

Milnor-Wood 不等式への微分幾何学的アプローチ

足立 真訓*

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D1

Milnor-Wood 不等式とは、双曲閉曲面上の S^1 束が平坦構造を持つ時にその Euler 数が制限されることを主張する不等式です。40 年ほど前の古典的な定理 [M][W2] ですが、現在に至るまで円周の同相群、葉層構造、Riemann 面と Teichmüller 空間、調和束などの観点から研究が深められ続けています。この報告では、城崎新人セミナーでの講演の流れに沿って、元々の Milnor-Wood 不等式についてサーベイを行います。特に Frankel [F], Thurston [T] による葉層構造の調和測度を用いた不等式の必要性証明に注目してご紹介します。

多様体論、葉層構造論の概念については森田先生の教科書 [森 1][森 2] を参照してください。細部については、修士論文 [足] にまとめましたので、そちらをご覧ください。

城崎ではとても愉快的な数日間を過ごさせていただきました。多くの方と話ができて、大変有益でもありました。この場をお借りして、運営委員の方々にお礼申し上げます。

1 主張と例

はじめに Milnor-Wood 不等式の主張と、典型例をご説明します。考える空間は種数 $p \geq 2$ の有向閉曲面 Σ 上の有向 S^1 束 $\pi: B \rightarrow \Sigma$ です。底空間を固定した時に、考えるべき対象は位相的には \mathbb{Z} だけあります：

命題 1.1 ([森 1, 定理 6.22]). 任意の位相多様体 M に対して、対応

$$\{M \text{ 上の有向 } S^1 \text{ 束の同型類} \} \ni (\pi: B \rightarrow M) \longmapsto e(B/M) \in H^2(M; \mathbb{Z})$$

は 1 対 1 の上への対応である。ここで $e(B/M)$ は有向 S^1 束 $\pi: B \rightarrow M$ の Euler 類を表す。特に M が有向閉曲面 Σ の場合、基本類 $[\Sigma]$ とのペアリングで $H^2(\Sigma; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ なので、有向閉曲面上の有向 S^1 束はその Euler 数 $\chi(B/\Sigma) := \langle e(B/\Sigma), [\Sigma] \rangle$ で位相的に分類される。

主張を述べるために葉層構造の概念を説明します。

定義 1.2 (葉層構造). 3 次元位相多様体 B に対し、 $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が B 上の余次元 1 の連続葉層構造であるとは、

- それぞれの L_α は B の余次元 1 部分多様体 (葉と呼ぶ) となっている。
- $B = \coprod_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$ (直和) と分割されている。
- 分割は次の意味で局所的に直積状である。 B の各点に対し、その周りの局所座標系 (U, φ) で $\varphi(U) = V \times T \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ と直積に分かれるものをうまく選ぶ。すると、この座標系内で葉 $L_\alpha \cap U$ の任意の連結成分 P (プレートと呼ぶ) は、一意的に定まる $t \in T$ によって $\varphi(P) = V \times \{t\}$ と横断方向の座標が一定の集合として表される。

の 3 条件が成り立つ時をいう。

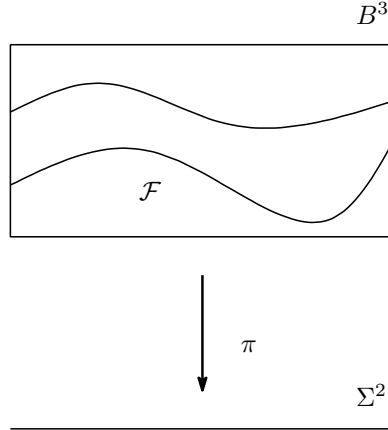
* m08002z@math.nagoya-u.ac.jp

これで主張を述べる準備が整いましたので, Milnor-Wood の不等式を紹介します.

定理 1.3 (Milnor-Wood). Σ を種数 $p \geq 2$ 以上の有向閉曲面, $\pi: B \rightarrow \Sigma$ を有向 S^1 束とする. この時, B 上の余次元 1 の葉層構造 \mathcal{F} で, その任意の葉 L_α について射影 $\pi|_{L_\alpha}: L_\alpha \rightarrow \Sigma$ が被覆写像になるようなもの (平坦構造と呼ぶ) が存在するための必要十分条件は, 不等式

$$|\chi(B/\Sigma)| \leq |\chi(\Sigma)| = 2p - 2$$

で与えられる. ただし $\chi(\Sigma)$ は Σ の Euler 標数を表す.



自明束 $\Sigma \times S^1 \rightarrow \Sigma$ は, $L_\alpha = \Sigma \times \{\alpha\}$ ($\alpha \in S^1$) と定めることで, もちろん平坦構造をもちます. 不等式も $\chi(\Sigma \times S^1/\Sigma) = 0$ なので, もちろん満足します. 考える対象は \mathbb{Z} だけありますが, そのうち底空間の Euler 数で bound される有界な範囲の対象だけが平坦構造を持ち得るわけです.

ぎりぎりの所に現れるのが, 次の例です.

例 1.4 (単位接束の Anosov 葉層). 有向閉曲面 Σ の種数 p は 2 以上なので, Σ は双曲計量 g をもちます. この双曲計量 g に関する単位接束 $T^1\Sigma := \{v \in T\Sigma \mid g(v, v) = 1\}$ を考えます. Poincaré-Hopf の定理より $\chi(T^1\Sigma/\Sigma) = \chi(\Sigma)$ なので, 単位接束は Milnor-Wood の不等式を等号で満足しています. 一方, 以下の手順で単位接束に平坦構造が入ることが分かります.

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathbb{D} \simeq \mathbb{D} \times S^1 & \xrightarrow{\Gamma} & T^1\Sigma \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\Gamma} & \Sigma \end{array}$$

1. Σ の普遍被覆双曲多様体は, $\tilde{\Sigma}$ は Poincaré 円板 $\mathbb{D} := (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, 4dz \cdot d\bar{z}/(1 - |z|^2)^2)$ と同型です.
2. 被覆変換 Γ は \mathbb{D} に等長に作用しているので, その作用は一次分数変換で表され, $\partial\mathbb{D} \simeq S^1$ に作用が延長しています. そこで $\gamma \in \Gamma$ を $(z, t) \in \mathbb{D} \times S^1$ に $\gamma \cdot (z, t) := (\gamma \cdot z, \gamma \cdot t)$ と同時に作用させます.
3. 自明 S^1 束 $\mathbb{D} \times S^1 \rightarrow \mathbb{D}$ を Γ の作用で割ります. 自明 S^1 束の平坦構造を誘導することで, 平坦 S^1 束 $\mathbb{D} \times S^1/\Gamma \rightarrow \Sigma$ を得ます.
4. $\mathbb{D} \times S^1/\Gamma \rightarrow \Sigma$ は単位接束と同型です. このことは Poincaré 円板の単位接束が

$$T^1\mathbb{D} \ni [(p, v)] \mapsto [(p, \lim_{t \rightarrow \infty} \exp_p(tv))] \in \mathbb{D} \times S^1$$

と同一視できることから分かります*1.

*1 あるいは対角集合 $\Delta_{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ の法束は接束と同一視できることから分かります.

注意 1.5. 各葉が底空間を被覆するような全空間の葉層構造 \mathcal{F} を平坦構造と呼びました. その理由は \mathcal{F} を用いて, 束 $B \rightarrow \Sigma$ での平行移動を経路のホモトピー類にだけ依存するように*2定めることができるからです. ファイバーの点 ξ をとり, $\pi(\xi) = \gamma(0)$ を始点とする底空間の曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Sigma$ にそって, ξ を平行移動することを考えます. このためには, ξ を含む葉 $L_{\alpha(\xi)}$ を考え, 被覆写像 $\pi: L_{\alpha(\xi)} \rightarrow \Sigma$ について, 曲線 γ を持ち上げ, 持ち上げ $\bar{\gamma}$ の終点 $\bar{\gamma}(1)$ により平行移動の結果を定めれば OK です. このようにして γ のホモトピー類に対して定まった平行移動を

$$\tau_{[\gamma]}: B_{\gamma(0)} \rightarrow B_{\gamma(1)}$$

で表します. $p \in \Sigma$ に対して, $\pi^{-1}(p) =: B_p$ と表しています.

注意 1.6. 平坦構造に $U(1)$ の対称性を課す, すなわち $\pi: B \rightarrow \Sigma$ が主 S^1 束で, 葉層構造が $S^1 = U(1)$ の作用で不変となることまで要請すれば $\chi(B/\Sigma) = 0$ となります. これは葉層構造の接分布が主 S^1 束の曲率 0 の接続を定めることから分かります. S^1 束の Euler 数は大域切断の存在のための障害数を表しますが, 主 S^1 束の構造を入れて曲率積分することにより計算ができました.

2 背景と別証明の歴史

この節では, Milnor-Wood の不等式について, どのような研究がなされてきたのか, 次節につながる内容についてご紹介します. これまで様々な一般化や精密化が研究されており, 本稿ではそのごく一部分しか紹介できていないことをお断りしておきます.

2.1 曲面の平坦性

Milnor-Wood の不等式は, 曲面の平坦性の研究の中で発見されました. その由来を訪ねることにします.

曲面論を学ぶ際には, Gauss 曲率が中心的な概念として現れました. その幾何学的な意味は次の意味での曲面の平坦性の特徴づけにありました:

定理 2.1 (Gauss). 2次元 Riemann 多様体がある所, 2次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^2 と局所等長になるための必要十分条件は, Gauss 曲率 K が恒等的に $K \equiv 0$ となることである.

このような意味での平坦性を有向閉曲面に課すと, Gauss-Bonnet の定理より Euler 標数が 0 となること, すなわち閉曲面がトーラスに同相になってしまうことが分かります. では, 曲面の平坦性の意味をゆるめるとどうなるでしょうか. Gauss 曲率が消える計量を持つという条件は, 接続の言葉で言い換えれば, Levi-Civita 接続で平坦*3となるものを持つという条件になります. そこで, 計量との整合性という条件を取り払い「平坦な (Levi-Civita 接続と限らない) アフィン接続を持つ有向閉曲面はトーラスに同相になるか」を問うたらどうなるでしょうか.

この問題を平坦アフィン接続, すなわち接束の平坦接続だけでなく一般の 2次元ベクトル束の平坦接続に一般化することによって解いたのが Milnor でした*4.

定理 2.2 (Milnor, 1958 [M]). Σ を種数 p の有向閉曲面, $E \rightarrow \Sigma$ を 2次元実ベクトル束とする. この時, $E \rightarrow \Sigma$ が平坦接続をもつための必要十分条件は不等式 $|\chi(E/\Sigma)| < p$ を満たすことである. したがって, 接束が平坦接

*2 一方で曲率があると, 2つの経路の囲む図形の曲率積分だけ平行移動の結果がずれました. 馴染みのない方は, Gauss-Bonnet の定理の三角形版を思い起こして下さい.

*3 ベクトル束の接続の平坦性は Riemann 曲率テンソルが消えることと考えます.

*4 当時「平坦対称アフィン接続をもつ有向閉曲面はトーラスになる」は Benzecri により解かれていました. なお, 高次元化した「平坦アフィン接続をもつ有向閉多様体の Euler 標数は 0 か?」という問題 (Chern 予想) は現在も未解決のようです.

続をもつならば $|2p - 2| < p$ すなわち $p = 1$ で Σ はトーラスである.

このような形で, Milnor-Wood の不等式はその原型が発見されました.

2.2 位相的な手法での一般化

Milnor が 1958 年に上述の定理を証明した後, その位相的な手法による証明のアイデアを応用して, Milnor の定理の一般化が何人かの数学者によって行われました. その流れから 2 点紹介します.

A. 1971 年に J. W. Wood は, Milnor の定理を S^1 束の葉層構造の存在の問題ととらえて定理 1.3 の形での一般化^{*5}を行いました [W2]. 考える空間が 2 次元ベクトル束 $E \rightarrow \Sigma$ から S^1 束 $B \rightarrow \Sigma$ に変わっていますが, この読み替えは容易です. 実際, ゼロ切断 0_Σ を取り除きファイバーにスカラー倍として働く乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ の作用で割って, $B := (E \setminus 0_\Sigma)/\mathbb{R}_{>0}$ とみなすことにより読み替えることができます. 本質的に一般化された点は, ホロノミー群が無限次元となっている点です. まだホロノミーを説明していなかったので, ここで定義しておきます.

定義 2.3 (ホロノミー). $\pi : B \rightarrow \Sigma$ を平坦有向 S^1 束とする. 点 $p \in \Sigma$ とファイバー $B_p \simeq S^1$ の同一視を固定する. このとき, 群準同型

$$\rho : \pi_1(\Sigma, p) \ni [\gamma] \mapsto \tau_{[\gamma]}^{-1} \in \text{Homeo}(B_p) \simeq \text{Homeo}^+(S^1)$$

をホロノミー準同型と呼ぶ. ここで $\text{Homeo}^+(S^1)$ は円周の向きを保つ同相写像のなす群を表す. また共役を除いて定まるその像 $\text{Image } \rho \subset \text{Homeo}^+(S^1)$ をホロノミー群と呼ぶ.

Milnor の定理と Wood の定理の比較に戻ると, Milnor の定理の状況ではベクトル束の平坦接続から誘導される葉層構造を考えているので, ホロノミー群が $SL(2, \mathbb{R})$ という有限次元の群に含まれています. しかし Wood の定理では, この制約がはずれています.

B. もう 1 つの Milnor のアイデアに沿う形での一般化は, 1976 年に Sullivan により行われました [S]. Sullivan は Milnor の不等式の次の意味での高次元化を証明しました^{*6}.

定理 2.4 (Sullivan, 1976 [S]). $2n$ 次元閉多様体 M を考える. ある定数 $k(M)$ が存在して, M 上の平坦 $2n$ 次元ベクトル束の Euler 数は, $|\chi(E/M)| \leq k(M)$ と bound される.

この定理では, 具体的な Euler 数の上界の評価は得られず, また評価がある時の平坦構造の存在も示されていません^{*7}. 階数の高い束では S^1 束のように Euler 数だけでは束が決定できないので, 状況が複雑になるのは当然とはいええます.

この Sullivan の定理の証明を分析し, 1982 年に Gromov は有界コホモロジーと単体的体積の 2 つの概念を導入して, Milnor の定理の不等式の必要性のパートと Sullivan の定理を再証明しました [Gr]. 詳細は本稿では解説しませんが, 雰囲気だけご説明しますと,

$$|\chi(E/\Sigma)| = |\langle e(E/\Sigma), [\Sigma] \rangle| \leq \|e(E/\Sigma)\|_\infty \cdot \|[\Sigma] \|_1 \leq \frac{1}{4} \cdot 2|\chi(\Sigma)| < p$$

という計算を行って Milnor の不等式を証明します. $\| \cdot \|_\infty$ は特異コホモロジー類に対する ℓ^∞ セミノルムで平

^{*5} 実際には, さらに向き付けに関する仮定も外しました.

^{*6} Sullivan は Milnor のアイデアを元に証明を行いました. 一方, Sullivan の論文中で Lustzig により別証明も与えられています. M 上の平坦 $2n$ 次元ベクトル束全体を, 先のホロノミー準同型を用いて $\text{Hom}(\pi_1(M), GL(2n, \mathbb{R}))$ の実代数多様体として表すと, その連結成分が有限個であることから不等式が従います.

^{*7} Euler 数の上界のシャープな評価や, Euler 数についての不等式による十分性の記述は現在も分かっていないようです. 最近, 特別な種類の M に対しては上界のシャープな評価が得られています [BGe].

平坦構造の存在からこの factor についての評価が成立します. $\|\cdot\|_1$ は特異ホモロジー類に対する ℓ^1 セミノルムです. 特に基本類に対する値を単体的体積と呼びます. こちらの factor の評価には Σ の双曲構造を本質的に用います.

2.3 Kneser の不等式と調和写像

1970 年代, 1980 年代に位相的な観点から上述のような理解の進展がありました, 一方で微分幾何学的な観点からの進展もありました. 実際の歴史的な順序ではありませんが, 現在の理解に基づいて, この間の研究の進展を紹介します.

切り口となるのは, 曲面間の写像に関する古典的な Kneser の不等式です.

定理 2.5 (Kneser, 1930). Σ, Σ' をそれぞれの種数 $p, p' \geq 2$ の有向閉曲面とする. この時, 任意の連続写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ に対して, 不等式 $|\chi(\Sigma)| \geq |\deg f| |\chi(\Sigma')|$ が成立する.

この不等式は f が正則写像の場合には, Riemann-Hurwitz の公式, あるいは Schwarz-Pick の補題から直ちに証明することができます. しかし, 実際には連続写像 f について証明をする必要があります.

1960 年代には Eells-Sampson の存在定理を始め, 調和写像論が発展しました. その流れの中で 1976 年に Eells と J. C. Wood が調和写像を用いた Kneser の不等式の証明を発表しました [EW1]. 連続写像 f は熱方程式によって調和写像に deform することができます. したがって, Kneser の不等式は調和写像について証明をすればよく, それは調和写像の臨界点の解析によって可能である, というのが彼らの証明です.

この論文中で, Kneser の不等式が Milnor-Wood の不等式の系であることを Lustzig が指摘しています*8. その証明は以下のようなものです.

証明. Σ' 上の単位接束 $T^1\Sigma' \rightarrow \Sigma'$ を考えます. この束には例 1.4 で見たように平坦構造が入っています. そこで写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ による Σ' の単位接束の引き戻し $f^*T^1\Sigma' \rightarrow \Sigma$ を考えると,

$$\begin{array}{ccc} f^*T^1\Sigma' & \longrightarrow & T^1\Sigma' \\ \text{平坦} \downarrow & & \downarrow \text{平坦} \\ \Sigma & \xrightarrow{f} & \Sigma' \end{array}$$

引き戻した束にも平坦構造が入っているので, この束は Milnor-Wood の不等式を満足しています. したがって,

$$|\chi(\Sigma)| \geq |\chi(f^*T^1\Sigma'/\Sigma)| = |\deg f| |\chi(T^1\Sigma'/\Sigma')| = |\deg f| |\chi(\Sigma')|.$$

これは Kneser の不等式に他なりません. □

つまり, Milnor-Wood の不等式は Kneser の不等式の一般化と捉えられます. すると, Kneser の不等式の調和写像による微分幾何学的な証明に倣って, Milnor-Wood の不等式を微分幾何学的に証明できるのではないかと考えられます.

実際にはこのように研究は進まなかったのですが, 現在の視点から述べれば, 1985 年の Diederich-Ohsawa による正則円板束の調和切断の存在定理 [DiO] と Eells-Wood の計算を組み合わせることで, ホロノミー群が $PSL(2, \mathbb{R})$ に含まれる場合*9 については Milnor-Wood の不等式の必要性を証明することができます.

歴史的には, 1987 年の Donaldson [Do], Hitchin [H] による論文の中で, この種の証明が初めて現れました. 彼らは Riemann 面上の自己双対方程式の研究から, Riemann 面上の安定 Higgs 束という対象を見出し, そのモ

*8 Lustzig は脚注 6 でも登場しました.

*9 すなわち正則円板束の境界. $PSL(2, \mathbb{R})$ は単位円板あるいは Poincaré 円板の自己同型群で, 境界の円周に拡張して作用していると考えている.

ジュライを調査しました。そして、Narasimhan-Seshadri の定理の一般化を探す中で、安定 Higgs 束のモジュライの一部が、ホロノミー群が $PSL(2, \mathbb{R})$ に含まれる平坦束に対応していることを調和切断を用いて示しました。この対応により Higgs 束のモジュライの記述を通して、ホロノミーが $PSL(2, \mathbb{R})$ に含まれる平坦構造のモジュライの記述が行われています。この議論を通して見れば、調和切断を用いた Milnor-Wood の不等式の必要性の証明、さらにはモジュライの記述による十分性の証明がなされています。

3 調和測度による必要性の証明

このような先行研究の下、1990 年代に Frankel [F] と Thurston [T] が独立に調和測度を用いて Milnor-Wood の不等式の必要性の証明ができることを指摘しました*¹⁰。以下、この証明のアイデアをご紹介します。

はじめに鍵となる概念である調和測度を説明します。まずは定義をします。

定義 3.1 (調和測度). B を位相多様体, $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}$ を B 上の葉層構造で各葉に C^2 級微分構造が連続に入っているものとする. $g = \{g_\alpha\}$ を各葉 L_α 上の Riemann 計量 g_α で B 上で連続であるものとする. g_α を用いて、各葉上で定まるラプラシアンを Δ_α で表す. 各葉上で一斉に Δ_α を作用させることにより、 M 上の関数に対し作用するラプラシアンを Δ_g で表す. この時、 B 上の非負値 Borel 測度 μ が調和であるとは、超関数の意味で $\Delta_g \mu = 0$, すなわち任意のコンパクト台を持ち、葉に沿って C^2 級である関数 f に対し、 $\int_M \Delta_g f(x) \mu(dx) = 0$ が常に成り立つことをいう。

この概念は 1983 年に葉層構造の力学系の研究の中で Garnett [Ga] により見出されました。流体における質量のように、力学系を定量的に調べるために測度を用いることは一般的な考えです。とくに力学系の不変測度を用いた研究はこれ以前から広く行われていましたが、不変測度は力学系によっては常に存在するとは限りません。この不変測度を一般化したものが調和測度です*¹¹。調和測度については空間 B がコンパクトの場合であれば、どんな葉層構造や葉に沿う Riemann 計量に対しても存在することが Hahn-Banach の定理による非構成的に確かめられます。

Milnor-Wood の定理の証明では、平坦葉層構造の調和測度を利用します。単位接束の場合は、この調和測度は以下のように書き下されます。

例 3.2. Poincaré 円板 \mathbb{D} 上の単位接束 $T^1\mathbb{D} \simeq \mathbb{D} \times S^1 \ni (z, \theta)$ を考え、自明束としての表示から定まる平坦葉層構造を入れる。計量は各葉ごとの Poincaré 計量を用いる。この計量つき葉層構造の調和測度は、Poisson 核

$$P_z(\theta) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

を用いて、 $\mu = P_z(\theta) \text{vol}(z) \lambda(\theta)$ と定数倍を除き表される。ここで vol は Poincaré 計量に関する体積測度、 λ は Lebesgue 測度を表す。

証明のアイデアの紹介に入る前に、証明中の評価に必要な一般的な不等式を述べます。

補題 3.3 (等周不等式). \mathbb{R}^2 内の求長可能な閉曲線 γ について、その弧長を ℓ , ある 1 点と曲線上の点を結ぶ線分が掃く領域の符号付き面積を A とおくと、不等式 $|A| \leq \ell^2/4\pi$ が成立する。

補題 3.4 (Harnack の不等式). 単位円板あるいは Poincaré 円板 \mathbb{D} 上の正值調和関数 $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ について、以下の不等式が成り立つ。

*¹⁰ Frankel の論文はプレプリントのままで公開されていません。Thurston の指摘は現在に至るも執筆中のままの原稿の中でなされました。共にレフェリーによるチェックは受けておらず、細部には不明確な点がありましたが、修論にまとめる際に彼らのアイデアは正しいことを確認しました。

*¹¹ 不変測度は調和測度になります。

- $|\log h(z) - \log h(w)| \leq d(z, w)$ for any $z, w \in \mathbb{D}$.
- $\|d \log h\|(z) \leq 1$ for any $z \in \mathbb{D}$.

ただし、2点 z, w の間の Poincaré 距離を $d(z, w)$ で、1形式 ω の Poincaré 計量によるノルムを $\|\omega\|$ で表した。

それでは、証明のアイデアを紹介します。

証明のアイデア. Milnor-Wood の不等式の必要性を議論するので、有向 S^1 束 $B \rightarrow \Sigma$ と平坦葉層構造 \mathcal{F} が与えられています。 Σ の種数 p は 2 以上なので、 Σ には双曲構造を固定しておきます。 束に主 S^1 束の構造をうまく与え、平坦葉層構造を利用して主束接続をうまく選び、束の Euler 数 $\chi(B/\Sigma)$ を曲率積分として評価します。以下で概説するように曲率 K が $|K| \leq 1$ と一様に評価できる主束接続を見つけることができます。すると、

$$|\chi(B/\Sigma)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} |K| d\text{vol} \leq \frac{1}{2\pi} \text{vol}(\Sigma) = |\chi(\Sigma)|$$

と Milnor-Wood の不等式が導出できます。ここで最後の等号は Gauss-Bonnet の定理です。

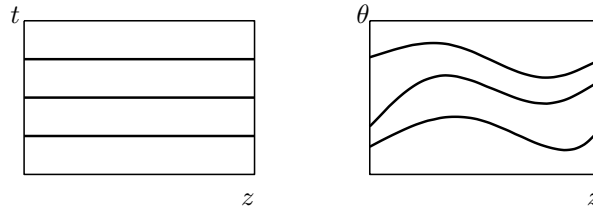
問題はこのような議論のできる主束座標系と主束接続の構成です。この構成に調和測度を用います。底空間 Σ の Poincaré 計量を \mathcal{F} の各葉に引き戻すことで、 \mathcal{F} を計量つき葉層構造とみなします。全空間 B がコンパクトであることから、調和測度 μ が存在します。 μ を底空間上の Poincaré 計量による体積測度と各ファイバー B_z 上の測度 μ_z の積に分解します。このようにして“調和に”変動するファイバー S^1 の測度の族 $z \mapsto \mu_z$ を得ます。

この測度を各ファイバー上で積分することによって新しいファイバー座標を定め、主束座標系を構成します^{*12}。また、この測度により \mathcal{F} の各葉が定める接分布を平均化することで、主束接続^{*13}を作ります。

こうして得た主束接続の曲率の評価に、等周不等式^{*14}と Harnack の不等式を用います。実際に計算をしてみます。点 $p \in U$ の周りの正規座標系 $(U, z = x + iy)$ をとります。 U 上の局所自明化を 2 種類とります。1つは平坦葉層を自明化するものです。 $(z, t) \in U \times S^1 \simeq \pi^{-1}(U)$ と座標をとる時、葉が t 座標一定の曲面で表されます。もう1つは主束としての自明化です。 $(z, \theta) \in U \times S^1 \simeq \pi^{-1}(U)$ と座標をとります。 θ 座標系では各葉は調和関数のグラフ $\theta = \phi(z, t) := \mu_z([0, t])$ として表されています。 \mathcal{F} の接分布を、

$$\omega = d\theta - \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy =: d\theta + \omega(z, \theta) dx + \eta(z, \theta) dy$$

と 1 形式で表します。



この接分布 ω を $\mu_z (= d\theta/2\pi, \text{主束座標の定義より})$ で平均化して得られる主束接続形式は、

$$\bar{\omega} = d\theta + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(z, \theta) d\theta \right) dx + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(z, \theta) d\theta \right) dy$$

^{*12} この構成が適用できるためには、 \mathcal{F} の任意の葉が稠密葉になっていることを要請する必要があります。それ以外のケースについては、このケースに帰着して Milnor-Wood の不等式を証明できます。

^{*13} ファイバーに横断的な接分布で、主束の S^1 作用について不変なものが主束接続を定めました。

^{*14} と呼ぶのは少し大きすぎで、実際には μ_z の Fourier 級数展開と呼んだ方が適切のようです。Hurwitz による等周不等式の証明を思い起こして下さい。

です. この曲率形式 Ω を Frobenius の定理を用いて計算すると,

$$\pi^*\Omega = -d\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\eta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) d\theta \cdot dx \wedge dy$$

です*¹⁵. この積分は閉曲線 $(\omega(\theta), \eta(\theta))$ の囲む面積を表しています. 等周不等式を用いると,

$$|K(p)| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^2} d\theta \right)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \|d \log \frac{\partial \phi}{\partial t}\| d\theta \right)^2$$

です. 最後に $\partial \phi / \partial t$ が正值調和関数であることから Harnack の不等式を用いれば,

$$|K(p)| \leq \frac{1}{4\pi^2} (2\pi)^2 = 1$$

となり, 曲率の評価が完成します. □

注意 3.5. 最後にこの証明の興味深い点について, いくつか注意をして本稿を終わります. 読んでいただき, ありがとうございます.

- 束の Euler 数の評価を, 曲率すなわち Euler 類の有界性評価と, 底空間の体積評価に分けて証明している. この証明は, Gromov による Milnor の不等式の証明の微分幾何版といえる.
- 調和写像による証明は, ホロノミーが $PSL(2, \mathbb{R})$ に含まれる場合にしか適用できなかったが, この証明はホロノミーが無次元の場合にも適用できる微分幾何学的な証明である.
- 調和写像による証明は, Stokes の公式を原理とする臨界点の解析により評価を行った. 一方, この証明は Harnack の不等式という各点ごとの評価によった証明になっている. 正則写像の場合の Kneser の不等式の証明に対比して述べれば, Riemann-Hurwitz の公式を用いた証明ではなく, Schwarz-Pick の補題を用いた証明にあたる.

参考文献

- [BGe] Bucher, M.; Gelander, T., *Milnor-Wood inequalities for manifolds locally isometric to a product of hyperbolic planes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **346** (2008), no. 11-12, 661–666.
- [C] Calegari, D., *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*, Oxford University Press, 2007.
- [DiO] Diederich, K.; Ohsawa, T., *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **21** (1985), no. 4, 819–833.
- [Do] Donaldson, S. K., *Twisted harmonic maps and the self-duality equations*, Proc. London Math. Soc., (3) **55** (1987), no. 1, 127–131.
- [EW1] Eells, J.; Wood, J. C., *Restrictions on harmonic maps of surfaces*, Topology, **15** (1976), no. 3, 263–266.
- [F] Frankel, S., *Harmonic Analysis of surface group representations to $\text{Diff}(S^1)$ and Milnor type inequalities*, Prépublication de l'École Polytechnique, **1125** (1996).
- [Ga] Garnet, L., *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion*, J. Funct. Anal., **51** (1983), 285–311.
- [Gr] Gromov, M., *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **56** (1982), 5–99.

*¹⁵ この辺りの計算の正当化にも Harnack の不等式を用います.

- [H] Hitchin, N. J., *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc., (3) **55** (1987), no. 1, 59–126.
- [M] Milnor, J., *On the existence of a connection with curvature zero*, Comment. Math. Helv., **32** (1958), 215–223.
- [S] Sullivan, D., *A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds*, Comment. Math. Helv., **51** (1976), no. 2, 183–189.
- [T] Thurston, W. P., *Three-manifolds, Foliations and Circles II*^{*16}, unfinished manuscript, 1998?.
- [W2] Wood, J. W., *Bundles with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helv., **46** (1971), 257–273.
- [足] 足立真訓, 「Milnor-Wood の不等式の調和測度を用いた証明について」^{*17}, 名古屋大学修士論文, 2010.
- [森 1] 森田茂之, 『微分形式の幾何学』, 岩波書店, 2005.
- [森 2] 森田茂之, 『特性類と幾何学』, 岩波書店, 2008.

^{*16} [C] に Example 4.6 として転載されている.

^{*17} 複素解析学ホームページ 修士・博士論文アーカイブ (<http://www.cajpn.org/refs/thesis.html>) に掲載予定.