_x \oplus T_x^*) | \det g = 1\}
\end{aligned}
$$

いま $\mathcal{J}^2 = -id_{T \oplus T^*}$ となる $\mathcal{J}$ を考えると, これは $SO(T \oplus T^*)$ の切断になっている. この $\mathcal{J}$ を一般化された概複素構造 **(generalized(G-) almost complex structure)** という. この積分可能条件について議論することは自然であろう. しかしそのためにはクリフォード代数やピュアスピノルなど種々の準備が要る.

2.2 積分可能条件

2.2.1 クリフォード代数とクリフォード群

Definition 2.2 (クリフォード代数)**.**

$$CL := \bigoplus_k \bigotimes^k (T \oplus T^*)/\mathcal{I}$$

を $\langle , \rangle$ に関するクリフォード代数 ***(Clifford algebra)*** という. ここで $\mathcal{I}$ は

$$\ll E \otimes E - \langle E, E \rangle | E \in T \oplus T^* \gg$$

で生成されるイデアルである.

CL には自然な積として,T と T^* の local (dual) frame$\{e_i\}, \{f^i\}$ に対して $E_i^{\pm} := e_i \pm f^i$ とおくとき,

$$\langle E_i^+, E_j^+ \rangle = \delta_{ij}, \langle E_i^-, E_j^- \rangle = -\delta_{ij}, \langle E_i^+, E_j^- \rangle = 0$$

となるものが定まっている. 以下,$E_i \in CL$ とする (class を表わす記号を省略する).

いま,$CL^\times := \{g \in CL | \exists g^{-1} \in CL\}$ とし,$g \in CL^\times$ に対して,twisted adjoint 作用素

$$\widetilde{Ad}_g a := \tilde{g} a g^{-1}, (a \in CL)$$

を定義する. ここで $\tilde{g}$ は parity 作用素

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & g \text{ は } T \oplus T^* \text{の元の偶数個のテンソル} \\ -g & g \text{ は } T \oplus T^* \text{の元の奇数個のテンソル} \end{cases}$$

である. この $\widetilde{Ad}_g : CL \to CL$ は線形で,parity を除いて準同型になっている.

Definition 2.3 (クリフォード群)**.**

$$G_{cl} := \{g \in CL^\times | \widetilde{Ad}_g (T \oplus T^*) \subset T \oplus T^*\}$$

をクリフォード群 ***(Clifford group)*** という.

2.2.2 ピュアスピノル, スピン表現

まず,$v+\eta \in T\otimes T^*$ を $\wedge^{\cdot} T^* := \oplus_{i=0}^{2n} \wedge^i T^*$ に作用させることを考える.

$$(v+\eta)\cdot\varphi := i_v\varphi + \eta\wedge\varphi \ (\varphi \in \wedge^{\cdot} T^*)$$

このとき $\{E\otimes E - \langle E,E\rangle | E\in T\oplus T^*\}\cdot\varphi = 0$ であることに注意しよう.

この作用を $\otimes^{\cdot}(T\oplus T^*)$ に拡張する.

$$(E_1\otimes E_2\otimes\cdots\otimes E_r)\cdot\varphi := E_1\cdot(E_2\cdot(\cdots(E_r\cdot\varphi)\cdots))$$

$\mathcal{I}\cdot\varphi = 0$ より CL の $\wedge^{\cdot} T^*$ への自然な作用が導かれる.

Definition 2.4 (スピン表現)**.**

$$a\in CL \mapsto \rho_a \in \mathrm{End}(\wedge^{\cdot} T^*)$$

をスピン表現 ***(spin representation)*** という.

$\varphi\in\wedge^{\cdot} T^*$ に対して,

$$\mathrm{ker}\varphi := \{E = v+\eta \in (T\oplus T^*)^{\mathbf{C}} | E\cdot\varphi = 0\}$$

とおくとき,

$$E_1, E_2 \in \mathrm{ker}\varphi \Rightarrow \langle E_1, E_2\rangle = 0$$

となる. つまり $\mathrm{ker}\varphi$ は $T\oplus T^*$ の maximal isotropic subspace になっている. (ここで $T\otimes T^*$ の部分空間 L が maximal isotropic であるとは,$\langle x,y\rangle = 0 \ (x,y\in L)$ および L が極大次元であることを指す.)

Definition 2.5 (ピュアスピノル (pure spinor))**.**
$\varphi(\neq 0)\in\wedge^{\cdot} T^*$ が *pure spinor* $\Longleftrightarrow \dim_{\mathbf{C}}\mathrm{ker}\varphi = 2n$*(maximal dimension)*
pure spinor φ が非退化 *(non-degenerate)* $\Longleftrightarrow \mathrm{ker}\varphi\cap\overline{\mathrm{ker}\varphi} = \{0\}$

ここで $\overline{\mathrm{ker}\varphi}$ は $\mathrm{ker}\varphi$ の複素共役を表わす. この非退化条件は,$\mathrm{ker}\varphi\oplus\overline{\mathrm{ker}\varphi} = (T\oplus T^*)^{\mathbf{C}}$ と同値であることに注意しよう. この pure spinor から, 一般化された概複素構造を構成することができる.

Definition 2.6.
非退化な *pure spinor* φ に対して,

$$\mathcal{J}_\varphi(E) = \begin{cases} \sqrt{-1}E & E\in\overline{\mathrm{ker}\varphi} \\ -\sqrt{-1}E & E\in\mathrm{ker}\varphi \end{cases}$$

で $\mathcal{J}_\varphi$ を定める.

Proposition 2.7.
このようにして定義された *G-almost complex structure* に対して次が成立する.

- $\mathcal{J}_\varphi$ は $SO(T\otimes T^*)$ の切断
- $\mathcal{J}_\varphi$ は実作用素

さて, 次の事実は積分可能条件を論じる上で重要である.

Theorem 2.8.
逆に, 任意の一般化された概複素構造 $\mathcal{J}$ に対して,$\mathcal{J} = \mathcal{J}_\varphi$ となる非退化な *pure spinor* φ が存在する.

2.2.3 クーラン括弧

Definition 2.9 (クーラン括弧)**.**
スピン表現

$$CL \curvearrowright \wedge^{\cdot} T^*$$

により,$\alpha \in CL$ は $\wedge^{\cdot} T^*$ に作用する作用素と見なせる.d:$\wedge^p T^* \to \wedge^{p+1} T^*; d^2 = 0$ を外微分作用素とする. $E_1 \in T \oplus T^*$ に対し,$\wedge^{\cdot} T^*$ への作用素として, 反交換子

$$\{d, E_1\} := dE_1 + E_1 d$$

を考え,$E_2 \in T \oplus T^*$ との交換子

$$[\{d, E_1\}, E_2] = \{d, E_1\}E_2 - E_2\{d, E_1\}$$

をとる. これをドルフマン括弧 *(Dorfman bracket)* という. このとき,

$$[E_1, E_2]_{co} := \frac{1}{2}([\{d, E_1\}, E_2] - [\{d, E_2\}, E_1])$$

をクーラン括弧 ***(Courant bracket)*** という.

これでようやく,G-almost complex structure の積分可能条件が定義できる.

Definition 2.10.
一般化された概複素構造 $\mathcal{J}_\varphi$ が積分可能 $\Longleftrightarrow [E_1, E_2]_{co} \subset \ker\varphi \ (\forall E_1, E_2 \in \ker\varphi)$

先の Theorem2.8 が,pure spinor φ から構成された G-almost complex structure について定義をすればよいことを保証してくれている.

2.3 columns

2.3.1 標語の意味

ここで, 本章の冒頭で述べた“一般化された幾何学は複素幾何学とシンプレクティック幾何学の拡張である”という標語の意味を解説する.

Example 2.11 (複素構造)**.**
J を通常の複素構造, 即ち $J \in \mathrm{End}(T) : J^2 = id_T$ とし,$J^* \in \mathrm{End}(T^*) : J^2 = id_{T^*}$ を

$$(J^*(\theta))(v) := \theta(Jv) \ (v \in T, \theta \in T^*)$$

で定める. このとき,

$$\mathcal{J}_J := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^* \end{pmatrix}$$

とおくと, これは $\mathcal{J}_J^2 = -id_{T \oplus T^*}$ で,$SO(T \oplus T^*)$ の切断, つまり *G-complex structure* になっている. いま,

$$T^* \otimes \mathbf{C} = \wedge^{1,0} \oplus \wedge^{0,1} \ (J^* \text{の固有分解})$$
$$T \otimes \mathbf{C} = \vee^{1,0} \oplus \vee^{0,1} \ (J \text{ の固有分解})$$

とし,

$$\wedge^m T^* = \bigoplus_{p+q=m} \wedge^{p,q}$$

とする. ここで,

$$\wedge^{p,q} = \wedge^p(\wedge^{1,0}) \otimes \wedge^q(\wedge^{0,1})$$

である. このとき, 正則 *n-form* $\varphi(\neq 0) \in \wedge^{n,0}$ を非退化な *pure spinor* と見なすことができる. 実際,

$$\begin{aligned}\{\theta^i\} &= \wedge^{1,0}\text{の } local frame\\ \{z_i\} &= \vee^{1,0}\text{の } local frame\\ \{\bar{\theta}^i\} &= \wedge^{0,1}\text{の } local frame(dual)\\ \{\bar{z}_i\} &= \vee^{0,1}\text{の } local frame(dual)\end{aligned}$$

とおくと,$\varphi = \lambda(x)\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ で, $z_i \cdot \varphi = \pm\theta^1 \cdots \check{\theta^i} \cdots \theta^n,\ \theta^i \wedge \varphi = 0,\ \bar{z}_i \cdot \varphi = 0,\ \bar{\theta}^i \wedge \varphi = 0$ より,

$$\begin{aligned}(T \otimes T^*) \otimes \mathbf{C} =&\ker\varphi \oplus \overline{\ker\varphi}\\ =&(\vee^{1,0} \oplus \wedge^{1,0}) \oplus (\wedge^{0,1} \oplus \wedge^{0,1})\end{aligned}$$

となる. 従って任意の正則 n 形式 $\varphi(\neq 0)$ に対して $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_J$ である.

Example 2.12 (シンプレクティック構造)**.**
ω を通常のシンプレクティック構造とし,$\hat{\omega} : T \to T^*$ を内部積を用いて,

$$\hat{\omega}(v) := i_v\omega = \omega(v, \cdot)$$

と定義する.ω の非退化性より,$\omega^{-1} : T^* \to T$ が存在する. このとき,

$$\mathcal{J}_\omega := \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\omega}^{-1} \\ \hat{\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, これは *G-complex structure* である.
Darboux 座標 $\{x^i, y^i\}$ を用いてシンプレクティック形式を $\omega = \sum x^i \wedge y^i$ と表示しておく. いま,

$$\begin{aligned}\psi :=& e^{\sqrt{-1}\omega}\\ :=& 1 + \sqrt{-1}\omega + \frac{1}{2!}(\sqrt{-1}\omega)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(\sqrt{-1}\omega)^n + \cdots\end{aligned}$$

とおく. このベキは $\wedge$ に関するものである. このとき,$i_{x_i} = \sqrt{-1}y^i \wedge \psi$ 及び $i_{y_i} = -\sqrt{-1}x^i \wedge \psi$ より

$$\ker\psi = \{x_i + \sqrt{-1}y^i, y_i - \sqrt{-1}x^i\}_{i=1}^{2n}$$

となるから,ψ が *pure spinor* であることがわかる. また,

$$\overline{\ker\psi} = \{\bar{x}_i + \sqrt{-1}\bar{y^i}, \bar{y}_i - \sqrt{-1}\bar{x^i}\}_{i=1}^{2n}$$

より

$$(T \oplus T^*) \otimes \mathbf{C} = \ker\psi \oplus \overline{\ker\psi}$$

となるから ψ の非退化性もわかる. 以上より,

$$\mathcal{J}_\psi = \mathcal{J}_\omega$$

となる.

これによって, 一般化された複素構造が複素構造とシンプレクティック構造の拡張であることがわかった. しかし, 一般には複素構造とシンプレクティック構造が入り混じっている.

Example 2.13 (混合型の G-cpx structure)**.**

$$
\begin{aligned}
T &= T_1 \oplus T_2 \quad (\mathrm{dim}T_1 = 2\ell, \mathrm{dim}T_2 = 2(n-\ell)) \\
T^* &= T_1^* \oplus T_2^*
\end{aligned}
$$

とし,J を T_1 の複素構造,ω を T_2 のシンプレクティック構造とする. このとき $u = u_1 \oplus u_2 \in T_1 \oplus T_2$, $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2 \in T_1^* \oplus T_2^*$ に対して,

$$\mathcal{J}(u_1 \oplus u_2 \oplus \eta_1 \oplus \eta_2) := Ju_1 + \omega(u_2) - J^*\eta_1 - \omega^{-1}(\eta_2)$$

とおくと,

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_J \oplus \mathcal{J}_\omega$$

である. このとき, この *G-complex structure* を生成する *pure spinor* は, 先の例における記号のもとで,

$$\Phi = \varphi \wedge \psi$$

とかける. ここで,

$$
\begin{aligned}
\varphi &= -\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^\ell \\
\psi &= e^{\sqrt{-1}\omega}
\end{aligned}
$$

である. これを ***type*** ℓ の混合型 ***G-complex structure*** という.$\ell = 0$ のときシンプレクティック構造に,$\ell = n$ のとき複素構造にそれぞれ対応している.

2.3.2 B-field 作用

Definition 2.14.
$b \in \wedge^2 T^*$ とする. 非退化な *pure spinor* Φ に対して,$e^b \wedge \Psi$ もまた非退化な *pure spinor* になる. これを ***B-field*** 作用という.

Proof. まず $e^b \in Spin$ であること, 及び $\widetilde{Ad_{e^b}} E \in T \oplus T^*$ $(\forall E \in T \oplus T^*)$ であることを確認する (認める).

$$\ker(e^b \cdot \Phi) := \{E \in (T \oplus T^*) \otimes \mathbf{C} | E \cdot (e^b \cdot \Phi) = 0\}$$

とおくと,

$$\ker(e^b) = \{\widetilde{Ad_{e^b}} E \in T \oplus T^* \otimes \mathbf{C} | E \in \ker\Phi\} =: \widetilde{Ad_{e^b}}(\ker\Phi)$$

が成立する. 実際,$\widetilde{Ad_{e^b}} \cdot E = e^b E e^{-b}$ であり,$(e^b E e^{-b}) e^b \Phi = e^b E \cdot \Phi = 0$. また $Ad_{e^{-b}} \cdot Ad_{e^b} = id$ となるから,

$$Ad_{e^b} : \ker\Phi \to \ker(e^b\Phi)$$

は同型.Ad_{e^b} は実変換だから $Ad_{e^b}(\overline{\ker\Phi}) = \overline{\ker(e^b \cdot \Phi)}$ となっている. これより

$$\ker(e^b \cdot \Phi) \oplus \overline{\ker(e^b \cdot \Phi)} = (T \oplus T^*) \otimes \mathbf{C}$$

となり,$e^b \cdot \Phi$ は非退化な pure spinor である. Q.E.D

2.3.3 β-field 作用

Definition 2.15.
$\beta \in \wedge^2 T$ とする. 非退化な *pure spinor* Ψ に対して,$e^\beta \cdot \Psi$*(Spin* 表現*)* もまた非退化な *pure spinor* になる. これを β***-field*** 作用という.

Proof. B-field 作用の場合と同様. Q.E.D

2.4 一般化された複素構造の変形理論

2.4.1 generalized Maurer-Cartan

X を実 $2n$ 次元多様体とし,$\mathcal{J}$ をその G-complex structure とする. この $\mathcal{J}$ による分解 $L_{\mathcal{J}} \oplus \bar{L_{\mathcal{J}}}$ を考える (ただし $L_{\mathcal{J}} =: \ker\varphi$). この maximal isotropic subspace $L_{\mathcal{J}}$ をずらして, $L_\varepsilon \oplus \bar{L_\varepsilon} = (T \oplus T^*) \otimes \mathbf{C}$ なる maximal isotropic subspace L_ε を構成することを以て変形 $\mathcal{J}_\varepsilon$ をつくる.

いま $\varepsilon \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}}$(ただし, これは切断の意味) に対して,

$$L_\varepsilon := \{E + [E, \varepsilon] | E \in L_{\mathcal{J}}\}$$

とおく. これは ε が十分小なら maximal isotropic subspace になる. このとき,L_ε を $\sqrt{-1}$ の固有空間とする G-almost complex structure $\mathcal{J}_\varepsilon$ が定まる. では, この $\mathcal{J}_\varepsilon$ が積分可能になるのは, どのような $\varepsilon \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}}$ を根にもつ場合であろうか. 実は, 次が成立することが知られている.

Theorem 2.16.

$$\mathcal{J}_\varepsilon : integrable \Leftrightarrow d_L + \frac{1}{2}[\varepsilon, \varepsilon]_L = 0$$

この右辺の方程式を一般化されたモーレー・カルタン方程式 ***(generalized Maurer-Cartan equation)*** という.

一般にモーレー・カルタン方程式はある複体上で定義される方程式であるが, この場合の複体は Lie algebroid complex と呼ばれるものになる. 即ち,

$$0 \to \bar{L_{\mathcal{J}}} \to \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}} \to \wedge^3 \bar{L_{\mathcal{J}}} \to \cdots$$

である. この微分 d_L は,$X_0, X_1 \in \bar{L_{\mathcal{J}}}$ について

$$(d_L\alpha)(X_0, X_1) := (\Pi_T X_0)\alpha(X_1) - (\Pi_T X_1)\alpha(X_0) - \alpha([X_0, X_1]_{co})$$
$$(d_L f)(X_0) := (\Pi_T X_0)(f) \ (f \in \wedge^0 \bar{L_{\mathcal{J}}} = \mathcal{C}^\infty(X))$$

として, 高次については帰納的に定めるものとする (ここで $\Pi_T : T \otimes T^* \to T$ は射影を表す). 括弧 $[,]_L$ についてはスカウテン括弧を採用している.

2.4.2 変形空間と障害空間

変形族を

$$\{\varepsilon \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}} | d_L\varepsilon + \frac{1}{2}[\varepsilon, \varepsilon]_L\} / \sim$$

で定義する. この同一視は微分同相写像と d_L-exact な b-field 作用による. 即ち,

$$\mathcal{J}_1 \sim \mathcal{J}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{J}_2 = f_* \mathcal{J}_1 \ (\exists f \in Diff(X)) \ or \ \mathcal{J}_2 = Ad_{e^b} \mathcal{J}_1 \ (b = da, \exists a \in \wedge^1 T^*)$$

とする.

いま $\{f_t\}$ を $f_0 = id$ となる diffeomorphism の族とし, これによる変形

$$\mathcal{J}_t = f_{t*}\mathcal{J}$$

を考える. この接ベクトルは,

$$\frac{d}{dt}(f_{t*}\mathcal{J})|_{t=0} = \mathcal{L}_v\mathcal{J}$$

となる (ただし $\mathcal{L}$ はリー微分). これを pure spinor との対応でみる.$\mathcal{J}$ が非退化な pure spinorϕ に対応しているとする. $f_e^*\phi$ もふたたび非退化な pure spinor になるが, これに対応する G-complex structure は $f_t^*\mathcal{J}$ であり,

$$\frac{d}{dt}f_t^*\phi|_{t=0} = \mathcal{L}v\phi = di_v\phi + i_v d\phi$$

となる. 次に d-exact な b-field 作用を考えると

$$\frac{d}{dt}e^{(da)t}\phi|_{t=0} = (da)\cdot\phi$$

となるから,Diffeomorphism による作用と,d-exact な b-field 作用の接ベクトルは,

$$\{\varepsilon \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}} | \varepsilon = d_L(v+a), v \in T, a \in T^*\}$$

となる.

変形空間

$$\mathcal{M} = \{\varepsilon \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}} | d_L\varepsilon + \frac{1}{2}[\varepsilon,\varepsilon]_L = 0\}/\sim$$

の形式的接空間

$$T_{[\mathcal{J}]}\mathcal{M} = \{\varepsilon \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}} | d_L\varepsilon = 0\}/\{d_L E | E \in \wedge^1 \bar{L_{\mathcal{J}}}\}$$

を考えるとき, 次が成立する.

Theorem 2.17.
Lie algebroid complex

$$0 \to \bar{L_{\mathcal{J}}} \to \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}} \to \wedge^3 \bar{L_{\mathcal{J}}} \to \cdots$$

のコホモロジー群を $H^p(\bar{L})$ とおくとき,

$$T_{[\mathcal{J}]}\mathcal{M} = H^2(\bar{L})$$

となる.

一般化された複素構造の変形理論において, その障害理論は次のような形をとる.

Problem 2.18.
$[\varepsilon] \in H^2(\bar{L})$ に対して,

$$d_L\varepsilon(t) + \frac{1}{2}[\varepsilon(t),\varepsilon(t)]_L = 0,\ \frac{d}{dt}\varepsilon(t)|_{t=0} = \varepsilon,\ \varepsilon(0) = 0$$

なる $\varepsilon(t) \in \wedge^2 \bar{L_{\mathcal{J}}}$ が存在するか?

しかし, 実は次が成り立つ.

Theorem 2.19.

$$H^3(\bar{L}) = 0$$

ならば, 変形の障害は消える.

つまり,$H^3(\bar{L})$ が変形の障害空間になっている. 更に, 通常の複素構造から定まる G-complex structure の場合に, 次のような分解が知られている.

Theorem 2.20.
$$H^2(\bar{L}) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, T^{1,0}) \oplus H^0(X, \wedge^2 T^{1,0})$$

ここで,$H^1(X, T^{1,0})$ は通常の複素構造の変形に,$H^2(X, \mathcal{O}_X)$ は *B-field* 変形に,$H^0(X, \wedge^2 T^{1,0})$ は *Poisson* 構造の変形に, それぞれ対応している.

参考文献

[1] De Wilde, M., Lecomte, P., *Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products.Existence,equivalence,derivations.*, in Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications,Kluwer Academic Publishers, (1988)

[2] Fedosov, B., *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J.Diff.Geom., **40** (1994), 213–238.

[3] Fedosov, B., *Deformation Quantization and Index Theory*, Mathematical Topics 9, Akademie Verlag (1996).

[4] Goto,R., *Unobstructed K-deformations of Generalized Complex Structures and Bihermitian Structures*, arXiv:0911.2958

[5] Gualtieri, M., *Generalized complex geometry*, Math.DG/0703298.

[6] Hitchin,N., *Generalized Calabi-Yau manifolds*, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Univ Press(2003)

[7] Kontsevich, M., *Deformation Quantization of Poisson Manifolds*, Lett. Math. Phys., **66** (2003), 157–216.

[8] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A., *Weyl manifolds and deformation quantization*, Adv. Math., **85** (1991), 224–255.