n 平方和問題と n 三角和問題

田坂浩二*

九州大学大学院数理学府

1 主結果

正の整数 s に対し, 自然数 n を s 個の平方数 (または三角数) で表す方法の個数を $r_s(n)$(または $t_s(n)$) と書く:

$$r_s(n) := \sharp\{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^s \mid n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2\},$$
$$t_s(n) := \sharp\{(x_1, x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^s_{\geq 0} \mid n = \frac{x_1(x_1+1)}{2} + \cdots + \frac{x_s(x_s+1)}{2}\}.$$

これら $r_s(n)$ と $t_s(n)$ の明示公式を求めるという問題は 1700 年代後半あたりから, Jacobi などにより先進的に行われた. 次節で明示公式の略歴を述べることにして, ここでは今回得られた $r_{8s}(n)$ と $t_{8s}(n)$ $(s \geq 2)$ の公式を紹介する. まず, $\Gamma_0(2)$ のカスプ $i\infty$ と 0 に対応する Eisenstein 級数の係数として現れる $\sigma_k^{i\infty}(n), \sigma_k^0(n)$ を次のように定める:

$$\sigma_k^{i\infty}(n) = \sum_{d|n} (-1)^d d^k, \quad \sigma_k^0(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d:\mathrm{odd}}} d^k \quad (k \geq 0).$$

ここで, 便宜上 $\sigma_k^{i\infty}(0) = (1-2^{k+1})B_{k+1}/2(k+1)$ とおく (B_k : Bernoulli 数). このとき, 主結果は以下である.

定理 1.1. (T. [15]) 正の整数 $s \geq 2$ に対し, 次を満たすような有理数 $\mu_s(l)$ $(l = 2, 3, \dots, s)$ が一意に定まる :

$$r_{8s}(n) = (-1)^n \frac{2^{4s}}{(4s-2)!} \sum_{l=2}^{s} \mu_s(l) \binom{4s-2}{2l-1} \sum_{m=0}^{n} \sigma_{4s-2l-1}^{i\infty}(m) \sigma_{2l-1}^{i\infty}(n-m) \quad (n \geq 0),$$
$$t_{8s}(n-s) = \frac{1}{(4s-2)!} \sum_{l=2}^{s} \mu_s(l) \binom{4s-2}{2l-1} \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_{4s-2l-1}^{0}(m) \sigma_{2l-1}^{0}(n-m) \quad (n \geq s).$$

注意として, 有理数 $\mu_s(l)$ は簡単な計算で求めることができるのだが, どういった規則で定まるのかはよくわかっていない (そもそも規則性があるのかもわからない). Theorem 1 から得られる公式をいくつか載せておく.

	$r_{8s}(n)$	$t_{8s}(n-s)$
$s=2$	$(-1)^n 2^8 \rho_{3,3}^{i\infty}(n)$	$\rho_{3,3}^0(n)$
$s=3$	$\frac{(-1)^n 2^9}{3^2}(\rho_{7,3}^{i\infty}(n) - \rho_{5,5}^{i\infty}(n))$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2}(\rho_{7,3}^0(n) - \rho_{5,5}^0(n))$
$s=4$	$\frac{(-1)^n 2^{10}}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}(2^2 \rho_{11,3}^{i\infty}(n) - 5^2 \rho_{9,5}^{i\infty}(n) + 7\rho_{7,7}^{i\infty}(n))$	$\frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}(2^2 \rho_{11,3}^0(n) - 5^2 \rho_{9,5}^0(n) + 7\rho_{7,7}^0(n))$

Theorem 1 は Chan 氏と Chua 氏 [1] によって予想された式であり, representing integers の問題の中で, とてもシンプルな公式として近年注目を集めていたものである. 次節で Theorem 1 の問題背景, すなわち $r_s(n)$

*k-tasaka@math.kyushu-u.ac.jp

達の明示公式に関する研究の歩みを振り返ってみたいと思う (主要な結果を網羅できているかはわからない. 著者の不勉強をここにお詫びする).

2 $r_s(n)$ 達の明示公式略史

2.1 Bachet から Milne, Zagier, Ono へ

「自然数がいつ二つの平方数の和に分解できるか」という問題は, ピタゴラスの定理と関連して古くから考えられていた問題である. ここでは特に, 偶数個の平方数で自然数を表現する方法の個数の明示公式についての歴史を簡単に述べたいと思う. あまり古いところまで遡ると大変なので, いくつか歴史的な境目をピックアップしてみる. 参考文献：[2, 3, 12, 14] (先に記号について言っておくと, 標準的なテータ関数 $\theta(\tau)$ や $T(\tau)$ を以下のように定義する:

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2},\ T(\tau) = q^{1/8}\sum_{n\geq 0} q^{n(n+1)/2} \quad (q = e^{2\pi i\tau}, \tau \in \text{複素上半平面}).$$

よく知られるように, $\theta(\tau)^s, T(\tau)^s$ はそれぞれ重さ $s/2$ のレベル 4 とレベル 2 の正則モジュラー形式である.)

C. G. Bachet (1621) 任意の自然数は高々4 つの平方和で書けることを予想.

A. Girard (1632) 素数 p に対し, $p = x^2 + y^2 \overset{?}{\Leftrightarrow} p \equiv 1 \pmod 4$.

L. Euler (1749) Girard の予想を解決. (無論, P. Fermat (1641) の観察も重要だった.)

J.-F. Lagrange (1770) Bachet の予想を解決.

A. M. L. Legendre (1798), C. F. Gauss (1801) $r_2(n)$ の明示公式を得る.

C. G. Jacobi (1829) 楕円関数を用いて $r_2(n), r_4(n), r_6(n), r_8(n)$ の明示公式を得る.

J. Liuville (1860's) $r_{10}(n), r_{12}(n)$ の明示公式を得る.

$\vdots$

R. A. Rankin (1965) $s > 8$ のときは, $r_s(n)$ はある約数和関数とあるカスプ形式の Fourier 係数でかけることを示した.

V. G. Kac, M. Wakimoto (1994) Affine superalgebra の表現論を用いて, $\theta(\tau)^s, T(\tau)^s$ の様々な公式を得る. しかし, 係数の明示公式を取り出すには, かなり複雑な形であった. また, $T(\tau)^{4s^2}, T(\tau)^{4s^2+4s}$ の公式の予想をする (Kac-Wakimoto 予想).

S. Milne (1996) $\theta(\tau)^{4s^2}, \theta(\tau)^{4s^2+4s}$ を, Eisenstein 級数の積の線形結合で書く公式や, Schur 関数を用いた公式等を発表. 証明はなく, また, 同様の手法で Kac-Wakimoto 予想が解けると宣言.

D. Zagier (2000) モジュラー形式の理論を用いて, Kac-Wakimoto 予想を解決.

K. Ono (2002) Zagier の結果を受け, $\theta(\tau)^{4s^2}, \theta(\tau)^{4s^2+4s}$ を Eisenstein 級数の積の線形結合で書く明示公式を得る.

S. Milne (2002) 96 年に言及した $r_{4s^2}(n), r_{4s^2+4s}(n)$ の公式を楕円関数, 連分数, Lie 代数, Schur 関数, 超幾何関数等を用いて示した. Kac-Wakimoto 予想も証明.

Diophantus の研究にもあるように (直接確かめた訳ではないが, Dickson[3] 参照), 1700 年代まではどのような数が平方数の和で書けるかに注目があったように思われる．Lagrange による Bachet 予想の解決後, 解の個数に興味が移ろう．特に, Jacobi と楕円関数の登場は現代のモジュラー形式の理論等に大きな影響を及ぼした．途中, Hardy や Ramanujan といった著名な数学者達の貢献もあるが, モジュラー形式の理論が整備されつつあった Rankin の時代はひとつの境目と言える．しかし, “Probably no one else believed it possible to find simple formulas” といった Bernt 氏のコメント [14] にあるように, Jacobi や Liuville の仕事後 100 年以上の間, “$r_s(n)$ の公式” というとてもシンプルな問題はあまり大きな発展を遂げることはなかった．奇しくも, Wiles がフェルマーの最終定理を証明した 1994 年, 我々の問題も大きな進展を見せる．Kac 氏と Wakimoto 氏による, いわゆる Kac-Wakimoto 予想 [7] と呼ばれる次の予想が提唱されたのである:

予想 2.1. (proved by Zagier[17] and Milne[12]) 正の整数 $s \geq 1$ に対し,

$$t_{4s^2}(n) = \frac{4^{-s(s-1)}}{\prod_{j=1}^{2s} j!} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_s \geq 1:\text{odd} \\ r_1,\dots,r_s \geq 1:\text{odd} \\ a_1 > \cdots > a_s \\ a_1 r_1 + \cdots a_s r_s = 2n+s^2}} a_1 \cdots a_s \prod_{i<j} (a_i^2 - a_j^2)^2,$$

$$t_{4s^2+4s}(n) = \frac{2^s}{\prod_{j=1}^{2s} j!} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_s \geq 1 \\ r_1,\dots,r_s \geq 1:\text{odd} \\ a_1 > \cdots > a_s \\ a_1 r_1 + \cdots a_s r_s = n+s(s+1)/2}} (a_1 \cdots a_s)^3 \prod_{i<j} (a_i^2 - a_j^2)^2.$$

彼らはこれ迄の楕円関数やモジュラー形式などを使った手法を用いず, ある単純 Lie superalgebra に関する affine denominator formula(無限積＝無限和) というものとの関連から予想を与えた．そのすぐ 2 年後, Milne 氏 [11] はテータ関数の次の公式を与えた．

定理 2.2. 正の整数 $s \geq 1$ に対し,

$$\theta(\tau + 1/2)^{4s^2} = \frac{(-1)^s 2^{2s^2+s}}{\prod_{j=1}^{2s-1} j!} \det\bigl(2g_{2p+2h-2}(2\tau) - g_{2p+2h-2}(\tau)\bigr)_{1 \leq p,h \leq s},$$

$$\theta(\tau + 1/2)^{4s^2+4s} = \frac{2^{2s^2+3s}}{\prod_{j=1}^{2s} j!} \det\bigl(g_{2p+2h}(\tau)\bigr)_{1 \leq p,h \leq s}.$$

ここで, $g_k(\tau) = \sum_{n \geq 0} \sigma_{k-1}^{i\infty}(n) q^n$ である．

同論文中において, この証明方法を利用すれば Kac-Wakimoto 予想が解決できると述べ, 実際 2002 年 [12] にこれら全てに証明を与えている．(Kac-Wakimoto 予想は Zagier 氏 [17] によるモジュラー形式を利用した証明も知られている.) 1996 年の Milne 氏の驚くべき結果を受けた Ono 氏 [13] は, “$r_s(n)$ のシンプルな公式は存在する!!” と信じるに至り, 実際 Zagier 氏の結果を利用して $r_{4s^2}(n), r_{4s^2+4s}(n)$ を変形約数和関数の s 個の積の線形結合で書くという公式を見つけた．その後も現在に至るまで, 例えば Theorem 3 の別証明 [10] がなされるなど未だに広がりを見せている．

2.2 Chan-Chua 予想

Milne 氏, Zagier 氏, Ono 氏らが $r_{4s^2}(n), r_{4s^2+4s}(n), t_{4s^2}(n), t_{4s^2+4s}(n)$ の公式に注目していたその時期に, シンガポールの数学者 Chan 氏と Chua 氏 [1] らが次のようなことに気づいた．前者の研究は, $s = 1, 2, \dots$ とすると $r_4(n), r_8(n), r_{16}(n), r_{24}(n), r_{36}(n), r_{48}(n)$ などの公式が得られるわけだが, とくに, $r_{16}(n), r_{24}(n), t_{16}(n), t_{24}(n)$ の公式を見ると “二つの Eisenstein 級数の係数 (ある約数和関数) の積の線形結合になっている” というのだ．ここから 8 の倍数に注目し, $r_{8s}(n), t_{8s}(n)$ が一般に二つのある約数和関数の線形結合でかけることを予想した (Theorem 1)．ここからは, Chan-Chua 予想に関連する Imamoḡlu 氏と Kohnen 氏のモジュラー形式の理論を用いた先行的な結果を紹介する．

2003 年に Chan-Chua 予想が出版されたその 2 年後, Imamoḡlu 氏と Kohnen 氏 [6] はモジュラー形式の理論を用いて次のようなことを示した:

定理 2.3. 正の整数 $s \geq 2$ に対し, ある $\lambda, \lambda_l \in \mathbb{Q}$ が存在して

$$r_{8s}(n) = \lambda \sigma_{4s-1}^{i\infty}(n) + \sum_{l=2}^{2s-2} \lambda_l \sum_{m=0}^{n-1} \sigma_{4s-2l-1}^{i\infty}(m) \sigma_{2l-1}^{0}(n-m) \tag{2.1}$$

を満たす.

彼らの定理はモジュラー形式の理論において基本的な事実である, "重さ k のモジュラー形式の張るベクトル空間は有限次元である" ということに基づいている. 実際, 彼らは $\Gamma_0(2) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod 2\}$ におけるモジュラー形式のなすベクトル空間の具体的な生成元を決めるに至った:

補題 2.4. 正の偶数 $k \geq 4$ に対し,

$$\langle G_{2r}^{0} G_{k-2r}^{i\infty} \mid 2 \leq r \leq k/2-2 \rangle_{\mathbb{Q}} = S_k^{\mathbb{Q}}(2).$$

ここで $G_k^{i\infty}, G_k^0$ は $\Gamma_0(2)$ のカスプ $i\infty$ と 0 に付随する Eisenstein 級数であり

$$G_k^{i\infty}(\tau) = \frac{1}{2^k(k-1)!} \sum_{n \geq 0} \sigma_{k-1}^{i\infty}(n) q^n, \ G_k^0(\tau) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}^{0}(n) q^n$$

と定義される. また, $S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ は重さ k の $\Gamma_0(2)$ の有理数係数の Fourier 級数となるカスプ形式全体がなす $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間である.

三角数の母関数 $T(\tau)^{8s}$ が $\Gamma_0(2)$ のモジュラー形式, すなわち $M_{4s}^{\mathbb{Q}}(2) = \mathbb{Q}G_{4s}^0 \oplus \mathbb{Q}G_{4s}^{i\infty} \oplus S_{4s}^{\mathbb{Q}}(2)$ の元であるということから, 上記生成元を用いて $t_{8s}(n)$ の公式を得る. そこから, $T(\tau)^{8s}$ があるモジュラー変換で $\theta(\tau+1/2)^{8s}$ になるということ, またこのモジュラー変換がカスプ $i\infty$ と 0 の Eisenstein 級数の間の変換を引き起こすことなどから, 公式 (2.1) を得る.

3 double shuffle relation とモジュラー形式

Imamoḡlu-Kohnen の帰結を利用すると, Theorem 1 は以下と同値である.

補題 3.1. (T. [15]) 正の偶数 $k \geq 4$ に対し, $\{G_k^{i\infty}, G_k^0, G_{2l}^0 G_{k-2l}^0 \mid 2 \leq l \leq [k/4]\}$ は $M_k^{\mathbb{Q}}(2)$ の基底となる.

証明には, 多重ゼータ値の関係式族である double shuffle relation と呼ばれる関係式が登場する. 一見すると多重ゼータ値はモジュラー形式との関わりがないように思うのだが, (著者にとって) 驚くべきことに, 関係式族 double shuffle relation が Lemma 5 の生成元たちを Lemma 6 の基底の線形結合で表す明示式を与えるのだ. ここでは Lemma 6 の証明は論文 [9, 15] に譲ることにして, 残りの紙面で 'double shuffle relation がモジュラー形式の間の関係式を与える' という Gangl-Kaneko-Zagier [4] の先行結果を (具体例を述べるに留まるが) 簡単に紹介して本稿を終わりたい.

まず, 多重ゼータ値を定義する. 自然数 $k_1, \ldots, k_n$ $(k_1 \geq 2)$ に対し,

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

慣例的に, インデックスの総和 $k_1 + \cdots + k_n$ を重さという.
先に多重ゼータ値の問題意識に触れておこう. 例えば, 重さ 2 の多重ゼータ値は $\zeta(2)$ のみで, 重さ 3 の多重

ゼータ値は $\zeta(2,1), \zeta(3)$ である．簡単な部分分数分解より $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ がわかるのだが, このことから重さが 3 の多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の次元は 1 であることがわかる．次に, 重さ 4 の多重ゼータ値は $\zeta(2,1,1), \zeta(3,1), \zeta(2,2), \zeta(4)$ であるが, これらに対しても

$$\zeta(4) = \zeta(2,1,1), \frac{3}{4}\zeta(4) = \zeta(2,2), \zeta(4) = \zeta(3,1) + \zeta(2,2) \tag{3.1}$$

が成り立つので次元が 1 となる．1994 年に Zagier 氏は数値計算ソフトの pari-gp を援用して, 重さが k の多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の次元が以下のようになると予想した ([16])：数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ を $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ と漸化式で定める．このとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\text{重さ } k \text{ の多重ゼータ値が張る } \mathbb{Q} \text{ 上のベクトル空間}) = d_k.$$

この Zagier 氏による次元予想が提唱された後, 多重ゼータ値は思いもよらぬ発展を遂げるのであるが[1], ここでは特に (3.1) で見たような多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 線形関係式に注目する．我々の議論に重要な double shuffle relation とは, 以下のように述べられる:

命題 3.2. (double shuffle relation) 正の整数 $r, s \geq 1$ $(r,s) \neq (1,1)$ に対し,

$$\begin{aligned}\zeta(r)\zeta(s) &= \zeta(r,s) + \zeta(s,r) + \zeta(r+s) \\ &= \sum_{i=1}^{r+s-1} \left(\binom{i-1}{r-1} + \binom{i-1}{s-1} \right) \zeta(i, r+s-i).\end{aligned}$$

これはリーマンゼータの二つの積が二通りの 2 重ゼータ値の線形和で書けることを主張しており, これにより 2 重ゼータ値の間の線形関係式を得られる (r, s の定義域が発散する場合の詳細は [4] や, 一般的な場合は [5] をご覧頂きたい).
最後に, 重さが 12 の場合の double shuffle relation を用いて, 重さが 12 の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式のベクトル空間 (M_{12} と表記) の基底を求めてみよう．まず, 重さ 12 の double shuffle relation の線形和を考えることにより, 以下の二つの等式を示すことができる:

$$84\zeta(4)\zeta(8) + 50\zeta(6)^2 = 143\zeta(12), \ 84\zeta(2)\zeta(10) - 8\zeta(6)^2 = 130\zeta(12). \tag{3.2}$$

$\zeta(2k)$ は Euler による π 冪の明示公式が知られているので, それを用いても得られる式ではあるが, それを用いると全てが π 冪に落ちてしまうため, 関係式 (3.2) は無意味に思えてくる．しかし, 2 重 Eisenstein 級数 (定義は [4, 8] 等を参照されたい) を用いることで, 関係式 (3.2) は次の Eisenstein 級数の間の関係式を導くことがわかる:

$$\begin{aligned}&84E_4(\tau)E_8(\tau) + 50E_6(\tau)^2 = 143E_{12}(\tau), \\ &84(E_2(\tau)E_{10}(\tau) - \frac{E_{10}(\tau)'}{20}) - 8E_6(\tau)^2 = 130E_{12}(\tau).\end{aligned}$$

ここで, $E_k(\tau) = \zeta(k)/(2\pi i)^k + 1/(k-1)! \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n$ である.
ところで, $M_{12} \ni E_2(\tau)E_{10}(\tau) - E_{10}(\tau)'/20, E_4(\tau)E_8(\tau), E_6(\tau)^2, E_{12}(\tau)$ であり, 上記関係式から, これらが張るモジュラー形式の空間は 2 次元であることがわかる．ここまでの議論だけでは, 例えば上記 4 つのモジュラー形式がはるベクトル空間の生成元として $E_6(\tau)^2, E_{12}(\tau)$ をとると, この二つの間に線形関係式が存在しないことは言っていない (最初の Fourier 係数を見ればすぐわかる) が, 実は, [4] において, k が偶数のときに double shuffle relation からくる $\zeta(2r)\zeta(k-2r)$ $(0 \leq r \leq [k/4])$ の間の線形関係式は, $E_{2r}E_{k-2r}$ と E_k の間の全ての関係式を与えるということが示されている.
このような議論を $\Gamma_0(2)$ においても構成することで, Lemma 6 の証明がなされる.

Acknowledgement

最後に, 今回城崎新人セミナーでポスター発表の機会を下さいました, 城崎新人セミナー運営委員の方々に感謝致します. 大変楽しい集会でした. ありがとうございました.

[1] 個人的に 2012 年 1 月号の数学セミナーの安田正大さんの記事は大変面白く, おすすめです.

参考文献

[1] H. H. Chan, K. S. Chua, *Representations of integers as sums of* 32 *squares.* The Ramanujan J. **7**, 79–89 (2003)

[2] H. H. Chan, C. Krattenthaler, *Recent progress in the study of representations of integers as sums of squares.* Bull. London Math. Soc. **37**(6), 818–826 (2005)

[3] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers.* Vol. II: Diophantine analysis. Chelsea Publishing Co., New York (1966).

[4] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms.* Automorphic forms and Zeta functions. Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, 71–106 (2006)

[5] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values.* Compositio Math. **142**(2), 307–338 (2006)

[6] Ő. Imamoḡlu, W. Kohnen, *Representations of integers as sums of an even number of squares.* Math. Ann. **333**(4), 815–829 (2005)

[7] V. G. Kac, M. Wakimoto, *Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory*, Lie Theory and Geometry in Honor of Bertram Kostant (Eds. J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin, and V. Kac), Progr. Math. **123**, 415–456 (1994)

[8] M. Kaneko, *二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数, およびモジュラー形式*, 京大数理研短期共同「多重ゼータ値の研究」報告集, (2004).

[9] M. Kaneko, K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level* 2. preprint (2011)

[10] L. Long, Y. Yang, *A short proof of Milne's formulas for sums of integer squares.* Int. J. Number Theory **1**(4), 533–551 (2005)

[11] S. Milne, *New infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, and Ramanujan 's tau function.* Proc. Natl. Acad. Sci., USA. **93**, 15004–15008 (1996)

[12] S. Milne, *Infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions*, Ramanujan J. **6**, 7–149 (2002)

[13] K. Ono, *Representations of integers as sums of squares*, J. Number Theory **95**, 253–258 (2002)

[14] I. Peterson, *Surprisingly Square.* Science News, June 16, Vol. 159, No. 24 (2001)

[15] K. Tasaka, *On a conjecture for representations of integers as sums of squares and double shuffle relations.* preprint (2011)

[16] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications.* First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.

[17] D. Zagier, *A proof of the Kac-Wakimoto affine denominator formula for the strange series*, Math. Res. Letters 7, 597–604 (2000)