$\mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ 上のSchrödinger方程式の線型安定性

山崎 陽平*

京都大学理学研究科数学教室

城崎新人セミナーでは 2 次の非線形項をもつ Schrödinger 方程式:

$$\text{(NLS)} \qquad i\partial_t u = -\Delta u - |u|u, \quad t \in \mathbf{R}, x \in X,$$

の線形安定性について講演した．報告集では講演の内容をまとめて記載する．ここで, 空間次元は $X = \mathbf{R}^N$ or $\mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ を考える．さらに $\mathbf{T}_L = \mathbf{R}/2\pi L\mathbf{Z}$, $L > 0$ である．

非線形 Schrödinger 方程式はボース・アインシュタイン凝縮や非線形光学などで用いられる方程式である。非線形 Schrödinger 方程式にはその非線形効果により, bound state と呼ばれる特殊な解が存在ことがある。これら bound state には安定性とばれる概念が存在する。自然界で観測される波動現象の多くは安定な bound state によって記述できると考えられている。本研究の目的はこの bouded state の安定性を調べることにある。特に今回は 1 次元モデルと 2 次元モデルの "間" と考えられる $\mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ について考察し、方程式が 1 次元モデルから離れるとき（L を大きくするとき）に安定性がどのように変化するのかを考察する．今回の (NLS) 方程式は簡素化されたモデル方程式であり、具体的に記述する物理現象があるわけではないが bouded state の安定性を紹介するにはわかりやすいモデルであると考え、今回はこのモデルについて考察する。

1 保存量と対称性

(NLS) には対称性と呼ばれる不変性が存在する。代表的な対称性に平行移動対称性

$$\tau(x)u(\cdot) = u(\cdot - x)$$

とゲージ対称性

$$G(\theta)u = e^{i\theta}u$$

がある。

(NLS) の解 $u(t)$ はこれらの対称性について不変であり, $\tau(x)u(t)$, $G(\theta)u(t)$ は再び (NLS) の解になる．

また, (NLS) には保存量と呼ばれる時間発展に依らず不変な量である保存量が存在する。これらの保存量は方程式の対称性から得られる。(NLS) にはエネルギー

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_X |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{3}\int_X |u|^3 dx$$

とチャージ

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_X |u|^2 dx$$

と呼ばれる保存量が存在する。また、エネルギーは平行移動対称性から得られ、チャージはゲージ対称性から得られる．ここで、(NLS) の解 $u(t)$ について

$$E(u(t)) = E(u(0)), \quad Q(u(t)) = Q(u(0))$$

*y-youhei@math.kyoto-u.ac.jp

をみたす。

$E(u(t)) = E(u(0))$ を形式的に計算すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\partial_t E(u(t)) &= \partial_t \left(\frac{1}{2} \int_X \nabla u(t) \overline{\nabla u(t)} dx - \frac{1}{3} \int_X |u(t)| u(t) \bar{u}(t) dx \right), \\
&= \left(\partial_t \frac{1}{2} \int_X -\Delta u(t) \bar{u}(t) dx - \frac{1}{3} \int_X |u(t)| u(t) \bar{u}(t) dx \right), \\
&= \int_X \left(-\Delta u(t) - |u(t)| u(t) \right) \partial_t \bar{u}(t) dx, \\
&= i \int_X |-\Delta u(t) - |u(t)| u(t)|^2 dx = 0
\end{aligned}$$

さらに, これらの保存量は対称性に対して不変である. 即ち,

$$E(G(\theta)u) = E(\tau(x)u) = E(u), \quad Q(G(\theta)u) = Q(\tau(x)u) = Q(u), \quad \theta \in \mathbf{R}, x \in X$$

をみたす。

分散型方程式である (NLS) には以上のような保存量と対称性が存在し、今回はこれらの保存量が意味を持つエネルギー空間 $H^1(X)$ でこの方程式を考える。

2 Bound state と安定性

(NLS) には bound state と呼ばれる特殊な解が存在する。これらの解は複素方向に一定速度で回転している解であり、対称性によるの変換を行うことにより、時間定常解とみなせる。

(NLS) $$i\partial_t u = -\Delta u - |u|u, \quad t \in \mathbf{R}, x \in X.$$

(NLS) の解 $u(t)$ に対して変換 $v(t) = e^{-i\omega t}u(t)$ する. このとき、$v(t)$ は

$(\mathrm{NLS})_\omega$ $$i\partial_t v = -\Delta v + \omega v - |v|v, \quad t \in \mathbf{R}, x \in X,$$

を満たす. ただし, $\omega > 0$ である.

定義 2.1. (NLS) の解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が振動数 ω の bound state であるとは ϕ_ω が

$$-\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|\phi = 0, \quad x \in X,$$

の非自明解である時言う. 即ち、ϕ_ω が $(\mathrm{NLS})_\omega$ の時間定常解であることを意味する。

ここで振動数 ω の bound state は周期 $2\pi/\omega$ の時間周期解である。次に bound state の安定性を定義する。安定性にはリャプノフの意味の軌道安定性と線形作化作用素の固有値による線形安定性がある。まずは軌道安定性について説明する.

定義 2.2. Bound state $e^{i\omega t}\phi$ が軌道安定であるとは以下を満たすことである. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\|u_0 - \phi\|_{H^1} < \delta$ ならば u_0 を初期値とする (NLS) の解 $u(t)$ が $t \in [0, \infty)$ で存在して

$$\inf_{\theta \in \mathbf{R}, x \in X} \left\| u(t, \cdot) - e^{i\theta}\phi(\cdot - x) \right\|_{H^1} < \varepsilon.$$

ここで,

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_X |u|^2 dx + \int_X |\nabla u|^2 dx.$$

また, $e^{i\omega t}\phi$ が軌道安定でないとき軌道不安定という.

軌道安定性は対称性を除けば bound state は (NLS) の解写像について安定であることを示している。

注意 2.3. ソボレフ空間 $H^1(X)$ は保存則

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_X |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{3}\int_X |u|^3 dx,$$
$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_X |u|^2 dx$$

が有界になる最大の空間でありエネルギー空間と呼ばれる.

注意 2.4. 対称性で割る理由は対称性で割らないと以下のような例により bound state が不安定になるからである。$\forall \varepsilon, \omega > 0$, and $\forall$ bounded state ϕ_ω, $\exists \omega_0 > 0$ and a bounded state ϕ_{ω_0} s.t. $\|\phi_{\omega_0} - \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon i$ and $\omega \neq \omega_0$.

$$\exists t_0 > 0 \text{ s.t. } |e^{i\omega_0 t_0} - e^{i\omega t_0}| > 1.$$

さらに

$$\left\| e^{i\omega_0 t_0}\phi_{\omega_0} - e^{i\omega t_0}\phi_\omega \right\|_{H^1} \geq \|\phi_\omega\|_{H^1} - \varepsilon.$$

次に線形安定性について説明する。線形安定とは (NLS) の解写像を bound state で線形化し、その線形化作用素の固有値を用いて定義するものである.

まず、方程式をアクションと呼ばれる汎関数で記述する。(NLS) のアクションを

$$\begin{aligned} S_\omega(u) :&= E(u) + \omega Q(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_X |\nabla u|^2 dx + \frac{\omega}{2}\int_X |u|^2 dx - \frac{1}{3}\int_X |u|^3 dx. \end{aligned}$$

で定める。すると

$$Ju = iu$$

を用いて

$$(\text{NLS})_\omega \qquad i\partial_t u = -\Delta u + \omega u - |u|u, \quad t \in \mathbf{R}, x \in X,$$

は

$$\partial_t u = -JS'_\omega(u)$$

とあらわせる. ただし, “ $'$ ” は実 Hilbert 空間上の Frechét 微分を表す.

このとき bound state $e^{i\omega t}\phi_\omega$ は $(\text{NLS})_\omega$ の時間定常解であったから $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の線形化方程式は

$$(\text{LNLS})_\omega \qquad \partial_t u = -JS''_\omega(\phi_\omega)u$$

と表せる. この線形化方程式を用いて次のように線形安定性は定義される。

定義 2.5. $e^{i\omega t}\phi_\omega$ を (NLS) の bound state とする. このとき $e^{i\omega t}\phi_\omega$ が線形不安定であるとは $-JS''_\omega(\phi_\omega)$ が実部正の固有値をもつ時言う. また, そうでないとき線形安定という.

注意 2.6. 線形安定性は次のことを意味する。

- 線形不安定 $\Longrightarrow$ $(\text{LNLS})_\omega$ が指数増大する解をもつ.
- 線形安定 $\Longrightarrow$ $(\text{LNLS})_\omega$ が指数増大する解をもたない.

軌道不安定性はしばしば線形不安定性を用いて示される。本来の目標は軌道不安定性を示すことであるが今回は線形不安定性を示すことに焦点を絞る。

3 $\mathbf{R}^N$ 上の (NLS) の安定性

$1 \le N \le 5$ に対して

$$-\Delta\phi + \omega\phi - |\phi|\phi = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

には正値球対称解 ψ_ω が存在することが [1] などで知られており, bound state $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は ground state と呼ばれる.

また, $N \ge 6$ のときは自然な積分方程式を満たす非自明解が存在しない.

$\mathbf{R}$ 上の (NLS) の ground state には以下の安定・不安定性が [2], [3], [9] により知られている.

定理 3.1. $X = \mathbf{R}^N$ とし $e^{i\omega t}\psi_\omega$ を (NLS) の ground state とする.

(i) もし $1 \le N \le 3$ ならば $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は軌道安定である.

(ii) もし $4 \le N \le 5$ ならば $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は軌道不安定である.

今回は $N = 1$ のときに安定であった $\mathbf{R}$ の ground state について $\mathbf{T}$ には恒等的に関数を拡張し、 $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ での (NLS) の bound state とみなし、この bound state の安定性について考える.

4 Known result

先行結果について紹介する.

3 次の非線形項をもつ Schrödinger 方程式

(CNLS)
$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^2 u, \quad t \in \mathbf{R}, x \in X$$

について考える. ここで (NLS) と同様に $\mathbf{R}$ 上の (CNLS) にも ground state が存在し, $e^{i\omega t}\tilde{\psi}_\omega$ と表せる. 特に, $\tilde{\psi}_\omega$ は

$$-\partial_x^2\phi + \omega\phi - |\phi|^2\phi = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

をみたす. 解 $e^{i\omega t}\tilde{\psi}_\omega$ を y 方向に恒等的に拡張して, $\mathbf{R}^2$ または $\mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ 上の関数とみなす.

この bound state については以下の Rousset-Tzvetko[5],[6] による先行結果がある.

定理 4.1 ([5],[6])**.** 以下が成立する.

(i) $X = \mathbf{R}^2$ ならば $e^{i\omega t}\tilde{\psi}_\omega$ は軌道不安定である.

(ii) $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ かつ L が十分大きければ $e^{i\omega t}\tilde{\psi}_\omega$ は軌道不安定である.

これらの軌道不安定性は線形不安定性を用いてうまく近似解を構成することにより導かれている.

5 $\mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ 上の (NLS) の線形安定性

$\mathbf{R}$ 上の (NLS) の ground state を ψ_ω とし y に関して恒等的に拡張する. すなわち,

$$\psi_\omega(x, y) = \psi_\omega(x), \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$$

とみなす。このとき $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は $\mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ 上の (NLS) の bound state になる. さらに、

$$L_\omega := \frac{2}{\sqrt{5\omega}}.$$

とおく。

このとき次が成り立つ。

定理 5.1. $X = \mathbf{R} \times \mathbf{T}_L$ とする．このとき以下が成り立つ．

(i) もし $0 < L \leq L_\omega$ ならば $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は線形安定.

(ii) もし $L_\omega < L$ ならば $e^{i\omega t}\psi_\omega$ は線形不安定.

ここで、(NLS) は (CNLS) と違い、非線形項が無限解 Fréchet 微分可能でなく、Rousset-Tzvetkov による近似解の構成を用いた非線形評価が行えないため軌道不安定性は同様に得られないことに注意する。

6 証明の流れ

以下証明の概略を書く。参考として [4], [7], [8] などを参照するとよい。
線形化方程式

$$\partial_t u = -JS''_\omega(\psi_\omega)u \tag{LNLS$_\omega$}$$

について考える．線形化作用素 $-JS''_\omega(\psi_\omega)$ を実 Hilbert 空間の作用素として表現すると

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S''_\omega(\psi_\omega) = (-\Delta + \omega)I + V(x)$$

と表せる。ここで,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} V_1(x) & 0 \\ 0 & V_2(x) \end{pmatrix}$$

である。
次に, y 方向にフーリエ展開に展開し, 線形化作用素 $-JS''_\omega(\psi_\omega)$ を分解する．

$$-JS''_\omega(\psi_\omega)u(x,y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} -J\mathbb{L}(k/L)u_k(x)e^{-iky/L}.$$

ここで,

$$u_k(x) = \int_0^{2\pi L} u(x,y)e^{-iky/L}dy,$$
$$\mathbb{L}(k/L) = (-\partial_x^2 + \omega + (k/L)^2)I + V(x)$$

である。
このとき、ある $k \in \mathbf{Z}$ が存在して $-J\mathbb{L}(k/L)$ が実部正の固有値をもつことと $-JS''_\omega(\psi_\omega)$ が実部正の固有値をもつことは同値である．従って, $-J\mathbb{L}(k/L)$ の固有値を調べればよい。
一般論 ([4]) により、$-J\mathbb{L}(k/L)$ について以下の性質が知られている。

- $-J\mathbb{L}(k/L)$ のスペクトルは実軸と虚軸に対して対称である．
- $-J\mathbb{L}(k/L)$ の $\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0, \mathrm{Im}\,\lambda \geq 0\}$ 上の固有値の数は $\mathbb{L}(k/L)$ の負固有値の数以下である．

次に、ある $L_\omega > 0$ が存在して $\mathbb{L}(1/L_\omega)$ は単純固有値 0 をもつことを示し、これと上の事実をもとに次を導く。

- $0 < L \leq L_\omega$ に対して $-J\mathbb{L}(1/L)$ は実部正の固有値をもたない.

そして、陰関数定理を用いて $\mathbb{L}(1/L_\omega)$ の単純固有値 0 を分岐させ、次を得る。

- $L_\omega < L$ かつ $|L_\omega - L| << 1$ に対して $-J\mathbb{L}(1/L)$ は正の固有値 $\sigma(L)$ をもつ.

そして、得られた正の固有値 $\sigma(L)$ が L について正則な関数に拡張できることを示し、固有値が正則関数であることを用いて次を示す。

- $L_\omega < L$ について $\sigma(L)$ は有界である.
- $L_\omega < L$ について $\sigma(L)$ は 0 から真に離れている.

これらより, $L_\omega < L$ で $-J\mathbb{L}(1/L)$ が実部正の固有値をもつことを示す.

以上により、定理 5.1 が示される。以上の結果の詳細は私の修士論文に書かれている。

7 今後の課題

$0 < L < L_\omega$ のときの軌道安定性については標準的な方法で示される。さらに、最近の研究により $L_\omega < L$ のときの軌道不安定性についても示すことができた。それ故に、$0 < L < L_\omega$ のときについてのみ未解決である。$0 < L < L_\omega$ のときは線形不安定性を用いることができないため軌道不安定性を示すことが困難である。さらに、$0 < L < L_\omega$ のときとは違い、線形化作用素に余分な零固有値が存在し、この零固有値は弱い不安定性を持つため標準的な方法による軌道安定性解析も困難である。

また、今回考察した 1 次元の ground state から作られる bound state 以外の bound state についての安定性は未解決である。特に、L が十分大きいときは lump 解と呼ばれる空間的に局在した解が存在するがこの案な定性については現在未解決である。

8 謝辞

城崎新人セミナーを運営して頂いた運営委員と城崎新人セミナーに協力頂いた組織及び皆様に感謝の意を表する次第である。

参考文献

[1] H. Berestycki, P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, Commun. Math. Phys. **85**, (1981), 549-561.

[2] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics **10**, Amer. Math. Soc., 2003.

[3] T. Cazenave, P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Commun. Math. Phys. **85**, (1982), 549-561.

[4] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II, J. Funct. Anal. **94** (1990), 308-348.

[5] F. Rousset, N. Tzvetkov, Transverse nonlinear instability of solitary waves for some Hamiltonian PDE's, J. Math. Pures. Appl. **90** (2008) 550-590.

[6] F. Rousset, N. Tzvetkov, Transverse nonlinear instability for two-dimensional dispersive models, Ann. I. Poincaré-AN **26** (2009) 477-496.

[7] F. Rousset, N. Tzvetkov, A simple criterion of transverse linear instability for solitary waves, Math. Res. Lett. **17** (2010), no. 1, 157-169.

[8] F. Rousset, N. Tzvetkov, Stability and instability of the KdV solitary wave under the KP-I flow, arXiv:1104.2555v1.

[9] J. Shatah, W. Strauss, Instability of nonlinear bound states, Commun. Math. Phys. **100**, (1985), 173-190.