

非連結な実現空間を持つ有向マトロイド

塚本靖之*

京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻 数学系 修士2年

城崎新人セミナーで発表の機会をくださった運営委員の皆様には感謝いたします。

今回のポスター発表では、有向マトロイドについて、その中でも固い部分での結果を紹介した。有限次元実ベクトル空間内のベクトル配置に対して有向マトロイドという組合せ型が定まる。逆に、有向マトロイドが与えられたとき、それに対応するベクトル配置をその有向マトロイドの実現という。ある有向マトロイドに対してその実現全体がどのような集合になるかというのがここでの興味の対象である。以下、これについて述べる。また、ポスター発表と同時に開催した組みひも多面体ワークショップについても第4節で紹介する。

1 有向マトロイドとその実現

自然数 r, n を固定する。 n 個のベクトル $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^r$ を、どの2個 x_i, x_j ($i \neq j$) についても一方が他方の定数倍となっていない、 \mathbb{R}^r 全体を張るようなものとする。集合 $E = \{1, \dots, n\}$ をベクトルのラベルの集合とする。これらを実 (r, n) 行列 $X = (x_1, \dots, x_n)$ で表記し、ベクトル配置と呼ぶ。

ベクトル配置 X に対して、写像 χ_X を次のように定める。

$$\chi_X : E^r \rightarrow \{+, 0, -\}, \quad \chi_X(i_1, \dots, i_r) := \operatorname{sgn} \det(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}). \quad (1.1)$$

写像 χ_X をベクトル配置 X のカイロトープという。

カイロトープは次の条件を満たす。

1. χ_X は恒等的には0でない。
2. χ_X は交代的である。すなわち、任意の $i_1, \dots, i_r \in E$ と置換 σ に対して、
 $\chi_X(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \chi_X(i_1, \dots, i_r)$ が成り立つ。
3. $\chi_X(j_k, i_2, \dots, i_r) \cdot \chi_X(j_1, \dots, j_{k-1}, i_1, j_{k+1}, \dots, j_r) \geq 0$ ($k = i, \dots, r$) となる
 任意の $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \in E$ に対して $\chi_X(i_1, \dots, i_r) \cdot \chi_X(j_1, \dots, j_r) \geq 0$ が成り立つ。

1と2が成り立つことは簡単に確かめられる。3は次の恒等式から導かれる。

$$\det(x_1, \dots, x_r) \cdot \det(y_1, \dots, y_r) = \sum_{k=1}^r \det(y_k, x_2, \dots, x_r) \cdot \det(y_1, \dots, y_{k-1}, x_1, y_{k+1}, \dots, y_r) \quad \forall x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}^r. \quad (1.2)$$

一般に、 E を有限集合とし、写像 $\chi : E^r \rightarrow \{+, 0, -\}$ を上の三つの条件を満たすような写像とする。この E と χ の組 (E, χ) を E 上、階数 r の有向マトロイドという。この写像 χ を有向マトロイドのカイロトープという。

定義 1.1. 有向マトロイド $\mathcal{M} = (E, \chi)$ に対して、 $\chi_X = \chi$ または $\chi_X = -\chi$ となるベクトル配置 X を \mathcal{M} の実現という。

* tsukam@math.kyoto-u.ac.jp

\mathcal{M} の二つの実現 X, X' に対して, $X' = AX$ となる線型変換 $A \in GL(r, \mathbb{R})$ が存在するとき, X と X' とは線型同値であるという. このとき $\chi_{X'} = \text{sgn}(\det A) \cdot \chi_X$ である.

定義 1.2. 有向マトロイド \mathcal{M} の実現空間 $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ とは, \mathcal{M} の実現の線型同値類全体の集合に \mathbb{R}^m からの商位相を入れたものである.

注意 1.3. 全ての有向マトロイドに対して実現が存在するわけではない. 実現を持つ有向マトロイドを実現可能というが, 実現不可能な例をここでは扱わない. 実現不可能な有向マトロイドの実現空間は空集合であり, 非連結にはならないからである.

2 主結果

有向マトロイド $\mathcal{M} = (E, \chi)$ の実現空間 $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ については以下のことが知られている.

まず, $|E| \leq 8$ ならば $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は可縮である. また, 任意の半代数的集合に対してそれとホモトピー同値な実現空間を持つ有向マトロイドが $|E|$ を大きくすることで具体的に構成できる ([M]). 特に, 非連結な例が存在する. しかし, 非連結な実現空間を持つ有向マトロイドが構成できる最小の $|E|$ は不明である. 知られている最小例は Suvorov によるものと Richter-Gebert によるものがあり, 共に 14 点上, 階数 3 である ([S, R]). 有向マトロイドの一般論および歴史的な事項は Björner らの *Oriented Matroids* [B] を参照されたい.

今回, これより小さい集合上で非連結な例を構成した.

定理 2.1. 13 点上, 階数 3 の有向マトロイドで実現空間が非連結なものが存在する.

有向マトロイドの実現空間は半代数的集合となるので, これが既約かどうかには意味がある. 著者が知る限り, 連結かつ可約な実現空間の例は明示的には与えられていない.

定理 2.2. 13 点上, 階数 3 の有向マトロイドで実現空間が連結かつ可約なものが存在する.

3 例の構成

ここでは $E := \{1, \dots, 13\}$ とする. 以下で三つのカイロトープ $\chi^\epsilon : E^3 \rightarrow \{+, 0, -\}$ ($\epsilon = +, 0, -$) を定める. 有向マトロイド (E, χ^-) が非連結な実現空間を持ち, (E, χ^0) が連結かつ可約な実現空間を持つことを示す. (E, χ^+) も非連結な実現空間を持つが, 証明は省略する.

変数 $s, t, u \in \mathbb{R}$ を含む \mathbb{R}^3 のベクトル配置 $X(s, t, u)$ を次のように与える.

$$\begin{aligned} X(s, t, u) &:= (x_1, \dots, x_{13}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & s & s & 0 & 1 & 1 & st & s+t-u-st+su \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & t & t & u & t & t-u+su \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1-su & 1-u+su \\ & & & & & & & & & s+t-st-s^2u & s(t-u+su) \\ & & & & & & & & & t & t-u+su \\ & & & & & & & & & 1-su & 1-u+su \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

これは以下の構成列の計算結果である. “ \vee ” と “ \wedge ” とは共に \mathbb{R}^3 の外積 “ \times ” で計算されるが, 幾何的には,

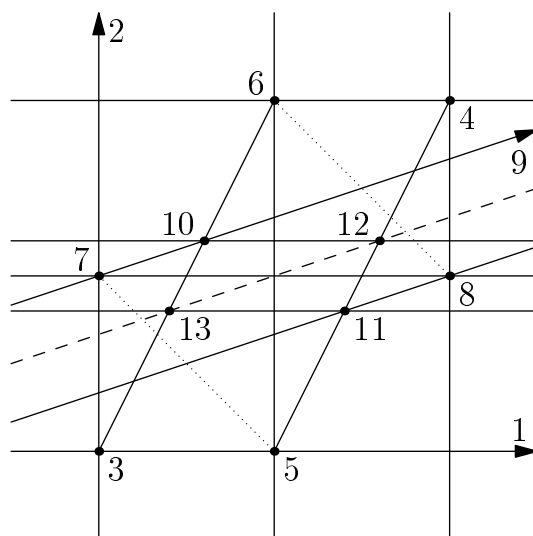


図1 X_0 . x_{13} が $x_9 \vee x_{12}$ 上にあるので \mathcal{M}^0 の実現である.

$x_i \vee x_j$ は x_i, x_j が張る平面, $a \wedge b$ は 2 平面 a, b の共通部分である直線を張るベクトルとなる.

$$\begin{aligned}
x_1 &= {}^t(1, 0, 0), x_2 = {}^t(0, 1, 0), x_3 = {}^t(0, 0, 1), x_4 = {}^t(1, 1, 1), \\
x_5 &= s \cdot x_1 + x_3, \\
x_6 &= (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_5), \\
x_7 &= t \cdot x_1 + x_3, \\
x_8 &= (x_1 \vee x_7) \wedge (x_2 \vee x_4), \\
x_9 &= u \cdot x_2 + x_1, \\
x_{10} &= (x_7 \vee x_9) \wedge (x_3 \vee x_6), \\
x_{11} &= (x_4 \vee x_5) \wedge (x_8 \vee x_9), \\
x_{12} &= (x_1 \vee x_{10}) \wedge (x_4 \vee x_5), \\
x_{13} &= (x_3 \vee x_6) \wedge (x_1 \vee x_{11}).
\end{aligned}$$

$X_0 = X(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ と置いて, $\chi^\epsilon : E^3 \rightarrow \{+, 0, -\}$ ($\epsilon = +, 0, -$) を次を満たす交代的な写像とする.

$$\chi^\epsilon(i, j, k) = \begin{cases} \epsilon & (i, j, k) = (9, 12, 13) \text{ のとき} \\ \chi_{X_0}(i, j, k) & \text{それ以外} \end{cases} \quad \forall i, j, k \in E (i < j < k). \quad (3.2)$$

有向マトロイド $\mathcal{M}^\epsilon := (E, \chi^\epsilon)$ ($\epsilon = +, 0, -$) について調べる.

ベクトル x_i ($i \in E \setminus \{1, 2, 9\}$) を, それぞれ第 3 成分が 1 となるように適当に定数倍すると, アフィン平面 $\{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\} \cong \mathbb{R}^2$ 上の点配置として $X(s, t, u)$ を図示できる. 例えば X_0 は図 1 のようになる. このとき, x_1 は x 軸の無限遠点, x_2 は y 軸の無限遠点, x_9 は傾き u の直線の無限遠点となる. $\mathcal{M}^-, \mathcal{M}^+$ の実現の図 2 と比べられたい.

注意 3.1. X_0 を $X(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, u')$ ($u' \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$) で置き換えても, 非連結な実現空間を持つ有向マトロイドが得られる. ここでは $0 < u' < \frac{1}{2}$ の場合を調べる.

命題 3.2. 有向マトロイド \mathcal{M}^ϵ の任意の実現は, 各ベクトルの正定数倍を除いて, ある $X(s, t, u)$ と線型同値なものに限る.

証明. \mathcal{M}^ϵ の任意の実現 $X' = (x'_1, \dots, x'_{13})$ に対して,

$$\chi_{X'}(1, 2, 3) = \chi_{X'}(1, 2, 4) = \chi_{X'}(1, 4, 3) = \chi_{X'}(2, 3, 4) \neq 0$$

であるから、適当な線型変換 $A \in GL(3, \mathbb{R})$ と正定数 $c_1, c_2, c_3 > 0$ が存在して、

$$AX' = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_2 & 0 & 1 & *** \\ 0 & 0 & c_3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。 A, c_1, c_2, c_3 が一意に求まることも分かる。

このとき、 Ax'_5 について、

$$\chi_{X'}(1, 3, 5) = 0, \quad \chi_{X'}(1, 2, 5) = \chi_{X'}(1, 2, 3) \neq 0$$

より、ある実数 $s \in \mathbb{R}$ と正定数 $c_5 > 0$ が存在して、 $Ax'_5 = c_5 \cdot {}^t(s, 0, 1) = c_5 \cdot x_5$ となる。さらに、

$$\chi_{X'}(1, 4, 6) = \chi_{X'}(2, 5, 6) = 0, \quad \chi_{X'}(1, 2, 6) = \chi_{X'}(1, 2, 3) \neq 0$$

から、 Ax'_6 も、同じ s について、 x_6 の正定数倍となる。

構成列では x_9, x_{12}, x_{13} の線型従属性を仮定しないので、以下同様に示される。 □

上の議論を精密化して、 $\mathcal{R}_X(\chi^\epsilon) := \{X(s, t, u) \in \mathbb{R}^{3 \cdot 13} \mid \chi_{X(s, t, u)} = \chi^\epsilon\}$ と置くと、有理同型

$$\mathcal{R}_X(\chi^\epsilon) \times (0, \infty)^{12} \cong \mathcal{R}(\mathcal{M}^\epsilon)$$

が得られる。よって、 $\mathcal{R}_X(\chi^\epsilon)$ が非連結であることを示せば $\mathcal{R}(\mathcal{M}^\epsilon)$ も非連結であることが言える。連結かつ可約であることも同様である。ここでは次の二つの命題を示す。

命題 3.3. $\mathcal{R}_X(\chi^-)$ は非連結である。

命題 3.4. $\mathcal{R}_X(\chi^0)$ は連結かつ可約である。

証明. 変数の組 $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$ とベクトル配置 $X(s, t, u) \in \mathbb{R}^{3 \cdot 13}$ とを同一視する。式 $\chi_{X(s, t, u)} = \chi^\epsilon$ は、次を意味する。

$$\operatorname{sgn} \det(x_i, x_j, x_k) = \chi^\epsilon(i, j, k), \quad \forall (i, j, k) \in E^3. \quad (3.3)$$

この中から、 s, t, u に関する式を与えるものを選び出す。 $(i, j, k) \in E^3(\{i, j, k\} \neq \{9, 12, 13\})$ については

$$\chi^\epsilon(i, j, k) = \operatorname{sgn} \det(x_i, x_j, x_k)|_{s=t=1/2, u=1/3}$$

で符号が与えられることに注意する。

まず、 $\operatorname{sgn} \det(x_2, x_3, x_5) = \operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}(1/2) = +$ より $s > 0$ 、同様に $\det(x_2, x_5, x_4) = 1 - s > 0$ を得る。

よって、 s の取り得る範囲は

$$0 < s < 1 \quad (3.4)$$

となる。 t についても $\det(x_1, x_7, x_3) = t > 0$ 、 $\det(x_1, x_4, x_7) = 1 - t > 0$ より

$$0 < t < 1 \quad (3.5)$$

となる。さらに、

$$\det(x_1, x_9, x_3) = u > 0, \quad (3.6)$$

$$\det(x_3, x_9, x_8) = t - u > 0, \quad (3.7)$$

$$\det(x_4, x_7, x_9) = 1 - t - u > 0, \quad (3.8)$$

$$\det(x_5, x_{13}, x_7) = s(t^2 - (1 - s)u) > 0, \quad (3.9)$$

$$\det(x_6, x_{12}, x_8) = (1 - s)((1 - t)^2 - su) > 0. \quad (3.10)$$

を得る. また $\det(x_9, x_{12}, x_{13}) = u(1-2s)(1-2t+tu-su)$ より,

$$\operatorname{sgn}(u(1-2s)(1-2t+tu-su)) = \epsilon \quad (3.11)$$

を得る. 逆に $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$ が式 (3.4)~(3.11) を満たせば, (3.3) が成り立つ.

式 (3.4)~(3.11) より, 次を得る.

$$\mathcal{R}_X(\chi^-) \cong \left\{ (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 0 < s < 1, 0 < u < t < 1-u, t^2 - (1-s)u > 0, \\ (1-t)^2 - su > 0, (1-2s)(1-2t+tu-su) < 0 \end{array} \right\}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{R}_X(\chi^0) \cong \left\{ (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 0 < s < 1, 0 < u < t < 1-u, t^2 - (1-s)u > 0, \\ (1-t)^2 - su > 0, (1-2s)(1-2t+tu-su) = 0 \end{array} \right\}. \quad (3.13)$$

次の式を示し, $\mathcal{R}_X(\chi^-)$ が二つの連結成分からなることを証明する.

$$\begin{aligned} ((3.12) \text{ の右辺}) &= \left\{ (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < s < \frac{1}{2} < t < 1, 0 < u < \min\left\{1-t, \frac{(1-t)^2}{s}, \frac{2t-1}{t-s}\right\} \right\} \\ &\cup \left\{ (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < t < \frac{1}{2} < s < 1, 0 < u < \min\left\{t, \frac{t^2}{1-s}, \frac{1-2t}{s-t}\right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

(C) 次のように場合分けする.

$$(1-2s)(1-2t+tu-su) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2s > 0, 1-2t+tu-su < 0 \\ \text{または} \\ 1-2s < 0, 1-2t+tu-su > 0 \end{cases}$$

$1-2s > 0, 1-2t+tu-su < 0$ の時,

$$(2-u)(2t-1) = -2(1-2t+tu-su) + u(1-2s) \quad (3.15)$$

より $t > 1/2$ を得る. $0 < s < 1/2 < t < 1$ より

$$\begin{cases} 0 < u < t < 1-u \\ (1-t)^2 - su > 0 \\ 1-2t+tu-su < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < u < \min\left\{1-t, \frac{(1-t)^2}{s}, \frac{2t-1}{t-s}\right\}. \quad (3.16)$$

$1-2s < 0, 1-2t+tu-su > 0$ の時, 式 (3.15) より $t < 1/2$ を得る. $0 < t < 1/2 < s < 1$ より

$$\begin{cases} 0 < u < t < 1-u \\ t^2 - (1-s)u > 0 \\ 1-2t+tu-su > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < u < \min\left\{t, \frac{t^2}{1-s}, \frac{1-2t}{s-t}\right\}. \quad (3.17)$$

(C) $0 < s < 1/2 < t < 1$ のとき, (3.16) より, 不等式 $0 < u < t < 1-u, (1-t)^2 - su > 0, 1-2t+tu-su < 0$ を得る. さらに

$$t^2 - (1-s)u = -(1-2t+tu-su) + (1-t)(1-t-u)$$

より $t^2 - (1-s)u > 0$ を得る.

$0 < t < 1/2 < s < 1$ のとき, (3.17) より, 不等式 $0 < u < t < 1-u, t^2 - (1-s)u > 0, 1-2t+tu-su > 0$ を得る. さらに

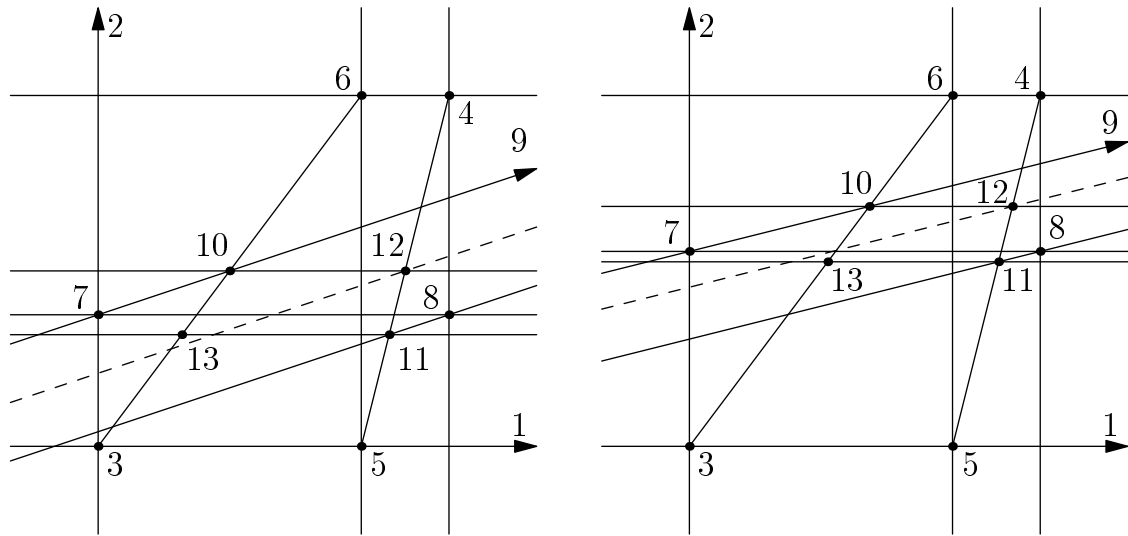
$$(1-t)^2 - su = (1-2t+tu-su) + t(t-u)$$

より $(1-t)^2 - su > 0$ を得る. よって式 (3.14) が示された.

$\mathcal{R}_X(\chi^0)$ は次のように二つの既約成分に分解できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_X(\chi^0) &\cong \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < t < 1, 0 < u < 2t^2, u < 2(1-t)^2, 1-2s = 0\} \\ &\cup \left\{ (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 0 < s < 1, 0 < u < 1/2, (1-u)^2 - su > 0, \\ (1-u)^2 - (1-s)u > 0, 1-2t+tu-su = 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

この二つの既約成分の共通部分は $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, u) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u < \frac{1}{2}\}$ であるから, $\mathcal{R}_X(\chi^0)$ は連結かつ可約である. 証明は式 (3.14) のときと同様なので省略する. \square

図2 M^- の実現 (左) と M^+ の実現 (右).

4 組みひも多面体

欧米の多面体愛好家の間で plaited polyhedra という多面体が知られている。Plaited polyhedra とは直訳すれば「編まれた多面体」であるが、ここではより日本語風に「組みひも多面体」と呼ぶ。材料の形状や数、編み方などに明確な規定はないが、おおよそ紙ひものような材料を編み合わせて作られる多面体を組みひも多面体というようである ([P]).

4.1 ゾーン多面体

組みひも多面体として作られる多面体の重要な例に 3次元ゾノトープがある。以下、3次元ゾノトープをゾーン多面体と呼ぶ。 \mathbb{R}^3 のベクトル配置 $V = (v_1, \dots, v_n)$ に対して、ゾーン多面体 $Z(V)$ を、

$$Z(V) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k, -1 \leq \lambda_k \leq 1 \right\} \quad (4.1)$$

と定める。

ゾーン多面体は、有限個の線分のミンコフスキー和としても表される。2点 $a, b \in \mathbb{R}^3$ を結ぶ線分を

$$[a, b] := \{ t \cdot a + (1-t) \cdot b \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq t \leq 1 \}$$

とする。集合 $A, B \subset \mathbb{R}^3$ のミンコフスキー和を

$$A + B := \{ x + y \in \mathbb{R}^3 \mid x \in A, y \in B \}$$

と定める。このとき、ゾーン多面体 $Z(V)$ は次のように書ける。

$$Z(V) = [v_1, -v_1] + \dots + [v_n, -v_n]. \quad (4.2)$$

ゾーン多面体 $Z(V)$ の面 F が、ある $x \in \mathbb{R}^3$ について $x + [v_i, -v_i] \subset F$ となるとき、 F は $Z(V)$ の i 番目のゾーンに属するという。 $Z(V)$ の i 番目のゾーンとは、それに属する面と辺 (1次元以上の真の面) 全体の集合であるが ([Z]), ここではそれに属する面全体の和集合のこともゾーンと呼ぶ。

ベクトル配置 V が、どの3個のベクトル $v_i, v_j, v_k (i < j < k)$ も一次独立である場合、 $Z(V)$ の面は全て平行四辺形となる。さらに、各ゾーンは $Z(V)$ の周りを幅一定でジグザグのベルトのように一周する。このとき、各

ゾーンを一本の紙ひもで作リ、それらを編み合わせることで $Z(V)$ の組みひも多面体としての模型を作ることができる。以下、例を挙げる。

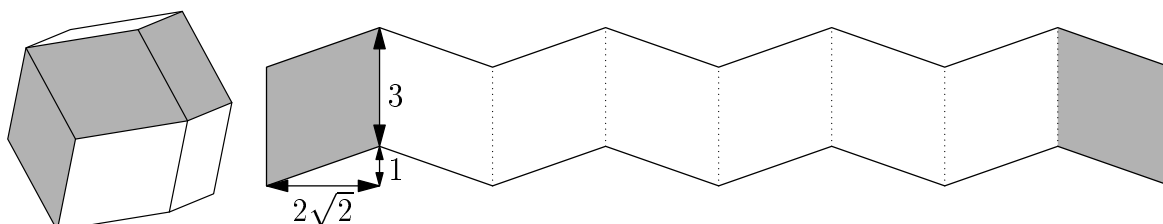
菱形十二面体. 立方体の重心から頂点までの 8 個のベクトルのうち、互いに逆向きとなるものを除く 4 個を取ることによって、次のようなベクトル配置 V_C が得られる。

$$V_C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

V_C のゾーン多面体 $Z(V_C)$ は菱形十二面体である。 $Z(V_C)$ の全ての面は合同な菱形であり、その菱形の 2 本の対角線の比は白銀比 $1 : \sqrt{2}$ である。各頂点には鋭角が 4 個、または鈍角が 3 個集まる。

菱形十二面体は 4 本の紙ひもを編み合わせて作られる。模型を安定させるため、両端に 1 個ずつ余分な菱形を付けるとよい。編み合わせるときの注意点を挙げる。

- 紙ひもの中ほどから編む。
- 各面では 2 本の紙ひもが交わるように重なる。
- 全ての紙ひもを、ある面で外（内）側になったらその隣の面では内（外）側になるように編む。
- 全ての紙ひもは多面体の周りを一周し、両端が菱形 2 個分重なる。
- 組しろが余ることはない。両端のどちらが外側になるかは適宜判断する。
- 厚紙で作るときは細めに切った方が編みやすい。ただし、細くしすぎるとゆるくなって安定しない。



菱形十二面体

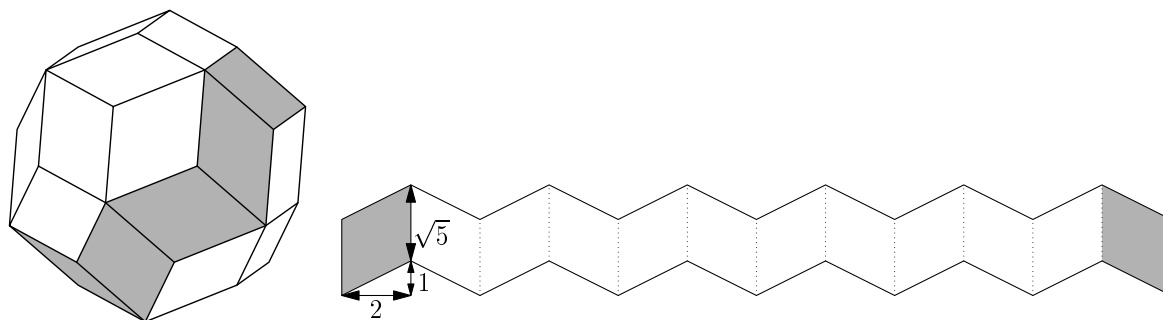
材料

一つのゾーンを示すと左のようになる。材料の両端の灰色の部分が組しろである。以下同様。

菱形三十面体. 正二十面体の重心から頂点までの 12 個のベクトルから互いに逆向きのものを除く 6 個を取ることによって、ベクトル配置

$$V_I = \begin{pmatrix} \phi & \phi & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \phi & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \phi & \phi \end{pmatrix}, \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$$

を得る。ゾーン多面体 $Z(V_I)$ は菱形三十面体である。 $Z(V_I)$ の全ての面は合同な菱形であり、その 2 本の対角線の比は黄金比 $1 : \phi$ となる。各頂点には鋭角が 5 個、または鈍角が 3 個集まる。これは 6 本の紙ひもを編み合わせて作られる。編み方は菱形十二面体と同様である。



菱形三十面体

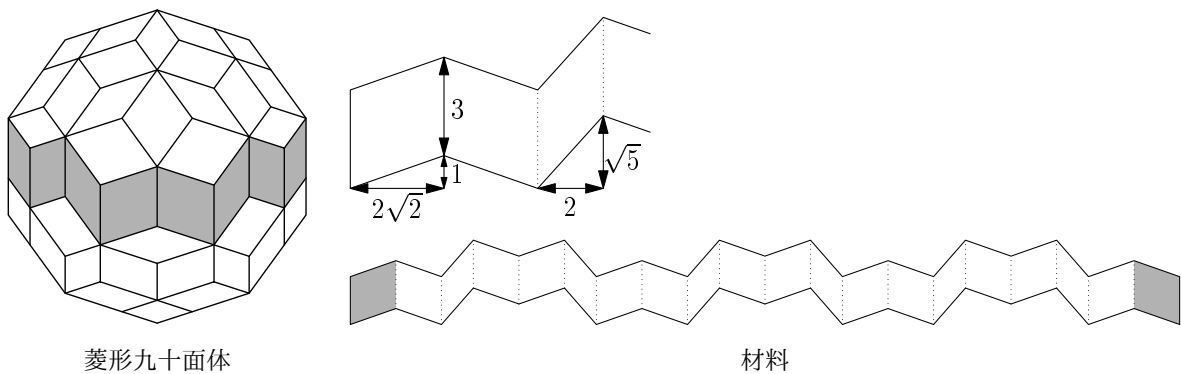
材料

菱形九十面体. 正十二面体の重心から頂点までの 20 個のベクトルから互いに逆向きのを除く 10 個を取ること
で, ベクトル配置

$$V_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \phi & \phi & 1/\phi & -1/\phi & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \phi & \phi & 1/\phi & -1/\phi \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1/\phi & -1/\phi & 0 & 0 & \phi & \phi \end{pmatrix}$$

を得る. $Z(V_D)$ は菱形九十面体となる. $Z(V_D)$ の面は 2 種類の菱形から成り, 対角線の比はそれぞれ白銀比 $1:\sqrt{2}$, 第二黄金比 $1:\phi^2$ となる. これらを広い菱形, 狭い菱形と区別して呼ぶことにすると, 各頂点には広い菱形の鋭角が 5 個, または広い菱形の鈍角が 2 個と狭い菱形の鈍角が 1 個, または広い菱形の鋭角と狭い菱形の鋭角が 3 個ずつ集まる.

この菱形九十面体は, 10 本の紙ひもを編み合わせて作られる. 編み方は菱形十二面体, 菱形三十面体と同様である.



菱形九十面体

材料

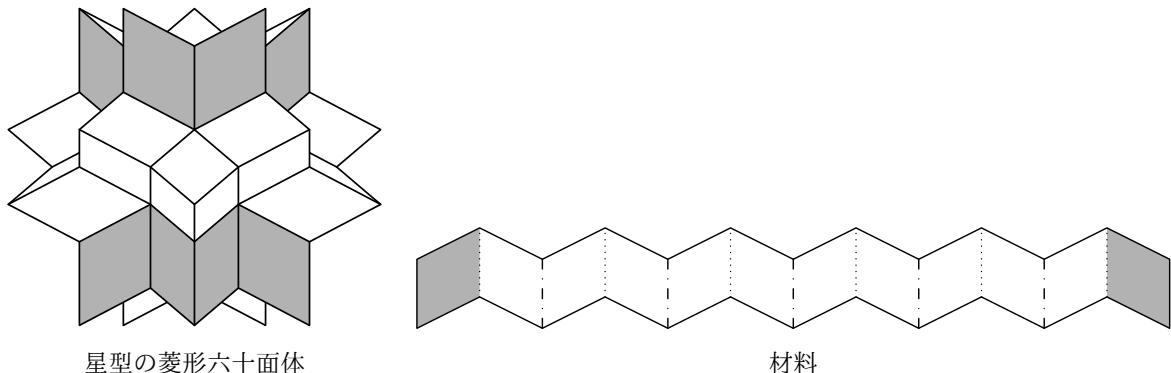
4.2 星型の菱形多面体

ここではさらに凸でない組みひも多面体の例を挙げる. 編み方は凸の場合と同様である.

菱形六十面体. 菱形三十面体の材料を 12 本使うと, 星型の菱形六十面体ができる. ただし, 折り方は山折りと谷折りを交互に繰り返して蛇腹にする. このとき, 両端を山折りにしておいた方が, 紙ひもが一周したときの処理が容易である.

材料には, 山折りと谷折りの鋭角と鈍角の 4 種類の角がある. 各頂点には, 山折りの鋭角が 3 個, または谷折りの鋭角が 5 個, または谷折りと山折りの鈍角が 2 個ずつ集まる. 山折りの鋭角 3 個が集まってできる「とげ」を 1 個ずつ増やすように編んでいくのがやりやすい.

2 本の紙ひもが図のように平行に一周するので, 12 色使わなくても, 6 色の紙ひもを 2 本ずつで隣り合う菱形が異なる色になるように編める. うまく配置すれば, さらに色を減らし 4 色の紙ひもを 3 本ずつでもそのようにできる.



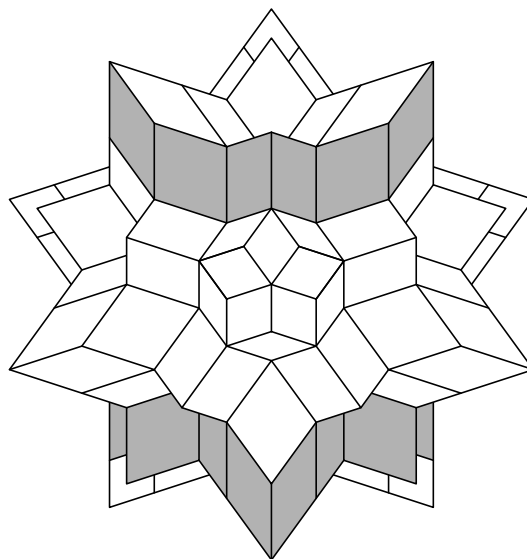
星型の菱形六十面体

材料

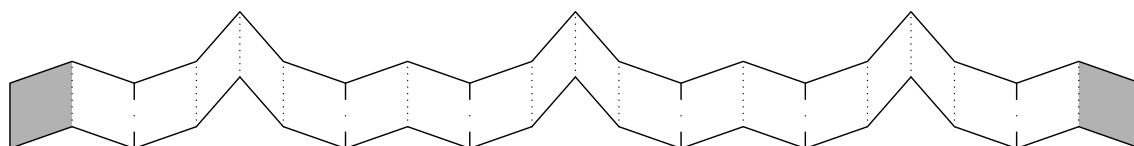
菱形百八十面体. 菱形九十面体の材料を 20 本使っても, 面白いものは作れそうにない. しかし, 菱形を適当に並べ替えた材料を 20 本使うことで, 星型の菱形百八十面体を作ることができる. 並べ替えを許したのは, 菱形六十面体を作るときに菱形三十面体の材料を蛇腹に折ったことを, 菱形を並べ替えていると解することができるからである.

材料の形状および各頂点周りの様子の記述は省略する. 作る際は図を観察されたい.

これも菱形六十面体と同様に, 2 本の紙ひもが平行に一周するので, 10 色の紙ひもを 2 本ずつ用いて隣り合う菱形が異なる色になるように編める. 5 色の紙ひもを 4 本ずつで隣り合う菱形が異なる色になるような編み方もある.



星型の菱形百八十面体



材料

このような多面体を編む手法を応用することで, 様々な立体を作ることができるのである. 組みひも多面体については [W] にも詳しく書かれている. 拙著 [T] は各号で「編まれた多面体」を一種類ずつ紹介したものである. ゾノトープと有向マトロイドとの関係は [B, Z] などを参照されたい.

参考文献

- [B] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler, *Oriented matroids*, Encyclopedia of Mathematics **46**, Cambridge University Press, 1993.
- [M] N.E. Mnëv, *The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties*, in: Viro, O.Ya. (ed.): *Topology and Geometry - Rohlin Seminar*, Lecture Notes in Mathematics **1346**, Springer, Heiderberg, 1988, 527-544.
- [P] A.R. Pargeter, *Plaited Polyhedra*, The mathematical gazette **43**, 1959, 88-101.
- [R] J. Richter-Gebert, *Two interesting oriented matroids*, Documenta Mathematica **1**, 1996, 137-148.
- [S] P.Y. Suvorov, *Isotopic but not rigidly isotopic plane system of straight lines*, in; Viro, O.Ya. (ed.): *Topology and Geometry -Rohlin Seminar*, Lecture Notes in Mathematics **1346**, Springer,

- Heidelberg, 1998, 545-556.
- [T] 塚本靖之『編まれた多面体』京都大学メールマガジン **35,37,39,41,43,45** (2009 年度) バックナンバーは <http://www.kyoto-u.ac.jp/ja/issue/mm/backnumber/index.htm>
- [W] H. Walser, *Der Goldene Schnitt*, B.G.Teubner, 1993. 日本語訳はヴァルサー『黄金分割』(蟹江幸博訳) 日本評論社 (2002).
- [Z] G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1995. 日本語訳はツィーグラール『凸多面体の数学』(八森正泰, 岡本吉央訳) シュプリンガー・フェアラーク東京 (2003).