シューベルト多項式とベキシラリー置換

安東雅訓*

岡山大学自然科学研究科

私は対称群周辺の組合せ論を専門に勉強しています。今回は自身の修士論文の内容を書くことにします。

1 準備

n の分割 λ のヤング図形の各マス目に数字を入れたものを盤という。特に、列で弱増加、行で強増加となるものを準標準盤、1〜n の数字を一つずつ行列に増加となるように入れたものを標準盤という。

標準盤

1	2	4	6
3	7		
5	9		
8			

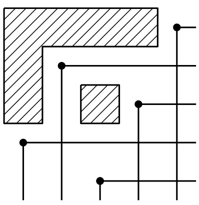
準標準盤

1	1	2	3
2	3		
4	4		
5			

$\lambda = (4, 2, 2, 1)$

$\omega \in \mathfrak{S}_n$ についてローテ図形を次で定義する

$$D(\omega) = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n, \omega(i) > j, \omega^{-1}(j) > i\}$$



$\omega = 52413$

$\omega \in \mathfrak{S}_n$ のローテ図形が、行・列の置換でヤング図形の形にできるとき、ω をベキシラリーという。できたヤング図形に対応する分割を $\lambda(\omega)$ で表す。$\omega \in \mathfrak{S}_n$ について、$\omega = s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_l}$ と表すことができるとき、$a = a_1 a_2 \ldots a_l$ を ω の詞と呼ぶ。l が転倒数と等しいとき特に最短詞と呼ぶ。ω の最短詞の集合を $R(\omega)$ で表す。

定義 1.1. T を準標準準盤とする。T に次のルールで整数 n のマスを加えて新しい準標準準盤を作ることをクヌース挿入という。まず T の 1 行目を見て、n 以下の整数しかなければ n のマスを 1 行目の右端に加える。n より大きい数があれば、それらの中で一番左にあるもの p をどけて、そこに n を入れる。次の行で、p について同じ操作をする。これを繰り返して最終的に準標準準盤 S が得られ、S の数字は T の数字と n からなる。

定義 1.2. 次の行挿入をコクセター-クヌース (以下 C-K) 挿入という。
基本はクヌース挿入 、ただし、n をある行に挿入するとき、その行に $n, n+1$ がすでにあれば、その行は変えずに次の行に $n+1$ を挿入 する。

* m_ando@math.okayama-u.ac.jp

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \leftarrow 2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \leftarrow 1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array} \leftarrow 1 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \leftarrow 2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

定理 **1.3.** (エーデルマン-グリーン対応 [EG])
$a{\in}R(\omega)$ に対して対応、

$$a \longmapsto (P^*(a), Q^*(a))$$

を考える。ここで P^* は a の数字を順に C-K 挿入してできた盤、Q^* は挿入で増えたマスに 1 〜順に数字をいれた成長履歴。このとき、$\lambda(P^*(a)) = \lambda(Q^*(a))$。$P^*$ は行、列で強増加、Q^* は標準な盤となる。

詞 a, a' が、C-K 関係式

$$\begin{cases} x\ x+1\ x & \leftrightarrow \quad x+1\ x\ x+1 & \\ \quad yxz & \leftrightarrow \qquad yzx & x < y \leq z,\ |x-z| \geq 2 \\ \quad xzy & \leftrightarrow \qquad zxy & x \leq y < z,\ |x-z| \geq 2 \end{cases}$$

でうつるとき a と a' は C-K 同値であるといい、$a \approx a'$ と書く。盤 T の行を下から、行の中の数字を左から読んでできる詞をボトムアップと呼び $\rho(T)$ と書く、T が準標準なら $P^*(\rho(T)) = T$ となる。

2　主結果

定理 **2.1.** (A.)
$\omega{\in}\mathfrak{S}_n$ がベキシラリーのとき $\forall a, a'{\in}R(\omega)$ について、$P^*(a) = P^*(a')$.

系 **2.2.** ベキシラリー置換の最短詞は C-K 関係式で移りあう。

3　証明

補題 **3.1.** ベキシラリー置換 ω について、ω の最短詞の個数は $\lambda(\omega)$ の標準盤の個数と等しい。

補題 **3.2.** $\omega \in \mathfrak{S}_n$,$a \in R(\omega)$ とすると $a \approx \rho(P^*(a))$、特に同じ ω の最短詞。

よって、エーデルマン-グリーン対応での行き先 (P, Q) について、P が同じ盤のものは同じ置換の詞から対応している。ここで、Q が同じ型の標準盤すべてを動けばベキシラリー置換については最短詞の個数が標準盤の個数と等しいので、これで最短詞と対応するペアを全て取り尽くしたことになる。

4　おまけ

それよりも証明やバックグラウンドをもう少し詳しくしたほうがいいと思うが、最近遊んでいる式の一つを書いておきます。

$$\sum_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})\in\mathcal{P}(n)} m_k = \sum_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})\in\mathcal{P}(n)} d_k(\lambda)$$

ここで $d_k(\lambda) = \sharp\{i | m_i \geq k\}$.

参考文献

[EG] P. Edelman, C. Greene *Balanced tableaux*; Adv. Math.; **63(1)** (1987),42–99,

[GV] I. Gessel, G. Viennot *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. Math. **58(3)**(1985), 300–321

[M] L. Manivel *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci*, Amer.Math. Soc. (2001)