

超幾何微分方程式の Voros 係数

反田 美香*

近畿大学大学院総合理工学研究科 理学専攻

第9回城崎新人セミナーに参加させていただき、ありがとうございました。運営委員の皆様には大変お世話になり、この場を借りてお礼申し上げます。本稿の結果は近畿大学の青木貴史教授との共同研究によるものである。

1 はじめに

この報告では超幾何微分方程式の Stokes グラフの分類と大きなパラメータを導入した超幾何微分方程式の Voros 係数を定義し、具体形について考察する。Voros 係数の概念は [13] に於いて導入された。Voros 係数は Schrödinger 形の方程式のパラメータを動かしたときの WKB 解の Stokes 現象を記述する為に利用されている。([5], [6])。最近, Weber 方程式 ([10], [11]) や Whittaker 方程式 ([8]) の Voros 係数の具体形が明らかになった。今回の発表では超幾何微分方程式について Voros 係数を定義し、パラメータの特別な値に対して Voros 係数の具体形を明らかにした。Voros 係数の具体形を明らかにするためにパラメータに依存する Stokes グラフの具体形を知る必要がある。その為に Stokes グラフの位相的分類を行った ([12], [2])。次に超幾何微分方程式の具体的なパラメータに対して Voros 係数を求めた。

2 おおきなパラメータにおける超幾何微分方程式

一般的な定数 $a, b, c \in \mathbb{C}^3$ 古典的超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + (c - (a+b+1)x)\frac{dw}{dx} - abw = 0 \quad (2.1)$$

に大きなパラメータ η を $a = 1/2 + \eta\alpha$, $b = 1/2 + \eta\beta$, $c = 1 + \eta\gamma$ と導入する。ここで α, β, γ は複素数である。また、未知関数の変換

$$\psi = x^{\frac{1}{2} + \frac{\eta\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2} + \frac{\eta(\alpha+\beta-\gamma)}{2}}w \quad (2.2)$$

により一階項を消去することにより次の方程式を得る:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \eta^2 Q\right)\psi = 0. \quad (2.3)$$

ここで

$$Q = Q_0 + \eta^{-2}Q_1 \quad (2.4)$$

であり,

$$Q_0 = \frac{(\alpha - \beta)^2 x^2 + 2(2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma)x + \gamma^2}{4x^2(x-1)^2}, \quad (2.5)$$

$$Q_1 = -\frac{x^2 - x + 1}{4x^2(x-1)^2}. \quad (2.6)$$

*tanda@math.kindai.ac.jp

である. 方程式 (2.3) は WKB 解と呼ばれる形式解

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp(\pm \int_{a_h}^x S_{\text{odd}} dx) \quad (2.7)$$

を持つ. ただし, S_{odd} は (2.3) に付随する Riccati 方程式

$$\frac{dS}{dx} + S^2 = \eta^2 Q \quad (2.8)$$

の η^{-1} に関する形式的冪級数解 $S = \sum_{j=-1}^{\infty} \eta^{-j} S_j$ の奇数次部分であり, a_h ($h = 0, 1$) は方程式 (2.3) の変わり点の一つであり, Q_0 の零点と呼ばれる. また, Q は ι_j ($j = 0, 1, 2$) で不変である:

$$\begin{aligned} \iota_0 : (\alpha, \beta, \gamma) &\mapsto (\beta, \alpha, \gamma) \\ \iota_1 : (\alpha, \beta, \gamma) &\mapsto (\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma) \\ \iota_2 : (\alpha, \beta, \gamma) &\mapsto (-\alpha, -\beta, -\gamma) \end{aligned} \quad (2.9)$$

変わり点 a_h ($h = 0, 1$) から生じる Stokes 曲線とは

$$\text{Im} \int_{a_h}^x \sqrt{Q_0} dx = 0 \quad (2.10)$$

で定まる曲線である. Stokes 曲線は特異点または変わり点に流れ込む. ここで特異点は $0, 1, \infty$ である. 2 つの変わり点 a_0, a_1 変わり点から生じるすべての Stokes 曲線および特異点 $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = \infty$ のなすグラフを Stokes グラフと呼ぶ. また, 方程式 (2.3) の Stokes 幾何は Stokes 曲線がわり点 a_h ($h = 0, 1$) どうしを結ばないとき非退化と呼ぶ方程式 (2.1) の Stokes グラフは方程式 (2.3) によって定まる.

3 超幾何微方程式の Stokes グラフ

この節では, 方程式 (2.3) のグラフの α, β, γ を用いた位相的分類を行う. ここでパラメータ α, β, γ における集合 E_j ($j = 0, 1, 2$) を次のように定める:

$$E_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \gamma) \cdot (\beta - \gamma) \cdot (\alpha + \beta - \gamma) = 0\}, \quad (3.1)$$

$$E_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re} \alpha \cdot \text{Re} \beta \cdot \text{Re}(\gamma - \alpha) \cdot \text{Re}(\gamma - \beta) = 0\}, \quad (3.2)$$

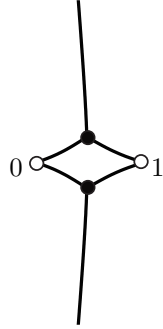
$$E_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}(\alpha - \beta) \cdot \text{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \cdot \text{Re} \gamma = 0\}. \quad (3.3)$$

もし (α, β, γ) が E_0 に含まれない, ならば, 2 つの相異なる変わり点 a_0, a_1 があり $a_0, a_1 \neq 0, 1, \infty$ である. さらに, (α, β, γ) が $E_1 \cup E_2$ に含まれないならば, Stokes 幾何は非退化である. この事実は次の定理による.

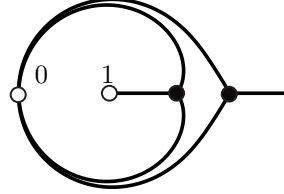
定理 3.1. ([12], Theorem 3.1) パラメータ (α, β, γ) が E_0 に含まれないとする.

- (i) 1 本の Stokes 曲線異なる点を結ぶならば (α, β, γ) が E_1 に含まれる.
- (ii) 閉曲線 (同一の変わり点を結ぶ曲線) ならば (α, β, γ) が E_2 に含まれる.

パラメータ (α, β, γ) が $E_0 \cup E_1 \cup E_2$ に含まれないと仮定する. Stokes グラフはそれぞれの特異点 b_j ($j = 0, 1, 2$) に流れ込む Stokes 曲線の本数の列 $\hat{n} = (n_0, n_1, n_2)$ (これを Stokes グラフの指数という) により位相的に分類できる. Stokes グラフの図は以下のようなになる (図 3.1, 図 3.2).

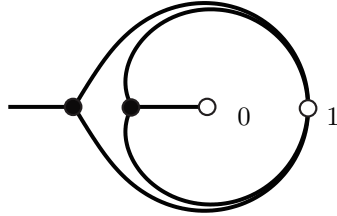


$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0.1, 2, 1), \hat{n} = (2, 2, 2)$$

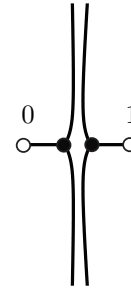


$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0.5, 0.995, 1), \hat{n} = (4, 1, 1)$$

図 3.1



$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1.01, 2, 1), \hat{n} = (1, 1, 4)$$



$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-0.03, 2, 1), \hat{n} = (1, 4, 1)$$

図 3.2

ここで黒丸は変わり点, 白丸は特異点である.

次にパラメータ α, β, γ の集合 ω_k ($k = 1, 2, 3, 4$) を次のように定義する:

$$\omega_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\gamma < \operatorname{Re}\beta\}, \quad (3.4)$$

$$\omega_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\gamma < \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta\}, \quad (3.5)$$

$$\omega_3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid 0 < \operatorname{Re}\gamma < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta\}, \quad (3.6)$$

$$\omega_4 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \mid \operatorname{Re}\gamma - \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\alpha < 0\}. \quad (3.7)$$

また, G を ι_j ($j = 0, 1, 2$) で生成される群とし, Π_k を次のように定義する:

$$\Pi_k = \bigcup_{r \in G} r(\omega_k) \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (3.8)$$

パラメータによって Stokes グラフを位相的に分類する.

定理 3.2. Stokes グラフの指数を \hat{n} とする

(1) $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_1$ のとき $\hat{n} = (2, 2, 2)$ である.

(2) $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_2$ のとき $\hat{n} = (4, 1, 1)$ である.

(3) $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_3$ のとき $\hat{n} = (1, 4, 1)$ である.

(4) $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_4$ のとき $\hat{n} = (1, 1, 4)$ である.

注意 3.3. $\operatorname{Re} \gamma > 0$ と固定したとき, α, β の整数部分の平面で ω_k と Π_k は図 3.3 のようになる.

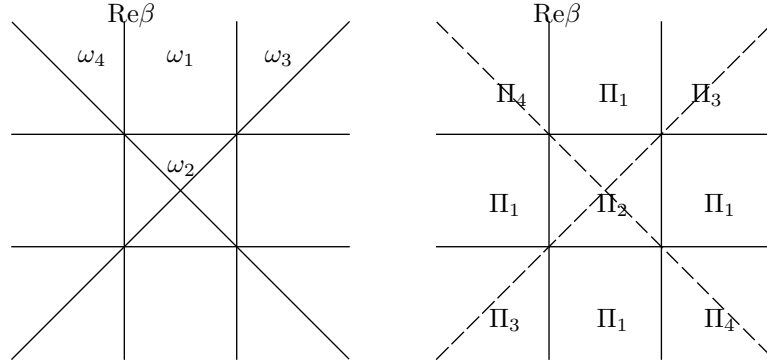


図 3.3

証明は [2] 参照.

4 Voros 係数

この節では次のような積分を考察する:

$$V = V(\alpha, \beta, \gamma) := \int_0^{a_0} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx. \quad (4.1)$$

ここで a_0 は変わり点のひとつである. 2つの変わり点どうし結ぶ線分にカットを入れ, $x \rightarrow \infty$ のとき $\sqrt{Q_0} \sim \frac{\beta-\alpha}{x}$ となるように $S_{-1} = \sqrt{Q_0}$ の分枝を固定する. 原点に対する S_{odd} と ηS_{-1} の留数は等しいため積分は収束し, $V(\alpha, \beta, \gamma)$ は η^{-1} の形式的冪級数である. 方程式 (2.3) の $(0, a_0)$ に関する $V(\alpha, \beta, \gamma)$ を Voros 係数と呼ぶ. Voros 係数は WKB 解の積分の始点を a_0 として規格化したものと始点を原点として規格化したものの違いを表すものである. すなわち

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_{a_0}^x S_{\text{odd}} dx\right), \quad (4.2)$$

$$\psi_{\pm}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_0^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \pm \eta \int_{a_0}^x S_{-1} dx\right) \quad (4.3)$$

と定めると関係式

$$\psi_{\pm}^{(0)} = \exp(\pm V) \psi_{\pm} \quad (4.4)$$

を満たす. ここでは (α, β, γ) が $(-0.1, 2, 1)$ に十分近い場合を考察する. このとき, 2つの変わり点 a_0, a_1 は実軸上の $(0, 1)$ 内にあるので $0 < \text{Re } a_0 < \text{Re } a_1 < 1$ と仮定する.

Voros 係数 (4.1) を解くことにより次の定理が得られる.

定理 4.1. $(0, a_0)$ に関する Voros 係数を V とすると次のような式が成り立つ.

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n(n-1)} \eta^{1-n} \left\{ (1 - 2^{1-n}) \left(\frac{1}{(\gamma - \alpha)^{n-1}} + \frac{1}{(\gamma - \beta)^{n-1}} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} + \frac{1}{\beta^{n-1}} \right) + \frac{2}{\gamma^{n-1}} \right\}. \quad (4.5)$$

ただし, B_n ($n = 1, 2, \dots$) は Bernoulli 数であり次の関係式により定義する:

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n. \quad (4.6)$$

Voros 係数の具体形 (4.5) を求める為に [11] で与えられた方法の応用を利用し、さらに (α, β, γ) に関する差分について V が満たす差分方程式系 ([7]) を利用する。

$$H_1(a, b, c) = x \frac{d}{dx} + a : \mathcal{T}(a, b, c) \rightarrow \mathcal{T}(a+1, b, c) \quad (4.7)$$

$$H_2(a, b, c) = x \frac{d}{dx} + b : \mathcal{T}(a, b, c) \rightarrow \mathcal{T}(a, b+1, c) \quad (4.8)$$

$$B_3(a, b, c) = x \frac{d}{dx} + c - 1 : \mathcal{T}(a, b, c+1) \rightarrow \mathcal{T}(a, b, c) \quad (4.9)$$

ここで $\mathcal{T}(a, b, c)$ は超幾何微分方程式 (2.3) の解空間である。

補題 4.2. $(0, a_0)$ に関する Voros 係数 V は次の差分方程式系の解であり、 $(\alpha, \beta, \gamma, \eta^{-1})$ について 0 次斉次な η^{-1} に関する形式的冪級数解として唯一のものである。

$$V(\alpha + \eta^{-1}, \beta, \gamma) - V(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\gamma - \alpha - \frac{1}{2}\eta^{-1}}{-\alpha - \frac{1}{2}\eta^{-1}} - \frac{\eta}{2} \left\{ \alpha \log(-\alpha) - (\alpha + \eta^{-1}) \log(-\alpha - \eta^{-1}) \right. \\ \left. - (\alpha - \gamma) \log(\gamma - \alpha) + (\alpha + \eta^{-1} - \gamma) \log(\gamma - \alpha - \eta^{-1}) \right\},$$

$$V(\alpha, \beta + \eta^{-1}, \gamma) - V(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\beta + \frac{1}{2}\eta^{-1} - \gamma}{\beta + \frac{1}{2}\eta^{-1}} - \frac{\eta}{2} \left\{ \beta \log \beta - (\beta + \eta^{-1}) \log(\beta + \eta^{-1}) \right. \\ \left. - (\beta - \gamma) \log(\beta - \gamma) + (\beta + \eta^{-1} - \gamma) \log(\beta + \eta^{-1} - \gamma) \right\},$$

$$V(\alpha, \beta, \gamma + \eta^{-1}) - V(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\gamma(\gamma + \eta^{-1})}{(\gamma + \frac{1}{2}\eta^{-1} - \alpha)(\beta - \gamma - \frac{1}{2}\eta^{-1})} - \frac{\eta}{2} \left\{ (\alpha - \gamma - \eta^{-1}) \log(-\alpha + \gamma + \eta^{-1}) \right. \\ \left. - (\alpha - \gamma) \log(-\alpha + \gamma) + (\beta - \gamma - \eta^{-1}) \log(\beta - \gamma - \eta^{-1}) \right. \\ \left. - (\beta - \gamma) \log(\beta - \gamma) + (\gamma + \eta^{-1}) \log(\gamma + \eta^{-1})^2 - \gamma \log \gamma^2 \right\}.$$

差分方程式系 (4.10)~(4.12) は両立条件を満たし、[4] で与えられた方法を応用したものを利用する。今回重要なアイデアとして形式的な微分作用素

$$\eta^{-1} \partial_\alpha (e^{\eta^{-1} \partial_\alpha} - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \eta^{-n} \partial_\alpha^n \quad (4.13)$$

を利用する。ただし、 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ である。Voros 係数を次の補題を利用し計算する。

補題 4.3.

$$\partial_\alpha (e^{\eta^{-1} \partial_\alpha} - 1)^{-1} \log \left(1 + \frac{1}{\eta \alpha} \right) = \frac{1}{\alpha}, \quad (4.14)$$

$$\partial_\alpha (e^{\eta^{-1} \partial_\alpha / 2} - 1)^{-1} \log \left(1 + \frac{1}{2\eta \alpha} \right) = \frac{1}{\alpha}. \quad (4.15)$$

この補題は重要だが証明は容易である。(4.14) に現れる対数

$$\log \left(1 + \frac{1}{\eta \alpha} \right) \quad (4.16)$$

を α について微分し

$$\partial_\alpha \log \left(1 + \frac{1}{\eta \alpha} \right) = \frac{1}{\alpha + \eta^{-1}} - \frac{1}{\alpha} = (e^{\eta^{-1} \partial_\alpha} - 1) \frac{1}{\alpha}$$

を得る. また, $e^{\eta^{-1}\partial_\alpha}$ を形式的に展開することにより次を得る:

$$e^{\eta^{-1}\partial_\alpha} \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\eta^{-1}\partial_\alpha)^n \frac{1}{\alpha} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-\eta\alpha)^{-n} \\ &= \frac{1}{\alpha + \eta^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

よって

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \log \left(1 + \frac{1}{\eta\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha + \eta^{-1}} - \frac{1}{\alpha} \\ &= (e^{\eta^{-1}\partial_\alpha} - 1) \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる.

(4.15) は (4.14) の α を 2α と変換することにより得る.

定理の証明および他の場合の Stokes グラフの Voros 係数については現在準備中の論文に記載予定である.

参考文献

- [1] Aoki, T. and Iizuka, T., Classification of Stokes graphs of second order Fuchsian differential equations of genus two, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **43** (2007), 241–276.
- [2] Aoki, T. and Tanda, M., Characterization of Stokes graphs and Voros coefficients of hypergeometric differential equations with a large parameter, in preparation.
- [3] Aoki, T. and Tanda, M., Some concrete shapes of degenerate Stokes curves of hypergeometric differential equations with a large parameter, *J. School Sci. Eng. Kinki Univ.*, **47** (2011), 5–8
- [4] Candelpergher B., Coppo M. A. and Delabaere E., La sommation de Ramanujan, *L'Enseignement Mathématique*, **43** (1997), 93–132.
- [5] Delabaere E., Dillinger H. and Pham F., Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **43** (1993), 153–199.
- [6] Delabaere E. and Pham F., Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **71** (1999), 1–94.
- [7] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S. and Yoshida M., From Gauss to Painlevé, Friedr Vieweg & Sohn, 1991.
- [8] Koike T. and Takei Y., On the Voros coefficient for Whittaker equation with a large parameter, – Some progress around Sato’s conjecture in exact WKB analysis, *Publ. RIMS, Kyoto Univ*, **47** (2011), 375–396.
- [9] Sasaki, S., On the classification of Stokes graphs for second order Fuchsian equation, *Master’s Thesis, RIMS, Kyoto University, 2010*.
- [10] Shen, H. and Silverstone, H. J., Observations on the JWKB treatment of the quadratic barrier, *Algebraic Analysis of Differential Equations*, Springer, 2008, pp. 307–319.
- [11] Takei Y., Sato’s conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B10** (2008), 205–224.
- [12] Tanda, M. Exact WKB analysis of hypergeometric differential equations, *to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [13] Voros A., The return of the quartic oscillator, The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), 211–338.