telescopic 三浦曲線に対応するシグマ関数の構成

綾野孝則*

大阪大学理学研究科数学専攻

第 7 回城崎新人セミナーに参加し、発表させて頂きありがとうございました。運営委員の方々、参加者の方々に深く御礼を申し上げます。

1 背景

$\mathbb{F}_q$ を位数 $q = p^n$(p: 素数) の有限体、X を $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影代数曲線、$Pic^0(X)$ を X の Jacobi 多様体とする。$Pic^0(X)$ の $\mathbb{F}_q$ 有理点全体 $Pic^0_{\mathbb{F}_q}(X) := \{D \in Pic^0(X) | \sigma D = D, \forall \sigma \in Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)\}$ は有限群になる。その位数 $\#Pic^0_{\mathbb{F}_q}(X)$ を高速に求めることは、代数曲線暗号の安全性を確認する上で重要になる。Mestre は算術幾何平均を用いて、$p = 2$ で X が超楕円曲線のときまで適用できる非常に高速な方法 (AGM 法) を提案した。本研究では AGM 法をより一般の代数曲線に拡張できないか検討してきた。AGM 法は $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線を $\mathbb{Z}_q$ 上の代数曲線に持ち上げる。そして、体の埋め込み $\mathbb{Q}_q \to \mathbb{C}$ を固定して、$\mathbb{C}$ 上の代数曲線とみなす。ここで、$\mathbb{Q}_q$ は 2 進体 $\mathbb{Q}_2$ の n 次不分岐拡大、$\mathbb{Z}_q$ はその付値環である。一般化には次の問題を解決することが必要になる。

問題

X を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線とする。X はコンパクト Riemann 面と思える。X の種数を g とし、X のホモロジー群 $H_1(X, \mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \le i \le g}$ でその交点数が $\alpha_i \circ \alpha_j = \beta_i \circ \beta_j = 0$, $\alpha_i \circ \beta_j = \delta_{ij}$ となるものをとる。ただし、δ_{ij} は Kronecker のデルタである。そして、$\{u_i\}_{1 \le i \le g}$ を X 上の正則な 1 次微分形式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\Gamma(X, \Omega^1_X)$ の基底とする。そして、$2\omega_1 = (\int_{\alpha_j} u_i)_{ij}$, $2\omega_2 = (\int_{\beta_j} u_i)_{ij}$, $\tau = \omega_1^{-1}\omega_2$ とする。このとき、$\{\theta(\epsilon, \tau)^2\}_{\epsilon \in \{0, \frac{1}{2}\}^g}$ を X の定義方程式からいかに求めるか? ($\theta(z, \tau)$ はテータ関数といい、2 章で定義する。)

X が超楕円曲線の場合には次のようにして求めることが出来る。

Theorem 1 ([**R**][**MU**]) (Thomae-Fay)

$X : y^2 = (x - a_1) \cdots (x - a_{2g+2})$, $S = \{a_1, a_3, \cdots, a_{2g+1}\}$, $U_i = \{a_{2i-1}, a_{2i}\}$ とする。また、$\epsilon \in \{0, 1/2\}^g$ に対して、$U_\epsilon = \cup_j U_j$ とする。ここで、j は ϵ の 0 でない成分をわたる。このとき、ある $\zeta \in \mathbb{C}$ が存在して、任意の $\epsilon \in \{0, 1/2\}^g$ に対して、次が成立する。

$$\theta_{0,\epsilon}(0, \tau)^4 = \pm\zeta \prod_{a_i, a_j \in S \circ U_\epsilon, i<j} (a_i - a_j) \prod_{a_i, a_j \notin S \circ U_\epsilon, i<j} (a_i - a_j) \tag{1.1}$$

ここで、$S \circ U_\epsilon = S \cup U_\epsilon - S \cap U_\epsilon$ である。

本研究ではこの Thomae-Fay の公式を三浦曲線に一般化出来ないか検討する。

*t-ayano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2 テータ関数 ([MU])

$g \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_g := \{A \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tA = A, Im(A) > 0\}$ とする。$\mathcal{H}_g$ を Siegel 上半空間という。$z \in \mathbb{C}^g,\ \tau \in \mathcal{H}_g$ に対して、

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} exp(\pi i\ {}^t n \tau n + 2\pi i\ {}^t n z) \tag{2.1}$$

とする。τ を固定すると、$\theta(z,\tau)$ は z の近傍で絶対一様収束し、z の関数として、$\mathbb{C}^g$ 上の正則関数になる。$\theta(z,\tau)$ をテータ関数という。テータ関数は、$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^g$ に対して、

$$\theta(z + m_1 + \tau m_2, \tau) = exp(-\pi i\ {}^t m_2 \tau m_2 - 2\pi i\ {}^t m_2 z)\theta(z,\tau) \tag{2.2}$$

を満たす $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数として、定数倍を除いて特徴づけられる。

また、$a, b \in \mathbb{R}^g$ に対して、指標付きテータ関数を次のように定義する。

$$\theta_{a,b}(z,\tau) = exp(\pi i\ {}^t a \tau a + 2\pi i\ {}^t a(z+b))\ \theta(z + \tau a + b, \tau) \tag{2.3}$$

2.1 Abel-Jacobi の定理 ([MU])

X を種数 g のコンパクト Riemann 面とする。X には極大座標近傍系が入っているものとする。$\{\alpha_i, \beta_j\}_{1 \le i,j \le g}$ を X の 1 次 $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群 $H_1(X,\mathbb{Z})$ の基底で、交点数が $\alpha_i \circ \alpha_j = \beta_i \circ \beta_j = 0,\ \alpha_i \circ \beta_j = \delta_{ij}$ となるものとする。$\{u_i\}_{1 \le i \le g}$ を X 上の 1 次正則微分形式全体のなすベクトル空間 $\Gamma(X, \Omega^1_X)$ の基底、$2\omega_1 = (\int_{\alpha_j} u_i)_{ij},\ 2\omega_2 = (\int_{\beta_j} u_i)_{ij}$ とする。ω_1 は正則行列で、$\tau = \omega_1^{-1}\omega_2$ とすると、$\tau \in \mathcal{H}_g$ となる。τ は $\{u_i\}$ のとり方に依らず、$\{\alpha_i, \beta_j\}$ のみによって決まる。τ を X の周期行列、$\theta(z,\tau)$ を X に対応するテータ関数という。$Jac(X) = \mathbb{C}^g / L_\tau,\ L_\tau = \tau\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g$ とし、X の解析的 Jacobi 多様体という。また、X の代数的 Jacobi 多様体を $Pic^0(X)$ とすると、次の同型が成立する。(Abel-Jacobi の定理)

$$I : Pic^0(X) \simeq Jac(X) \qquad \sum_{i=1}^d p_i - \sum_{i=1}^d q_i \to \sum_{i=1}^d \int_{q_i}^{p_i} v \qquad v = {}^t(v_1, \cdots, v_g) = (2\omega_1)^{-1}\ {}^t(u_1, \cdots, u_g) \tag{2.4}$$

3 prime form ([JOH][A])

$P \in X,\ f(P) = \theta(z + \int_{P_0}^P v)$ とすると、これは X 上で恒等的に 0 でないなら、g 個の零点 $Q_1, \cdots, Q_g$ を持ち、$\delta = z + \sum_{i=1}^g \int_{P_0}^{Q_i} v$ は z のとり方によらない。$\delta \in Jac(X)$ を Riemann 定数という。δ は $(P_0, \{\alpha_i, \beta_i\})$ のみで決まる量である。このとき、$\delta_0 \in Pic^{g-1}(X),\ 2\delta_0 = K_X$ となるものがあって、$I(\delta_0 - (g-1)P_0) = \delta$ となる。ここで、K_X は X の標準因子である。δ_0 は $\{\alpha_i, \beta_i\}$ のみから決まる量であり、Riemann 因子という。α を non-singular odd half period とする。ここで、α が non-singular とは、ある i があって、$\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial z_i}(0) \neq 0$、odd とは $\theta_\alpha(z)$ が奇関数、half period とは $\alpha \in \frac{1}{2}L_\tau$ であることをいう。そのような α は存在する。α に対応する正則直線束を $\mathcal{L}_\alpha$、δ_0 に対応する正則直線束を L_0、$L_\alpha = \mathcal{L}_\alpha \otimes L_0$ とする。$\otimes$ は群 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ の積である。このとき、唯一つの X の因子 $D = p_1 + \cdots + p_{g-1}$ が存在して、$\alpha = I(D - \delta_0)$ となる。そして、$\omega = \sum_{i=1}^g \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial z_i}(0) v_i$ とすると、$div(\omega) = 2D$ となる。L_α の正則切断 h_α で $h_\alpha^2 = \omega$ となるものが、唯一つ定まる。$\tilde{h}_\alpha$ を h_α を $\tilde{X}$ に引き戻したものとする。$\tilde{X}$ は X の普遍被覆空間である。

Definition 2

$$E(\tilde{p_1},\tilde{p_2})=\frac{\theta_\alpha(\int_{\tilde{p_1}}^{\tilde{p_2}}v)}{\tilde{h}_\alpha(\tilde{p_1})\tilde{h}_\alpha(\tilde{p_2})},\quad \tilde{p_1},\tilde{p_2}\in\tilde{X} \tag{3.1}$$

$E(\tilde{p_1},\tilde{p_2})$ を prime form という。

4 シグマ関数 ([A])

$H^1(X,\mathbb{C})$ を X 上の有理型閉形式全体を有理型完全形式全体で割った商空間とする。$dim_{\mathbb{C}}H^1(X,\mathbb{C})=2g$ となる。$H^1(X,\mathbb{C})$ 上の交叉形式を、$\eta,\eta'\in H^1(X,\mathbb{C})$ に対して、

$$\eta\circ\eta'=\frac{1}{2\pi i}\int_X\eta\wedge\eta'=\sum Res(\int^x\eta)\eta'(x) \tag{4.1}$$

と定義する。2 番目、3 番目の式は η,η' の代表元をとって議論しているが、これは代表元のとり方には依らない。また、3 番目の式は $(\int^x\eta)\eta'(x)$ の留数の和である。このとき、Riemann の双 1 次関係式と呼ばれる次の公式が成立する。

$$2\pi i\eta\circ\eta'=\sum_{i=1}^{g}(\int_{\alpha_i}\eta\int_{\beta_i}\eta'-\int_{\alpha_i}\eta'\int_{\beta_i}\eta) \tag{4.2}$$

次の 3 つのデータを用意する。

$<1>$ $H_1(X,\mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_i,\beta_i\}_{1\le i\le g}$ で、$\alpha_i\circ\alpha_j=\beta_i\circ\beta_j=0,\ \alpha_i\circ\beta_j=\delta_{ij}$ となるもの

$<2>$ $H^1(X,\mathbb{C})$ の基底 $\{u_i,r_i\}_{1\le i\le g}$ (u_i は正則) で $u_i\circ u_j=r_i\circ r_j=0, u_i\circ r_j=\delta_{ij}$ となるもの

$<3>$ X の基点 P_0

$$2\omega_1=(\int_{\alpha_j}u_i),\ \ 2\omega_2=(\int_{\beta_j}u_i),\ \ -2\eta_1=(\int_{\alpha_j}r_i),\ \ -2\eta_2=(\int_{\beta_j}r_i) \tag{4.3}$$

とする。このとき、$\forall m_1,m_2\in\mathbb{Z}^g$ に対して、

$$\sigma(u+2\omega_1m_1+2\omega_2m_2)=exp(\pi i\ {}^tm_1m_2+2\pi i({}^t\delta'm_1-{}^t\delta''m_2)+{}^t(2\eta_1m_1+2\eta_2m_2)(u+\omega_1m_1+\omega_2m_2))\sigma(u) \tag{4.4}$$

を満たす $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数 $\sigma(u)$ をシグマ関数という。ここで、$\delta',\delta''\in\mathbb{R}^g$ は $(X,\{\alpha_i,\beta_i\},P_0)$ に対応する Riemann 定数 δ に対して、$\delta=\tau\delta'+\delta''$ を満たす唯一つのものである。($\tau=\omega_1^{-1}\omega_2$)

Proposition 3

$$\sigma(u)=exp(\frac{1}{2}\ {}^tu\eta_1\omega_1^{-1}u)\ \theta_{\delta',\delta''}((2\omega_1^{-1})u,\tau) \tag{4.5}$$

とすると、$\sigma(u)$ は (4.4) を満たす。また、(4.4) を満たす $\sigma(u)$ は定数倍を除いてこの形に書ける。

5 三浦曲線 ([MI][JOE])

この節では、三浦氏により提案された代数曲線の定義方程式の表現方法 (三浦曲線) について説明する。

$\mathbb{N}'=\mathbb{N}\cup\{0\}$、$A_t=(a_1,\cdots,a_t)\in\mathbb{N}^t,\ t\ge2,\ \{a_1,\cdots,a_t\}$ の最大公約数は 1、$<A_t>=a_1\mathbb{N}'+\cdots+a_t\mathbb{N}'$、$\Psi:\mathbb{N}'^t\to<A_t>\quad(n_1,\cdots,n_t)\to\sum_{i=1}^t a_in_i$ とする。$\mathbb{N}'^t$ の順序 $\succ$ を次で定義する。

$M=(m_1,\cdots,m_t)\,,N=(n_1,\cdots,n_t)\in\mathbb{N}'^t$ に対して、

$M \succ N \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Psi(M) > \Psi(N)$ 又は、$\Psi(M) = \Psi(N)$ のときは $m_1 = n_1,\ \cdots,\ m_{i-1} = n_{i-1},\ m_i < n_i\ \exists i$

$\succ$ は整列順序になる。$B(A_t) \subseteq \mathbb{N}'^t$ を $B(A_t) = \{M(a) \mid a \in < A_t >\}$ とする。
ここで、$M(a) \in \mathbb{N}'^t$ とは $\Psi(M) = a$ を満たす $M \in \mathbb{N}'^t$ の中で $\succ$ の意味で最小の元とする。
$V(A_t) = \{L \in \mathbb{N}'^t - B(A_t) \mid L = M + N,\ M \in \mathbb{N}'^t - B(A_t),\ N \in \mathbb{N}'^t \Rightarrow N = (0, \cdots, 0)\}$ とする。
$V(A_t)$ は有限集合で、$2 \leq i \leq t$ について $\{0\}^{i-1} \times \mathbb{N}' \times \{0\}^{t-i} \cap V(A_t)$ は唯一つの元からなる。これを N_i とする。$SV(A_t) := \{N_i \mid 2 \leq i \leq t\}$ とする。$\{f_M \mid M \in V(A_t)\} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_t]$ を次の条件 (D1),(D2) を満たすようにとる。

(D1)　$f_M = X^M + \alpha_L X^L + \sum_N \alpha_N X^N$
ここで、$X^M = {X_1}^{m_1} \cdots {X_t}^{m_t}$,　$M = (m_1, \ldots, m_t)$,　$\alpha_L, \alpha_N \in \mathbb{C},\ \alpha_L \neq 0$
L は $\Psi(M) = \Psi(L)$ となる $B(A_t)$ の元、N は $\{N \in B(A_t) \mid \Psi(N) < \Psi(M)\}$ をわたる。

(D2)　$Span_{\mathbb{C}}\{X^N \mid N \in B(A_t)\} \cap (\{f_M \mid M \in V(A_t)\}) = \{0\}$
ここで、$Span_{\mathbb{C}}\{X^N \mid N \in B(A_t)\}$ は $\{X^N \mid N \in B(A_t)\}$ で生成される $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間、
$(\{f_M \mid M \in V(A_t)\})$ は $\{f_M \mid M \in V(A_t)\}$ で生成される、$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_t]$ のイデアルである。

$I = (\{f_M \mid M \in V(A_t)\})$ とすると、I は素イデアルになる。$R = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_t]/I$、$R$ の商体を K とすると、K の $\mathbb{C}$ 上の超越次数は 1 となる。よって、I により、$\mathbb{C}^t$ のアフィン代数曲線が定義される。これが非特異である場合を考える。これに一つの点 ∞ を付け加えて、非特異完備代数曲線に出来る。これを三浦曲線という。実際に三浦曲線を構成する際、(D1) を満たすようにとるのは簡単だが、それが (D2) を満たすかどうかを判定するのは難しい。しかし $SV(A_t) = V(A_t)$ ならば、(D1) を満たすように $\{f_M \mid M \in V(A_t)\}$ をとれば、(D2) は自動的に満たされる。$\{a_1, \cdots, a_i\}$ の最大公約数を d_i としたとき、$2 \leq \forall i \leq t$ で $\dfrac{a_i}{d_i} \in \dfrac{a_1}{d_{i-1}}\mathbb{N}' + \cdots + \dfrac{a_{i-1}}{d_{i-1}}\mathbb{N}'$ となるとき、A_t を telescopic という。A_t が telescopic であること、$SV(A_t) = V(A_t)$ が成り立つこと、$\sharp V(A_t) = t - 1$ となることは全て同値である ([JOE])。telescopic な A_t から得られる三浦曲線を telescopic 三浦曲線という。$t = 2$ なら常に telescopic である。任意の非特異完備代数曲線は、ある三浦曲線と双有理同値になる。

三浦曲線の例
(1) $t = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3$　のとき
$f(x, y) = y^2 + (\alpha_1 x + \alpha_0)y + \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 = 0$ で定義される曲線（楕円曲線）
(2) $t = 2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 2g + 1$ のとき
$f(x, y) = y^2 + (\alpha_g x^g + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)y + \beta_{2g+1} x^{2g+1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0 = 0$ で定義される曲線
（種数 g の超楕円曲線）
(3) $t = 2,\ a_1 = n,\ a_2 = s,\ (n, s) = 1,\ 2 \leq n < s$ のとき
$f(x, y) = y^n - x^s - \sum_{ni+sj<ns} \lambda_{ij} x^i y^j$ で定義される曲線 ((n, s) 曲線)

6　主結果

シグマ関数を定義する際に与えた 3 つのデータの内、$< 2 >$ だけは任意のコンパクト Riemann 面で取れるとは限らない。中屋敷氏は、(n, s) 曲線に対して $< 2 >$ が取れることを示し ([A])、対応するシグマ関数を代数的に表示している。本研究は、telescopic 三浦曲線 ((n, s) 曲線を含む) について $< 2 >$ が取れることを示し、対応するシグマ関数を代数的に表示した。これにより telescopic 三浦曲線において、テータ関数を代数的に表示するある種の公式が得られたことになる。得られた結果は次である。X を $\{f_1(X_1, \cdots, X_t), \cdots, f_{t-1}(X_1, \cdots, X_t)\}$ で定義される telescopic 三浦曲線とする。

Theorem 4

$$A_1 := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_{t-1}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_{t-1}}{\partial X_t} \end{pmatrix}_{X_i=x_i} \tag{6.1}$$

とする。このとき、$P := \{\frac{x_1^{k_1}\cdots x_t^{k_t}}{detA_1}dx_1 \mid (k_1,\cdots,k_t) \in B(A_t),\ 0 \leq a_1k_1+\cdots+a_tk_t \leq 2g-2\}$ は $\Gamma(X,\Omega_X^1)$ の基底である。x_i は射影 $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_t] \to \mathbb{C}[X_1,\cdots,X_t]/ < f_1,\cdots,f_t >$ による X_i の像である。

P の元を ∞ での位数が小さいものから順に $u_1,\cdots,u_g$ とする。

Theorem 5

$f_i(X_1,\cdots,X_t) = \sum_{j=1}^t h_{ij}(X_1,\cdots,X_t,Y_1,\cdots,Y_t)(X_j-Y_j) + f_i(Y_1,\cdots,Y_t)$

$$B_1 := \begin{pmatrix} h_{12}\ldots h_{1t} \\ \ldots \\ h_{t-12}\ldots h_{t-1t} \end{pmatrix}_{X_i=x_i,Y_i=y_i} \qquad \Omega(x,y) = \frac{detB_1}{(x_1-y_1)detA_1}dx_1 \tag{6.2}$$

とする。$\hat{\omega} = -d\Omega(x,y) + \sum_{i=1}^g u_ir_i$ に対して、$\hat{\omega}(x,y) = \hat{\omega}(y,x)$ を満たすように X 上の第２種微分形式 r_i を選ぶことができる。そのとき、$\{u_i,r_i\}_{1\leq i\leq g}$ は $u_i\circ u_j = r_i\circ r_j = 0, u_i\circ r_j = \delta_{ij}$ を満たす $H^1(X,\mathbb{C})$ の基底である。ここで、$x=(x_1,\cdots,x_t), y=(y_1,\cdots,y_t)$ とした。

Theorem 6

ある $c\in\mathbb{C}$ が存在して、任意の $\tilde{p}_i \in \tilde{X}$ に対して次が成り立つ。

$$\sigma(\sum_{i=1}^g \int_{\tilde{\infty}}^{\tilde{p}_i} u) = c\cdot\frac{\prod_{i=1}^g \tilde{E}(\tilde{\infty},\tilde{p}_i)^g}{\prod_{i<j}\tilde{E}(\tilde{p}_i,\tilde{p}_j)} det(f_i(p_j))_{1\leq i,j\leq g} \tag{6.3}$$

ここで、$\{f_1,\cdots,f_g\}$ は ∞ のみに高々$2g-1$ 位の極を持つ X 上の有理型関数のなすベクトル空間の基底、$\tilde{E}(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2)^2 = \frac{(x(p_2)-x(p_1))^2}{detA_1(p_1)detA_1(p_2)}exp(\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\tilde{p}_1^{(i)}}^{\tilde{p}_2^{(i)}}\int_{\tilde{p}_1}^{\tilde{p}_2}\hat{\omega})$、$\tilde{X}$ は X の普遍被覆空間である。また射影 $\pi:\tilde{X}\to X$ に対して、$\pi(\tilde{p}_i)=p_i,\ \pi(\tilde{\infty})=\infty$ とした。

$\tilde{E}(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2) = -E(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2)\sqrt{u_g(p_1)}\sqrt{u_g(p_2)}exp(\frac{1}{2}\int_{\tilde{p}_1}^{\tilde{p}_2} {}^tu\cdot\eta_1\omega_1^{-1}\cdot\int_{\tilde{p}_1}^{\tilde{p}_2}u)$ とした。

参考文献

[A] Atsushi Nakayashiki, On Algebraic Expressions of Sigma Functions for (n,s) Curves

[B] H.F.Baker, Abelian Functions, Abel's theorem and the allied theory of theta functions, Cambridge Mathematical Library

[G1] R.C.Gunning, Lectures on Riemann Surfaces

[G2] R.C.Gunning, Lectures on Vector Bundles over Riemann Surfaces

[JOE] Joe Suzuki, Miura Conjecture on Affine Curves, Osaka Journal of Mathematics, no. 1, 187-196, March 2007

[JOH] John D.Fay, Theta Functions on Riemann Surfaces, Lecture Notes in Mathematics,Springer,

[MI] 三浦晋示, 代数幾何に基づく誤り訂正符号の研究, 東京大学博士論文 (1997)

[MU] David Mumford, Tata Lectures on Theta I,II

[R] Reynald Lercier,David Lubicz, A Quasi Quadratic Time Algorithm for Hyperelliptic Curve Point Counting, The Ramanujan Journal,March (2005)

[S] 第１５回整数論サマースクール　種数の高い代数曲線と Abel 多様体　報告書