消散型波動方程式の拡散構造

若杉　勇太*

大阪大学、2012 年 6 月 7 日

第 9 回城崎新人セミナーに参加させて頂きありがとうございました．運営委員の皆様に深く御礼申し上げます．講演では消散型波動方程式の解の拡散現象の研究の歴史的な側面や，偏微分方程式研究で一般的に使われる手法を中心に解説をしましたが，ここでは自分の結果と，講演ではほとんど述べられなかった証明の部分を中心に解説したいと思います．なお，拡散現象についてより詳しい説明が西原氏の論説 [7] にあるので，興味の湧いた方は参考にして頂ければと思います．

1　導入

次の半線形波動方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)b(t)u_t = |u|^p, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで，u は実数値の未知関数で，摩擦項の係数 $a(x), b(t)$ は

$$a(x) = a_0\langle x\rangle^{-\alpha}, \quad b(t) = (1+t)^{-\beta} \quad \text{with} \quad a_0 > 0,\ \alpha, \beta \ge 0,\ \alpha+\beta < 1 \tag{1.2}$$

で与えられているとする．ただし，$\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$ である．初期データ (u_0, u_1) は $H^1(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ に属するとする．さらに非線形項の指数 p は．

$$1 < p \le \frac{n}{n-2} \quad (n \le 3), \qquad 1 < p < \infty \quad (n = 1,2)$$

を満たすとする．

目標は (1.1) の臨界指数を決定することである．ここで臨界指数とは，次の条件を満たすような指数 p_c のことをいう．

$p_c < p \Rightarrow$ 小さい初期値に対し時間大域解が存在

$p < p_c \Rightarrow$（初期値が小さくても）適当な条件を満たす初期値に対し解は有限時間で爆発.

先行研究から，(1.1) の臨界指数は

$$p_c = 1 + \frac{2}{n-\alpha}$$

となることが予想されている．これについては後で述べる．今回，$p > 1 + 2/(n-\alpha)$ の場合に時間大域解の存在が得られたので報告する．しかし，$1 < p \le 1 + 2/(n-\alpha)$ の場合に爆発する解が存在するかどうかは，現在のところ未解決である．

線形の消散型波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + c(t,x)u_t = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1.3}$$

*y-wakasugi@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

に対しては，対応する放物型方程式との興味深い関係からさかんに研究が行われてきた．松村氏 [4] は，定数係数の場合（$c(t,x)\equiv 1$）に解の減衰率が対応する熱方程式のものと同じになることを示した：

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \le C(1+t)^{-\frac{n}{4}}, \quad \|u_t(t)\|_{L^2}+\|\nabla u(t)\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}.$$

また，西原氏 [6] は解表示を用いることにより，定数係数の場合に (1.3) の解が漸近的に対応する熱方程式の解とフリーの波動方程式の和で表されることを示した：

$$u(t) \sim v(t)+e^{-\frac{t}{2}}w(t), \quad t\to\infty$$

ここで，v,w は次の熱方程式とフリーの波動方程式

$$\begin{cases} v_t-\Delta v=0, \\ v(0,x)=u_0(x)+u_1(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt}-\Delta w=0, \\ w(0,x)=u_0(x), w_t(0,x)=u_1(x) \end{cases}$$

の解である．これらの結果は，消散型波動方程式の拡散構造を表している．一方で，望月氏 [5] は変数係数の場合を扱い，$0\le c(t,x)\le (1+|x|)^{-1-\delta}, (\delta>0)$ ならば，解のエネルギーは 0 に減衰せず，さらに解はフリーの波動方程式の解に漸近することを示した．この結果から，係数の遠方での減衰が速すぎると，方程式の拡散構造が失われて双曲性が回復することが分かる．Todorova 氏と Yordanov 氏 [9] は，係数が x のみに依存する場合（$c(t,x)=\langle x\rangle^{-\alpha}, 0\le\alpha<1$）を考え，重み付きエネルギー法を用いて解の精密な減衰評価を求め，拡散構造を示す結果を得た．また，Wirth 氏 [10] により，係数が時間変数にのみ依存する場合（$c(t,x)=(1+t)^{-\beta}, -1<\beta<1$）に，同様に拡散構造を示す結果が得られている．これらの結果から，係数の遠方での減衰率 -1 が，方程式が拡散構造を持つ閾値になっていることが分かる．これが，我々が (1.2) において $\alpha+\beta<1$ という仮定を設ける理由である．

Todorova 氏と Yordanov 氏 [8] は，定数係数の半線形消散型波動方程式

$$u_{tt}-\Delta u+u_t=|u|^p$$

に対し，臨界指数が

$$p_c=1+\frac{2}{n}$$

で与えられることを示した．これは，対応する半線形熱方程式

$$v_t-\Delta v=v^p$$

の臨界指数である藤田指数と一致している．池畠氏，Todorova 氏，Yordanov 氏 [2] は，空間変数に依存する摩擦項を持つ半線形波動方程式

$$u_{tt}-\Delta u+a(x)u_t=|u|^p, \quad a(x)=a_0\langle x\rangle^{-\alpha},\ 0\le\alpha<1$$

に対し，臨界指数を $p_c=1+2/(n-\alpha)$ と決定した．Lin 氏，西原氏，Zhai 氏 [3] は，時間変数に依存する場合

$$u_{tt}-\Delta u+b(t)u_t=|u|^p, \quad b(t)=(1+t)^{-\beta},\ -1<\beta<1$$

に対し，臨界指数を $1+2/n$ と決定した．臨界指数に β が現れない理由は，対応する熱方程式

$$b(t)v_t-\Delta v=v^p$$

において，$T=\int_0^t b(s)^{-1}ds$ という変数の変換を行えば方程式が定数係数に変換されるからである．これらの結果から，(1.1) の臨界指数は $p_c=1+2/(n-\alpha)$ になると予想される．

結果を述べるために記号を準備する．

$$\psi(t,x):=A\frac{\langle x\rangle^{2-\alpha}}{(1+t)^{1+\beta}}, \quad A:=\frac{(1+\beta)a_0}{(2-\alpha)^2(2+\delta)}, \quad B:=\frac{(1+\beta)(n-\alpha)}{2-\alpha}+\beta$$

$$E(t):=\int_{\mathbf{R}^n}e^{2\psi}(u_t^2+|\nabla u|^2)dx, \quad J(t;u):=\int_{\mathbf{R}^n}e^{2\psi}u(t,x)dx$$

ここで δ は正の定数である．

2 主結果

定理 2.1.

$$p > 1 + \frac{2}{n-\alpha}$$

とする．このとき，ある $\delta_0 > 0$ が存在して，任意の $0 < \delta \le \delta_0$ に対して次が成り立つ：

$$I_0^2 := \int_{\mathbf{R}^n} e^{\psi(0,x)}(|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_0|^2)dx$$

が十分小さければ，(1.1) の唯一つの大域解 $u \in C([0,\infty); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ が存在して，

$$\begin{aligned} J(t; u^2) &\le C_\delta (1+t)^{-(1+\beta)\frac{n-2\alpha}{2-\alpha}+\varepsilon} \\ E(t) &\le C_\delta (1+t)^{-(1+\beta)(\frac{n-\alpha}{2-\alpha}+1)+\varepsilon}, \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，C_δ は δ に依存する定数，ε は δ から決まる正数で，

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta) := \frac{3(1+\beta)(n-\alpha)}{2(2-\alpha)(2+\delta)}\delta$$

で与えられる．

3 証明の概略

局所解の存在については，次が知られている：

命題 3.1. 初期データの大きさ I_0^2 に依存したある $T_m \in (0, +\infty]$ が存在して，(1.1) は区間 $[0, T_m)$ 上で唯一つの解 $u \in C([0,T_m); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,T_m); L^2(\mathbf{R}^n))$ を持ち，もし $T_m < +\infty$ ならば，次が成り立つ．

$$\limsup_{t \to T_m} (E(t) + J(t; u^2)) = +\infty.$$

大域解の存在の証明は Todorova 氏と Yordanov 氏らの用いた重み付きエネルギー法による．

$$M(t) := \sup_{0 \le \tau < t} \{(1+\tau)^{B+1-\varepsilon} E(\tau) + (1+\tau)^{B-\varepsilon} J(t; a(x)b(\tau)u^2)\}$$

と定め，$M(t)$ に対するアプリオリ評価を求めれば，上の命題と合わせて大域解の存在が得られる．まず方程式に $e^{2\psi}u_t$ を掛ける．次の式変形は Todorova 氏と Yordanov 氏によるアイデアである．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{2\psi}}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2)\right] - \nabla \cdot (e^{2\psi} u_t \nabla u) \\ &+ e^{2\psi}(a(x)b(t) - \frac{|\nabla\psi|^2}{-\psi_t} - \psi_t)u_t^2 + \frac{e^{2\psi}}{-\psi_t}|\psi_t \nabla u - u_t \nabla\psi|^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{2\psi}\frac{1}{p+1}|u|^p u\right] + 2e^{2\psi}(-\psi_t)\frac{1}{p+1}|u|^p u. \end{aligned} \tag{3.1}$$

また簡単な計算で，

$$-\psi_t > 0, \quad \frac{|\nabla\psi|^2}{-\psi_t} \le \frac{1}{2+\delta}a(x)b(t)$$

が分かる．これに注意しながら (3.1) に $(1+t)^{B+1-\varepsilon}$ を掛け，$[0,t] \times \mathbf{R}^n$ 上積分すると，

$$\begin{aligned} &(1+t)^{B+1-\varepsilon}E(t) - C\int_0^t (1+\tau)^{B-\varepsilon}E(\tau)d\tau \\ \le\ & CI_0^2 + C(1+t)^{B+1-\varepsilon}J(t; |u|^{p+1}) \\ &+ C\int_0^t (1+\tau)^{B+1-\varepsilon}J(\tau; (-\psi_t)|u|^{p+1})d\tau + C\int_0^t (1+\tau)^{B-\varepsilon}J(\tau; |u|^{p+1})d\tau. \end{aligned} \tag{3.2}$$

を得る．この左辺第 2 項目と $M(t)$ の第 2 項目 $(1+t)^{B-\varepsilon}J(t;a(x)b(t)u^2)$ を評価するため，今度は方程式 (1.1) に $e^{2\psi}u$ を掛ける．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{2\psi}(uu_t+\frac{a(x)b(t)}{2}u^2)\right]-\nabla\cdot(e^{2\psi}u\nabla u) \qquad (3.3)\\
&+e^{2\psi}\{|\nabla u|^2+(-\psi_t+\frac{\beta}{2(1+t)})a(x)b(t)u^2+\underbrace{2u\nabla\psi\cdot\nabla u}_{(\sharp 1)}-2\psi_t uu_t-u_t^2\}\\
&=e^{2\psi}uf(u).
\end{aligned}$$

ここで $(\sharp 1)$ に対し Lin-西原-Zhai[3] による次の変形を用いる：

$$e^{2\psi}(\sharp 1)=4e^{2\psi}u\nabla\psi\cdot\nabla u-\nabla\cdot(e^{2\psi}u^2\nabla\psi)+2e^{2\psi}u^2|\nabla\psi|^2+e^{2\psi}(\Delta\psi)u^2.$$

さらに直接計算で

$$\Delta\psi\geq\left(\frac{(1+\beta)(n-\alpha)}{2(2-\alpha)}-\delta_1\right)\frac{a(x)b(t)}{1+t}$$

も分かる．δ_1 は δ から決まる小さい正数である．上の変形で出てきた $4e^{2\psi}u\nabla\psi\cdot\nabla u$ の項は，他の項と Schwarz の不等式を使って次のように処理する．

$$|\nabla u|^2+4u\nabla u\cdot\nabla\psi+(-\psi_t a(x)b(t)+2|\nabla\psi|^2)u^2\geq\delta_2(|\nabla u|^2+|\nabla\psi|^2u^2)+\frac{\delta}{2}(-\psi_t)a(x)b(t)u^2,$$

ここで δ_2 は δ から決まる小さい正数である．以上のことから，(3.3) は次のように変形される：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{2\psi}(uu_t+\frac{a(x)b(t)}{2}u^2)\right]-\nabla\cdot(e^{2\psi}(u\nabla u+u^2\nabla\psi)) \qquad (3.4)\\
&\quad+e^{2\psi}\delta_2|\nabla u|^2\\
&\quad+e^{2\psi}\left(\delta_2|\nabla\psi|^2+\frac{\delta}{3}(-\psi_t)a(x)b(t)+(B-2\delta_1)\frac{a(x)b(t)}{2(1+t)}\right)u^2\\
&\quad+e^{2\psi}(-2\psi_t uu_t-u_t^2)\\
&\leq\ e^{2\psi}uf(u).
\end{aligned}$$

この式に $(1+t)^{B-\varepsilon}$ を掛けて積分するのだが，摩擦項の係数が時間，空間両方の変数に依存しているため，積分する領域を分ける必要がある．$t_0,K\gg 1$ を十分大きいパラメータとして，

$$\mathbf{R}^n=\Omega(t;K,t_0)\cup\Omega(t;K,t_0)^c,\quad \Omega(t;K,t_0):=\{x\in\mathbf{R}^n;(t_0+t)^2\geq K+|x|^2\}$$

と領域を分割する．$\Omega(t;K,t_0)$ 上では $a(x)b(t)\geq a_0(t_0+t)^{-(\alpha+\beta)}$ が，$\Omega(t;K,t_0)^c$ 上では $a(x)b(t)\geq a_0(K+|x|^2)^{-(\alpha+\beta)/2}$ がそれぞれ成り立っている．ν を小さいパラメータとして，Ω 上では $\nu(3.4)+(t_0+t)^{\alpha+\beta}\times(3.1)$，$\Omega^c$ 上では $\nu(3.4)+(K+|x|^2)^{(\alpha+\beta)/2}\times(3.1)$ を行い，$[0,t]\times\mathbf{R}^n$ 上積分すると，

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{B-\varepsilon}J(t;a(x)b(t)u^2)+\int_0^t(1+\tau)^{B-\varepsilon}E(\tau)d\tau\\
&\leq\ CI_0^2+C(1+t)^{B+1-\varepsilon}J(t;|u|^{p+1})\\
&\quad+C\int_0^t(1+\tau)^{B+1-\varepsilon}J(\tau;(-\psi_t)|u|^{p+1})d\tau+C\int_0^t(1+t)^{B-\varepsilon}J(\tau;|u|^{p+1})d\tau.
\end{aligned}$$

の形の不等式を得ることができる．μ を十分小さい正数として，上式に $\mu\times(3.2)$ を加えると，

$$\begin{aligned}
&(t_0+t)^{B+1-\varepsilon}E(t)+(t_0+t)^{B-\varepsilon}J(t;a(x)b(t)u^2)\\
&\leq\ CI_0^2+C(t_0+t)^{B+1-\varepsilon}J(t;|u|^{p+1})\\
&\quad+C\int_0^t(t_0+\tau)^{B+1-\varepsilon}J(\tau;(-\psi_t|u|^{p+1})d\tau\\
&\quad+C\int_0^t(t_0+\tau)^{B-\varepsilon}J(\tau;|u|^{p+1})d\tau.
\end{aligned}$$

あとは右辺を評価していけばよい．ここでは右辺第 2 項目の評価のみ示す．まず Gagliardo-Nirenberg の不等式を適用すると，

$$\begin{aligned} J(t;|u|^{p+1}) &\leq C\left(\int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{4}{p+1}\psi}u^2dx\right)^{(1-\sigma)(p+1)/2} \\ &\quad\times\left(\int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{4}{p+1}\psi}|\nabla\psi|^2u^2dx+\int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{4}{p+1}\psi}|\nabla u|^2dx\right)^{\sigma(p+1)/2} \end{aligned}$$

となる．ただし $\sigma=\frac{n(p-1)}{2(p+1)}$ である．さらに

$$\begin{aligned} e^{\frac{4}{p+1}\psi}u^2 &= (e^{2\psi}a(x)b(t)u^2)a(x)^{-1}b(t)^{-1}e^{(\frac{4}{p+1}-2)\psi} \\ &\leq C(e^{2\psi}a(x)b(t)u^2)\left[\left(\frac{\langle x\rangle^{2-\alpha}}{(1+t)^{1+\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}e^{(\frac{4}{p+1}-2)\psi}\right]\times(1+t)^{\beta+(1+\beta)\alpha/(2-\alpha)} \\ &\leq C(1+t)^{\beta+(1+\beta)\alpha/(2-\alpha)}e^{2\psi}a(x)b(t)u^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{4}{(p+1)}\psi}|\nabla\psi|^2u^2 &\leq C\frac{\langle x\rangle^{2-2\alpha}}{(1+t)^{2+2\beta}}e^{\frac{1}{2}(\frac{4}{p+1}-2)\psi}e^{\frac{1}{2}(\frac{4}{p+1}-2)\psi}e^{2\psi}u^2 \\ &\leq Ce^{\frac{1}{2}(\frac{4}{p+1}-2)\psi}e^{2\psi}\left[\left(\frac{\langle x\rangle^{2-\alpha}}{(1+t)^{1+\beta}}\right)^{\frac{2-2\alpha}{2-\alpha}}e^{\frac{1}{2}(\frac{4}{p+1}-2)\psi}\right] \\ &\quad\times(1+t)^{-2(1+\beta)+(1+\beta)(2-2\alpha)/(2-\alpha)}u^2 \\ &\leq C(t_0+t)^{-2(1+\beta)/(2-\alpha)}e^{\frac{1}{2}(\frac{4}{p+1}-2)\psi}e^{2\psi}u^2 \\ &\leq C(t_0+t)^{-2(1+\beta)/(2-\alpha)}(1+t)^{\beta+(1+\beta)\alpha/(2-\alpha)}e^{2\psi}a(x)b(t)u^2, \end{aligned}$$

に注意すれば，

$$(t_0+t)^{B+1-\varepsilon}J(t;|u|^{p+1})\leq C\left((t_0+t)^{\gamma_1}M(t)^{(p+1)/2}+(t_0+t)^{\gamma_2}M(t)^{(p+1)/2}\right)$$

を得る．ただし，

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= B+1-\varepsilon+\left[\beta+(1+\beta)\frac{\alpha}{2-\alpha}\right]\frac{1-\sigma}{2}(p+1) \\ &\quad+\left[-(1+\beta)\frac{2}{2-\alpha}+\beta+(1+\beta)\frac{\alpha}{2-\alpha}\right]\frac{\sigma}{2}(p+1)-(B-\varepsilon)\frac{p+1}{2} \\ \gamma_2 &= B+1-\varepsilon+\left[\beta+(1+\beta)\frac{\alpha}{2-\alpha}\right]\frac{1-\sigma}{2}(p+1)-(B-\varepsilon)\frac{1-\sigma}{2}(p+1) \\ &\quad-(B+1-\varepsilon)\frac{\sigma}{2}(p+1). \end{aligned}$$

計算すると，この指数が 0 以下になるための p の条件は

$$p>1+\frac{2}{n-\alpha}$$

であることが分かる．以上により，アプリオリ評価

$$M(t)\leq CI_0^2+CM(t)^{\frac{p+1}{2}}$$

が得られる．

参考文献

[1] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, **13** (1966), 109-124.

[2] R. Ikehata, G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for semilinear wave equations with space-dependent potential*, Funkcialaj Ekvacioj, **52** (2009) 411-435.

[3] J. Lin, K. Nishihara, J. Zhai, *Critical exponent for the semilinear wave equation with time-dependent damping*, preprint.

[4] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1976), 169-189.

[5] K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1976/77), 383-390.

[6] K. Nishihara, *$L^p - L^q$ estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z., **244** (2003), 631-649.

[7] K. Nishihara, *Diffusion phenomena of solutions to the Cauchy problems for a damped wave equation*, (Japanese) Sūgaku 62 (2010), no. 2, 164-181.

[8] G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations, **174** (2001), 464-489.

[9] G. Todorova, B. Yordanov, *Weighted L^2-estimates for dissipative wave equations with variable coefficients*, J. Differential Equations, **246** (2009), 4497-4518.

[10] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation. II. Effective dissipation*, J. Differential Equations **232** (2007), 74-103.

[11] Y. Wakasugi, *Small data global existence for the semilinear wave equation with space-time dependent damping*, J. Math. Anal. Appl. **393** (2012) 66-79.

[12] Qi S. Zhang, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333** (2001), 109-114.