balanced dualizing complex を持つ代数について

上山 健太*

静岡大学創造科学技術大学院

この度は第 9 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました．興味深い講演やポスター発表，昼夜を問わず盛んに行われた議論や交流など，とても有意義で刺激的な時間を過ごすことができました．このような機会を与えてくださった運営委員の方々，及び参加者の皆様に深く御礼を申し上げます．

1 導入

1990 年代，M. Artin によって創設された非可換代数幾何学という研究分野における主要な研究課題のひとつに，AS-regular algebra と呼ばれるある種の正則代数の研究が挙げられる．実際，この分野の発端は Artin-Schelter [1] や Artin-Tate-Van den Bergh [2] による 3 次元 AS-regular algebra の分類にあり，現在でも高次元 AS-regular algebra の研究や分類は盛んに行われている．さらに，可換環論の刺激を受け，AS-Gorenstein algebra や AS-Cohen-Macaulay algebra と呼ばれる非可換代数の研究も進められている．

一方，1960 年代に Auslander と Bridger [4], [5] は（可換）ネーター環上の有限生成加群の G 次元（Gorenstein dimension）と呼ばれる不変量の概念を導入・展開させた．G 次元が有限であることは，射影次元が有限であることの一般化になっており，[5] では Auslander-Bridger formula と呼ばれる公式や，有限生成加群の G 次元有限性による Gorenstein 環の特徴付けなど，射影次元のときと類似の非常に良い結果が残されている．今に至るまで G 次元は可換環論を中心に様々な視点から研究されている．

本稿では G 次元と AS-Gorenstein algebra の関係を考察する．この研究で重要な役割を果たしているのが，Yekutieli [15] により導入された balanced dualizing complex である．balanced dualizing complex は非可換代数のホモロジー代数的性質を研究するのに非常に有用なものであり，非可換代数幾何学において，代数が balanced dualizing complex を持つことは自然かつ本質的な条件である．主結果では balanced dualizing complex を持つ代数がいつ AS-Gorenstein algebra になるかを G 次元の観点から特徴付ける．

2 AS-Gorenstein algebras

2.1 準備

本稿を通して，k を体とし，次数付き代数 A と言えば有限生成連結次数付き k 代数とする．ここで，次数付き代数 A が連結であるとは $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ であり $A_0 = k$ を満たすことをさす．このとき A は自由代数（非可換多項式環）$k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ と $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ の両側斉次イデアル I を用いて

$$A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle / I \qquad (\deg x_i \geq 1,\ \forall i \in \{1, \dots, n\})$$

という形で表される．A は唯一の斉次極大両側イデアル $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i\geq 1} A_i$ を持ち，ここでは k と $A/\mathfrak{m}$ を同一視する．これにより k は A 加群構造を持つ．

*f5144004@ipc.shizuoka.ac.jp
The author is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

A を次数付き代数とする．$\mathrm{GrMod}\,A$ で次数付き右 A 加群のなす圏を表し，$\mathrm{grmod}\,A$ で有限生成加群からなる $\mathrm{GrMod}\,A$ の充満部分圏を表す．$\mathrm{GrMod}\,A$ における射は次数を保つ A 準同型である．任意の $M \in \mathrm{GrMod}\,A$ と各 $n \in \mathbb{Z}$ について，$M_{\geq n} := \bigoplus_{i \geq n} M_i \in \mathrm{GrMod}\,A$ とし，$M(n) \in \mathrm{GrMod}\,A$ は $M(n)_i = M_{n+i}$ となる次数付き右 A 加群を表す．さらに任意の $M, N \in \mathrm{GrMod}\,A$ に対し，

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,N) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GrMod}\,A}(M, N(n))$$

とする．また，M の次数付き k ベクトル空間双対 (Matlis 双対) を $M^* := \underline{\mathrm{Hom}}_k(M,k)$ で表すこととする．

$\mathrm{GrMod}\,A^{\mathrm{op}}$ で次数付き左 A 加群の圏を表し，$\mathrm{GrMod}\,A^e$ で次数付き A-A 両側加群の圏を表す．$\mathcal{D}(A)$ で $\mathrm{GrMod}\,A$ の導来圏を表し，$\mathcal{D}_{fg}(A)$ でコホモロジーが有限生成 A 加群である複体のなす $\mathcal{D}(A)$ の充満部分圏を表す．任意の $X \in \mathcal{D}(A)$ に対し，$h^i(X)$ で i 番目のコホモロジー群を表す．任意の $|i| \gg 0$ に対し $h^i(X) = 0$ となるとき，X が有界といい，有界な複体 X のなす $\mathcal{D}(A)$ (resp. $\mathcal{D}_{fg}(A)$) の充満部分圏を $\mathcal{D}^b(A)$ (resp. $\mathcal{D}^b_{fg}(A)$) で表す.

以下本稿を通して，次数付き代数と言えば右かつ左ネーター有限生成連結次数付き k 代数 とする．

定義や説明は後回しにして，次数付き代数について非可換代数幾何学では次のような implication が成り立っていることを紹介しておく．

$$\begin{array}{ccc}
\text{AS-regular algebra} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{AS-Gorenstein algebra} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{balanced Cohen-Macaulay algebra} & \Rightarrow & \text{AS-Cohen-Macaulay algebra} \\
\Downarrow & & \\
\text{balanced dualizing complex を持つ次数付き代数.} & &
\end{array}$$

2.2 AS-regular algebras and AS-Gorenstein algebras

定義 2.1. 次数付き代数 A が次を満たすとき d 次元 AS-regular algebra (resp. AS-Gorenstein algebra) であるという：

- $\mathrm{gldim}\,A = d < \infty$ (resp. $\mathrm{injdim}_A\,A = \mathrm{injdim}_{A^{\mathrm{op}}}\,A = d < \infty$),
- (Gorenstein 条件)

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(k,A) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^i_{A^{\mathrm{op}}}(k,A) \cong \begin{cases} k(\ell) \quad \text{for some } \ell \in \mathbb{Z} & \text{if } i = d, \\ 0 & \text{if } i \neq d. \end{cases}$$

次数付き代数 A が AS-regular ならば，AS-Gorenstein である．また A が可換のとき，$\mathrm{injdim}\,A = d < \infty$ と Gorenstein 条件を満たすことは同値である．つまり，AS-Gorenstein algebra は（可換）Gorenstein 環の良いホモロジー代数的特徴を二つ備えた非可換代数である．ちなみに可換な AS-regular algebra は次数付き多項式環と同型になるので，AS-regular algebra は多項式環の非可換類似だといえる．AS-regular algebra は非可換代数幾何学において重要な研究対象であり，盛んに研究されている.（AS-regular algebra については過去二回の城崎新人セミナーの報告集 [11], [12] を参照.）次数 1 の元で生成された 3 次元の AS-regular algebra の分類でさえ，想像以上に多彩な代数が現れているので，AS-Gorenstein algebra という代数のクラスはとても大きいクラスだと考えられる．

3 Balanced dualizing complexes

balanced dualizing complex を定義するために関手を準備しておく.

$$\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}(-) := \lim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{Hom}}_A(A/A_{\geq n}, -) : \mathrm{GrMod}\, A^e \to \mathrm{GrMod}\, A^e,$$
$$\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}^{\mathrm{op}}}(-) := \lim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(A/A_{\geq n}, -) : \mathrm{GrMod}\, A^e \to \mathrm{GrMod}\, A^e.$$

$\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}$ の導来関手を $\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}$ で表す．また，$\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathfrak{m}}(-) := h^i(\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}(-))$ と定める.

定義 3.1. [15, Definitions 3.3, 4.1] $D \in \mathcal{D}^b(A^e)$ が次を満たすとき dualizing であるという：

- $\mathrm{injdim}_A D < \infty, \mathrm{injdim}_{A^{\mathrm{op}}} D < \infty$,
- D は A 上かつ A^{op} 上有限生成コホモロジーを持つ,
- 自然な射 $A \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(D, D), A \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(D, D)$ が $\mathcal{D}^b(A^e)$ において同型.

さらに dualizing complex D が次を満たすとき balanced であるという：

$$\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}(D) \cong \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}^{\mathrm{op}}}(D) \cong A^* \text{ in } \mathcal{D}^b(A^e).$$

dualizing complex $D \in \mathcal{D}^b(A^e)$ は次の双対

$$\mathcal{D}^b_{fg}(A) \underset{\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(-,D)}{\overset{\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(-,D)}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}^b_{fg}(A^{\mathrm{op}}) \quad (\sim)$$

を引き起こす．$\mathcal{F}(A)$ (resp. $\mathcal{I}(A)$) で平坦次元有限 (resp. 入射次元有限) の複体 X のなす $\mathcal{D}^b_{fg}(A)$ の充満部分圏を表す．このとき Foxby equivalence と呼ばれる, 別タイプの同値

$$\mathcal{F}(A) \underset{\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(D,-)}{\overset{-\otimes^{\mathrm{L}}_A D}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}(A) \quad (\sim)$$

も存在する [9, Theorem 2.5].

balanced という条件は大雑把にいうと，dualizing complex の左右の差をなくすための条件である．balanced dualizing complex は存在すれば，その次数付き代数のホモロジー代数的性質を研究するのに非常に有用なものである．例えば，次の local duality theorem が成立する.

定理 3.2. [14, Theorem 5.1] A を balanced dualizing complex D を持つ次数付き代数とする．そのとき任意の $X \in \mathcal{D}(A)$ に対して，$\mathcal{D}(A^{\mathrm{op}})$ における同型

$$\mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}(X)^* \cong \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}(A)^*)$$

が存在する.

いつ次数付き代数 A が balanced dualizing complex を持つかが問題だが，Van den Bergh による素晴らしい存在定理が存在する．それを紹介するために χ 条件を定義しておく.

定義 3.3. [3, Definition 3.2] A を次数付き代数とする．A が χ 条件を満たすとは，任意の $M \in \mathrm{grmod}\, A$ と $i \in \mathbb{N}$ に対し，$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(k, M)$ が k 上有限次元であることをさす.

可換な次数付き代数 A はすべて χ 条件を満たす．非可換の場合，χ 条件を満たさない次数付き代数が存在することが知られている．非可換代数幾何学の定理は χ 条件に依存していることが多く，本質的な条件である.

定理 3.4. [14, Theorem 6.3] A を次数付き代数とする．

1. A が balanced dualizing complex を持つことと次の 2 条件を満たすことは同値：
   - A が両側で χ 条件を満たす，
   - $\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}$ と $\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}^{\mathrm{op}}}$ がコホモロジカル次元有限.
2. もし A が balanced dualizing complex D を持てば，そのとき $D = \mathrm{R}\underline{\Gamma}_{\mathfrak{m}}(A)^*$.

この結果により，A が balanced dualizing complex を持つという仮定は重要かつ弱い条件であることがわかる．例えば，AS-Gorenstein algebra の次数付き剰余代数はすべて balanced dualizing complex を持つ．特に A が d 次元 AS-Gorenstein algebra ならば，全ての $i \neq d$ について $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ であり，($\mathcal{D}^b(A^e)$ において) $D = \underline{\mathrm{H}}^d_{\mathfrak{m}}(A)^*[d] \cong A_\nu(-\ell)[d]$ となる．但し A_ν とは，次数付き代数自己同型 $\nu \in \mathrm{Aut}_k A$ を用いて，次数付きベクトル空間としての A に新しく作用 $b * x * a := bx\nu(a)$ を定義した A-A 両側加群とする．

ちなみに，A が balanced dualizing complex を持つならば A はある AS-Gorenstein algebra の剰余代数で表せるかという問いは現在でも分かっていない．

次に AS-Cohen Macaulay algebra を紹介する．

定義 3.5. A を次数付き代数とする．

1. $X \in \mathcal{D}^b(A)$ に対して，
$$\mathrm{depth}_A X = \inf\{i \mid \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathfrak{m}}(X) \neq 0\}, \quad \mathrm{ldim}_A X = \sup\{i \mid \underline{\mathrm{H}}^i_{\mathfrak{m}}(X) \neq 0\}$$
と定める．
2. A を A 加群とみなして $\mathrm{depth}_A A = \mathrm{ldim}_A A$ のとき（つまり，ある d が存在して，任意の $i \neq d$ について $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ を満たすとき），A を AS-Cohen-Macaulay algebra という．
3. A-A 両側加群 ω_A が balanced dualizing module であるとは，ある $d \in \mathbb{Z}$ が存在して $\omega_A[d]$ が A の balanced dualizing complex となるものをさす.
4. balanced dualizing module を持つ A を balanced Cohen-Macaulay algebra という．

A が AS-Gorenstein algebra なら，balanced dualizing module $\omega_A = A_\nu$ を持つ．また，A が balanced Cohen-Macaulay algebra ならば，定理 3.4(2) より AS-Cohen-Macaulay algebra となる．これで一応，準備のときに見た implication をすべて確認できた．

4 Gorenstein dimension

結果を述べるためにこの節では G 次元 (Gorenstein dimension) を準備する．（可換の時の）G 次元の詳細は [6] を参照.

$X \in \mathcal{D}^b(A)$ について，$X^\dagger = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, A) \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{op}})$ と定義し，$Y \in \mathcal{D}^b(A^{\mathrm{op}})$ についても同様に，$Y^\dagger = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(Y, A) \in \mathcal{D}(A)$ と定義する．

定義 4.1. 次を条件を満たす複体 X のなす $\mathcal{D}^b_{fg}(A)$ の充満部分圏を $\mathcal{R}(A)$ で表す：

1. $X^\dagger \in \mathcal{D}^b_{fg}(A^{\mathrm{op}})$,
2. 自然な射 $X \to X^{\dagger\dagger}$ が $\mathcal{D}(A)$ において同型.

$\mathcal{R}(A)$ を使って複体の G 次元を定義する．

定義 4.2. A を次数付き代数とし，$X \in \mathcal{D}^b_{fg}(A)$ とする．$X \in \mathcal{R}(A)$ のとき X は G 次元有限（$\operatorname{G-dim}_A X < \infty$）と定義し，$X \notin \mathcal{R}(A)$ のとき X は G 次元無限（$\operatorname{G-dim}_A X = \infty$）と定義する．さらに $X \in \mathcal{R}(A)$ のとき，G 次元の値を

$$\operatorname{G-dim}_A X = \sup\{i \mid h^i(X^\dagger) \neq 0\} < \infty \tag{4.1}$$

で定める．

$X \in \mathcal{D}^b_{fg}(A)$ が与えられたとき，まず X が $\mathcal{R}(A)$ に入っているかどうかで G 次元が有限か無限かを定める．そして有限のときに (4.1) でその値を決めるという定義である．従って，(4.1) の右辺の値が有限だからといって $\operatorname{G-dim}_A X$ が有限とはならないことを注意しておく．

X の射影次元が有限であれば，X の G 次元は有限であり，さらにその値は一致する．つまり，X が G 次元有限であることは X が射影次元有限であることの一般化にあたる概念である．実際，射影次元に関するいくつかの結果に G 次元類似が存在する．例えば可換ネーター局所環に対して成立する，Auslander-Bridger formula と呼ばれる公式や，有限生成加群の G 次元有限性による Gorenstein 環の特徴付けはそれにあたり，それぞれ，Auslander-Buchsbaum formula や有限生成加群の射影次元有限性による正則環の特徴付けの G 次元類似になっている．次の節で述べる本稿の結果はその非可換版を与える．

5 結果

まず非可換版 Auslander-Bridger formula を紹介する．

定理 5.1. [13] A を balanced dualizing complex を持つ次数付き代数とする．$X \in \mathcal{D}^b_{fg}(A)$ に対し，$\operatorname{G-dim}_A X < \infty$ ならば，

$$\operatorname{G-dim}_A X = \operatorname{depth}_A A - \operatorname{depth}_A X.$$

ちなみに，これの射影次元版 (Auslander-Buchsbaum formula) は Jorgensen によってすでに得られている．Jorgensen の Auslander-Buchsbaum formula は上の Auslander-Bridger formula のときも弱い仮定の下で示されている．

定理 5.2. [8, Theorem 3.2] A を χ 条件をみたす次数付き代数とする．$X \in \mathcal{D}^b_{fg}(A)$ に対し，$\operatorname{projdim}_A X < \infty$ ならば，

$$\operatorname{projdim}_A X = \operatorname{depth}_A A - \operatorname{depth}_A X.$$

可換局所環の場合，Auslander-Buchsbaum formula や Auslander-Bridger formula はネーターの仮定のみで成立する．しかし驚くべきことに，Rogalski-Sierra によって，Auslander-Buchsbaum formula が（もちろん Auslander-Bridger formula も）成り立たない非可換ネーター次数付き代数が最近構成された．

定理 5.3. [10] 次を満たす次数付き代数 A が存在する：A はネーターかつ整域かつ Koszul であり，さらに $\operatorname{gldim} A = 4$ まで満たすが，

$$\operatorname{depth}_A A = 2, \quad \operatorname{projdim}_A k = 4, \quad \operatorname{depth}_A k = 0$$

となり Auslander-Buchsbaum formula を満たさない．

つまり，この A はネーターや大域次元有限などの良い性質を満たす代数であるが χ 条件を満さない．よって balanced dualizing complex を持たないし，AS-Gorenstein でない．この結果によって Auslander-Buchsbaum formula や Auslander-Bridger formula にはネーターに加えて χ 条件や balanced dualizing complex を持つといった仮定が必要だということがわかる．

主結果を述べる前に一つ先行結果を紹介しておく．

定理 5.4. [7, Theorem 3.5] A を balanced dualizing complex D を持つ次数付き代数とする．このとき次は同値：

1. A は AS-Gorenstein algebra,
2. $\operatorname{projdim}_A D < \infty$.

次に述べる結果が本稿の主結果であり，AS-Gorenstein algebra の G 次元有限性による特徴付けである．

定理 5.5. [13] A を balanced dualizing complex D を持つ次数付き代数とする．このとき次は同値：

1. A は AS-Gorenstein algebra,
2. 任意の $X \in \mathcal{D}^b_{fg}(A)$ について，$\text{G-dim}_A X < \infty$,
3. 任意の $M \in \operatorname{grmod} A$ について，$\text{G-dim}_A M < \infty$,
4. $\text{G-dim}_A k < \infty$,
5. $\text{G-dim}_A D < \infty$.

最後に注意をいくつか述べておく．可換局所環の場合，1〜4 の同値性はネーターの仮定のみで成立する．しかし，先にあげた Rogalski-Sierra の例を見てみると $\operatorname{projdim}_A k = 4$ なので $\text{G-dim}_A k = 4 < \infty$，それに対して，$A$ は AS-Gorenstein にはなっていない．つまり非可換では $4 \Rightarrow 1$ がネーターだけでは成立しないことを示している．

また，1 と 5 の同値性は定理 5.4 の一般化になっている．

さらに，AS-Gorenstein algebra の定義は自己入射次元有限性も Gorenstein 条件も左右両側の条件で与えられていたことを思い出そう．それに対して，主結果の 2〜5 の条件は右加群の G 次元有限や右加群の複体の G 次元有限という片側の条件で与えられている．つまり，片側の条件から両側の Gorenstein 性が示されている．これは dualizing complex D が balanced であるという仮定のおかげである．

参考文献

[1] M. Artin and W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* **66** (1987), 171–216.

[2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, “Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves” in *The Grothendieck Festschrift*, Vol. I, Progr. Math. **86**, Birkhauser, Boston 1990, 33–85.

[3] M. Artin and J. J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Adv. Math.* **109** (1994), 228–287.

[4] M. Auslander, Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative, Séminaire d’Algèbre Commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67, Texte rédigé, d’après des exposés de Maurice Auslander, Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro. École Normale Supérieure de Jeunes Filles, *Secrétariat mathématique, Paris*, 1967.

[5] M. Auslander and M. Bridger, *Stable module theory*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 94 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969.

[6] L. W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, Lecture Notes in Mathematics 1747, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[7] Z.-C. Dong and Q.-S. Wu, Non-commutative Castelnuovo-Mumford regularity and AS-regular algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 122–136.

[8] P. Jørgensen, Non-commutative graded homological identities, *J. London Math. Soc.*(2) **57** (1998), 336–350.

[9] I. Mori, Homological properties of balanced Cohen-Macaulay algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 1025–1042.

[10] D. Rogalski and S. J. Sierra, Some noncommutative projective surfaces of GK-dimension 4, *Compos. Math.*, to appear.

[11] 上山健太，3 次元 AS-regular 代数の次数付き森田同値性について，第 7 回城崎新人セミナー報告集, 241–246 (2010).

[12] 上山健太，幾何的代数と一般化された中山自己同型，第 8 回城崎新人セミナー報告集, 102–108 (2011).

[13] K. Ueyama, Gorenstein dimension and AS-Gorenstein algebras, preprint.

[14] M. Van den Bergh, Existence theorems for dualizing complexes over non-commutative graded and filtered rings, *J. Algebra* **195** (1997), 662–679.

[15] A. Yekutieli, Dualizing complexes over noncommutative graded algebras, *J. Algebra* **153** (1992), 41–84.