

bow variety の構成について

高山 侑也*

京都大学 数理研 M2

0 はじめに

第九回城崎新人セミナーに参加させていただき、ありがとうございました。この場を借りて運営委員の皆様にお礼申し上げます。

タイトルにある bow variety (以後、日本語で弓箭多様体と呼ぶ) とはある種の超ケーラー多様体の族のことで、 \mathbb{C} 多様体 (quiver variety)¹ を拡張したものである。そもそも \mathbb{C} 多様体が考え出されたきっかけは、ALE 空間を構成することにあつた。その後、ALE 空間上のインスタントも \mathbb{C} 多様体として構成できたり、その (コ) ホモロジー環が表現論で重要な役割を果たしたりと発展し続けている。 \mathbb{C} 多様体を拡張した弓箭多様体を考える目的は、ALE 空間の親戚である ALF 空間を構成することにある。まだまだ定義すら厳密にはできない状況であるが、いずれは \mathbb{C} 多様体のように有名になることを願っている。

以上のことを踏まえ、この報告書では次のことを説明する。 §1 では超ケーラー多様体の定義や例を説明し、 §2 で超ケーラー多様体から別の超ケーラー多様体を構成する方法を述べる。特に、 \mathbb{C} 多様体の構成の仕方を簡単に紹介する。 §3 で \mathbb{C} 多様体を用いて ALE 空間を構成した Kronheimer の論文を紹介する。 §4 で ALE 空間の親戚である ALF 空間を構成するためには弓箭多様体が必要になるということを説明する。

1 定義と例

定義 1.1. (i) 多様体 M が複素構造 I を持つとき、 (M, I) を複素 (complex) 多様体という。

(ii) 多様体 M が三つの複素構造 I, J, K を持ち、 $IJ = K = -JI$ を満たすとき、 (M, I, J, K) を超複素 (hypercomplex) 多様体という。

(iii) 複素多様体 (M, I) が I で保たれる計量 g を持ち、 $g(I\cdot, \cdot)$ が閉微分形式になるとき、 (M, I, g) をケーラー (Kähler) 多様体という。

(iv) 超複素多様体 (M, I, J, K) が I, J, K で保たれる計量 g を持ち、 $g(I\cdot, \cdot), g(J\cdot, \cdot), g(K\cdot, \cdot)$ が閉微分形式になるとき、 (M, I, J, K, g) を超ケーラー (hyper-Kähler) 多様体という。

注意 1.2. (a) 複素構造 I とは接空間上の線形写像 $I: TM \rightarrow TM$ で $I^2 = -\text{id}$ となるもの。この条件から (i)(iii) は $2n$ 次元、(ii)(iv) は $4n$ 次元に限られる。

(b) 計量 g が I で保たれるとは、接空間 TM の任意の元 v, w に対して $g(Iv, Iw) = g(v, w)$ が成り立つという意味。このとき

$$g(Iv, w) = g(I^2v, Iw) = g(-v, Iw) = -g(Iw, v)$$

より $g(I\cdot, \cdot)$ は二次微分形式となる。これを ω_I と書き I に関する基本二次形式と呼ぶ。特に閉のときケーラー形式という。

*takayama@kurims.kyoto-u.ac.jp

¹中島先生曰く、「あえて日本語にしたらわかりにくい \mathbb{C} (= 矢筒=quiver) という訳語を充てた」とのことなのでそれに倣い bow に弓箭 (= 弓矢) という日本語を充てることにした。

これらの多様体はリーマン多様体等と比べて豊富な構造が入っているため、微分幾何学的に扱いやすい。特にケーラー多様体や超ケーラー多様体は代数幾何学などの周辺分野と関連深く、例えば、代数多様体はケーラー多様体であるし、4次元コンパクト超ケーラー多様体はK3曲面かトーラス T^4 であることが知られている。以下ではコンパクトでない超ケーラー多様体だけを扱う。

超ケーラー多様体の例を挙げる。

例 1.3. 4次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$.

計量は $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$, 接ベクトル $a_1 \frac{d}{dx_1} + a_2 \frac{d}{dx_2} + a_3 \frac{d}{dx_3} + a_4 \frac{d}{dx_4}$ を (a_1, a_2, a_3, a_4) とかくと複素構造は

$$I(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3), \quad J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_3, a_4, a_1, -a_2), \quad K(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_4, -a_3, a_2, a_1)$$

で与えられる。これは四元数体 $\mathbb{H} = \{a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4\}$ への i, j, k の左からの作用と同じ。ケーラー形式は

$$\omega_I = 2dx_1 \wedge dx_2 + 2dx_3 \wedge dx_4, \quad \omega_J = 2dx_1 \wedge dx_3 + 2dx_4 \wedge dx_2, \quad \omega_K = 2dx_1 \wedge dx_4 + 2dx_2 \wedge dx_3$$

となる。

例 1.4. 行列の組 $(A, B) \in M(n, m; \mathbb{C}) \times M(m, n; \mathbb{C})$.

これは \mathbb{C}^{2nm} と同型で、上の \mathbb{R}^4 の nm 個の直積と見ることができるので超ケーラー構造が入る。計量、複素構造、ケーラー形式は行列の言葉でも書くことができる。

$$g = \text{tr}\{dAdA^* + dBdB^*\}$$

$$I(a, b) = (ia, ib),$$

$$J(a, b) = (-b^*, a^*),$$

$$K(a, b) = (-ib^*, ia^*),$$

$$\omega_I = 2i \text{tr}\{dA \wedge dA^* + dB \wedge dB^*\}, \quad \omega_J = 2 \text{tr}\{-dA \wedge dB + dA^* \wedge dB^*\}, \quad \omega_K = 2i \text{tr}\{dA \wedge dB + dA^* \wedge dB^*\}.$$

例 1.5. 行列値関数の組 $(T_0(s), T_1(s), T_2(s), T_3(s)) \in \Gamma([0, 1], \mathfrak{u}(n)) \otimes \mathbb{R}^4$.

これは無限次元であるが、深くは気にしないことにする。ここで $\mathfrak{u}(n)$ は n 次ユニタリー行列 $U(n)$ のリー環で、 n 次歪エルミート行列、つまり $T(s)^* = -T(s)$ 。計量は $g = \int_0^1 \text{tr}\{dT_0dT_0^* + dT_1dT_1^* + dT_2dT_2^* + dT_3dT_3^*\} ds$ で定める。正確な意味は、接ベクトル $u = (t_0(s), t_1(s), t_2(s), t_3(s)), v = (t'_0(s), t'_1(s), t'_2(s), t'_3(s))$ に対して

$$g(u, v) = \int_0^1 \text{tr}\{t_0(s)t'_0(s)^* + t_1(s)t'_1(s)^* + t_2(s)t'_2(s)^* + t_3(s)t'_3(s)^*\} ds.$$

複素構造、ケーラー形式は \mathbb{R}^4 の超ケーラー構造からくるものとして定まる。

2 超ケーラー商

超ケーラー多様体 M に対してリー群 G のよい作用を考える。そのとき運動量写像と呼ばれる、以下を満たすような写像 $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K): M \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$ が得られる:

$$\langle d\mu_A(v), \xi \rangle = \omega_A(v, \tilde{\xi}), \quad (2.1)$$

$$\mu_A(g \cdot x) = g\mu_A(x)g^{-1} \quad (\text{正確には } \text{Ad}_g^* \mu_A(x)), \quad (2.2)$$

ただし $v \in TM, \xi \in \mathfrak{g}, A = I, J, K, x \in M, g \in G$ で、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathfrak{g} と \mathfrak{g}^* ペアリング、 $\tilde{\xi}$ は $\xi \in \mathfrak{g}$ で生成されるベクトル場。

また $Z = \{\zeta \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3 \mid g\zeta g^{-1} = \zeta \text{ for all } g \in G\}$ とおく. このとき (2.2) より, $\zeta \in Z$ に対して $\mu(x) = \zeta$ なる点 $x \in M$ の集合は G の作用で保たれる. つまり $\mu^{-1}(\zeta) \subset M$ にもリー群 G が作用する. $\mu^{-1}(\zeta)$ を G で割ったものを \mathcal{M}_ζ と書き, 超ケーラー商 (hyper-Kähler quotient (or reduction)) と呼ぶ.

$$\mathcal{M}_\zeta := \mu^{-1}(\zeta)/G = \mu_I^{-1}(\zeta_I) \cap \mu_J^{-1}(\zeta_J) \cap \mu_K^{-1}(\zeta_K)/G.$$

このとき, ζ を超ケーラー商のパラメータと呼ぶ.

定理 2.1. リー群 G がコンパクトで, M への作用が自由なとき, \mathcal{M}_ζ も超ケーラー多様体.

自由な作用とは, $gx = x$ となる g が id しかないという意味. 作用が自由でないような $x \in M$ があると, 一般には \mathcal{M}_ζ が特異点を持つ. 群のコンパクト性を仮定しないと, 一般にはハウスドルフ空間にすらならない (例 トーラス T^2 に対する傾き無理数の \mathbb{R} の作用). 証明には (2.1) の条件が本質的. 詳しくは [HKLR] などを見てもらうことにして, 上の例に対して運動量写像を計算し, 超ケーラー商を考える.

例 2.2. 例 1.4 の行列の組 $(A, B) \in M(n, m; \mathbb{C}) \times M(m, n; \mathbb{C})$.

ユニタリー行列 $U(n)$ の作用を $g \cdot (A, B) = (gA, Bg^{-1}), g \in U(n)$ で与える. このとき $\xi \in \text{Lie}U(n)$ で生成されるベクトル場は,

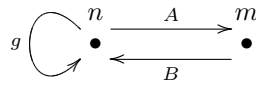
$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\xi} \cdot (A, B) = (\xi A, -B\xi)$$

で与えられる. $v = (a, b)$ とし, $\xi^* = -\xi$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \omega_I(v, \tilde{\xi}) &= 2i \text{tr}\{dA \wedge dA^* + dB \wedge dB^*\}((a, b), (\xi A, -B\xi)) \\ &= 2i \text{tr}\{a(\xi A)^* + b(-B\xi)^* - \xi Aa^* - (-B\xi)b^*\} \\ &= 2i \text{tr}\{(aA^* + Aa^* - B^*b - b^*B)\xi^*\} \\ &= 2i \langle d(AA^* - B^*B)(a, b), \xi \rangle. \end{aligned}$$

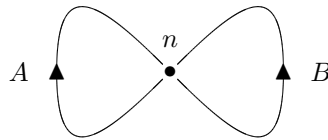
すなわち $\mu_I = 2i(AA^* - B^*B)$ を得る. 同様にして, $\mu_J = (-AB + A^*B^*), \mu_K = i(AB + A^*B^*)$ を得る.

(A, B) は n 次元ベクトル空間と m 次元ベクトル空間の間の線形写像と見ることができる. そのときユニタリー群の作用も n 次元ベクトル空間への通常的作用.



このように, ベクトル空間の間の線形写像の組に群の作用を与え, 超ケーラー商を取ったものを籠多様体と呼ぶ. 正確な定義等は [Na1] を参照してください.

応用として, 次の図式を考える.



これは例 2.2 の図式の両端をくっつけたもの. 群の作用と運動量写像は

$$\begin{aligned} g \cdot (A, B) &= (gAg^{-1}, gBg^{-1}) \\ \mu_I(A, B) &= 2i([A, A^*] + [B, B^*]) \\ \mu_J(A, B) &= 2(-[A, B] + [A^*, B^*]) \\ \mu_K(A, B) &= 2i([A, B] + [A^*, B^*]) \end{aligned}$$

となる ($g \in U(n)$). 運動量写像は真面目に計算してもいいが, 例えば μ_I は

$$\begin{aligned} (A, B) &\rightarrow (gA, Bg^{-1}) \quad \text{の } \mu_I 2i(AA^* - B^*B) \\ (A, B) &\rightarrow (Ag^{-1}, gB) \quad \text{の } \mu_I 2i(BB^* - A^*A) \end{aligned}$$

を足すことで得られる.

命題 2.3. 上の状況で次が成り立つ

$$\mathcal{M}_0 \cong S_n \mathbb{C}^2 \quad (n \text{ 点の対称積})$$

証明の概略.

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{R}} &:= \mu_I = 2i([A, A^*] + [B, B^*]) \\ \mu_{\mathbb{C}} &:= \mu_J + i\mu_K = -4[A, B] \\ p_{(A,B)}(g) &:= \|g \cdot (A, B)\|^2 = \text{tr}\{(gAg^{-1})(gAg^{-1})^* + (gBg^{-1})(gBg^{-1})^*\} \end{aligned}$$

と置く.

補題 2.4. 次の三つが一対一に対応する.

1. $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ 中の $U(n)$ 軌道
2. $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ 中の $GL(n)$ 閉軌道
3. $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ に対する $GL(n)/U(n)$ 上の関数 $p_{(A,B)}(g)$ の最小値

補題の証明. 1 \Leftrightarrow 3) 関数 $p_{(A,B)}(g)$ は $U(n)$ の作用で不変であることに注意する. $g_t = e^{it\xi} \in GL(n)$ ($\xi \in \text{Lie } U(n)$) として $t=0$ で $p(g_t)$ を微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p_{(A,B)}(g_t) &= 2 \text{tr}\{i\xi AA^* + A(-i\xi)A^* + i\xi BB^* + B(-i\xi)B^*\} \\ &= 2\langle -i([A, A^*] + [B, B^*]), \xi \rangle \\ \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} p_{(A,B)}(g_t) &= 2 \text{tr}\{(i\xi)^2 AA^* + A(-i\xi)^2 A^* + (i\xi)^2 BB^* + B(-i\xi)^2 B^*\} \\ &= 2\|(\xi A, \xi B)\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって関数 $p_{(A,B)}(g)$ が最小値を取るような g のみに対し, $g \cdot (A, B)$ は $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)$ に入る.

2 \Leftrightarrow 3) $GL(n)$ 閉軌道の中には関数 $p_{(A,B)}(g)$ を最小にするような g が存在する. 逆に最小にするような g があれば $GL(n)$ 閉軌道となることは頑張ればわかる. \square

従って通常の超ケーラー商 (補題 2.4 の 1) を考える代わりに, 補題 2.4 の 2 を考えることができる.

一方, 線形代数で知られているように, $[A, B] = 0$ を満たす (A, B) は同時上三角化出来る. そのような (A, B) の中で $GL(n)$ 軌道が閉になるのは, A も B も対角行列のときだけ. (何故なら, 例えば

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b/t \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

の $t \rightarrow 0$ の極限を考えると, 閉になるためには $b=0$ が必要.) A, B それぞれの対角成分 (=固有値) の組は \mathbb{C}^2 の元と思うことができ, それら n 組は並べ方によらないので $S_n \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^n / S_n$ と一致する. \square

厳密な証明については [Na2, §3] を参照してください.

注意 2.5. 補題 2.4 の 2 の商 ($= \{\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)\}^{ss}/GL(n)$, 「ss」は閉軌道しか考えないというおまじない) のことを幾何学的不変式論商 (geometric-invariant-theory(=GIT) quotient) という. これは代数幾何学的な商なので, 商多様体も代数多様体になる [MFK].

命題 2.6. \mathcal{M}_0 は代数多様体.

証明. $\mu_{\mathbb{C}} = 4[A, B]$ は多項式なので, 上の注意から直ちに従う. □

これと同じように議論することで, 籠多様体は確かに “variety” になる.

注意 2.7. 命題 2.3 の超ケーラー商において, パラメータを $0 = (0, 0, 0) \mapsto (\zeta, 0, 0)$ とすると, \mathbb{C}^2 の n 点のヒルベルト・スキームが得られる. それぞれを幾何学的不変式論の言葉で書くと, ヒルベルト・スキームから対称積への自然な写像が得られ, しかもそれは代数幾何の特異点解消となる. [Na2, §3]

超ケーラー商の例をもう一つ挙げる.

例 2.8. 例 1.5 の行列値関数の組 $(T_0(s), T_1(s), T_2(s), T_3(s)) \in \Gamma([0, 1], \mathfrak{u}(n)) \otimes \mathbb{R}^4$.

端で id になるユニタリ行列値関数 $\mathcal{G}_{00} := \{g(s) \in \Gamma([0, 1], U(n)) \mid g(0) = g(1) = \text{id}\}$ の作用を

$$g \cdot (T_0, T_k) = (gT_0g^{-1} - \frac{dg}{ds}g^{-1}, gT_kg^{-1}), \quad k = 1, 2, 3$$

で与える. $\xi(s) \in \text{Lie } \mathcal{G}_{00}$ で生成されるベクトル場は,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{t\xi} \cdot (T_0, T_k) = ([\xi, T_0] - \frac{d}{ds}\xi, [\xi, T_k])$$

で, $v = (t_0, t_k)$ とすると,

$$\begin{aligned} \omega_I(v, \tilde{\xi}) &= \int_0^1 \text{tr}\{dT_0 \wedge dT_1^* + dT_2 \wedge dT_3^*\} ds((t_0, t_k), ([\xi, T_0] - \frac{d}{ds}\xi, [\xi, T_k])) \\ &= \int_0^1 \text{tr}\{t_0([\xi, T_1])^* - ([\xi, T_0] - \frac{d}{ds}\xi)t_1^* + t_2([\xi, T_3])^* - ([\xi, T_2])t_3^*\} ds \\ &= \int_0^1 \text{tr}\{\frac{d}{ds}\xi \cdot t_1^* + t_0[T_1^*, \xi^*] - [\xi, T_0]t_1^* + t_2[T_3^*, \xi^*] - [\xi, T_2]t_3^*\} ds \\ &= [\xi(s)t_1^*(s)]_{s=0}^{s=1} + \int_0^1 \text{tr}\{-\xi \frac{d}{ds}t_1^* + [t_0, T_1^*]\xi^* - [T_0, t_1^*]\xi + [t_2, T_3^*]\xi^* - [T_2, t_3^*]\xi\} ds \\ &= \int_0^1 \text{tr}\{(-\frac{d}{ds}t_1 - [t_0, T_1] - [T_0, t_1] - [t_2, T_3] - [T_2, t_3])\xi^*\} ds \\ &= \langle -d(\frac{d}{ds}T_1 + [T_0, T_1] + [T_2, T_3])(t_0, t_1, t_2, t_3), \xi \rangle, \end{aligned}$$

ただし, 四つ目の等号では部分積分を使った. J, K に対しても同様に計算すると,

$$\begin{aligned} -\mu_I &= \frac{d}{ds}T_1 + [T_0, T_1] + [T_2, T_3] \\ -\mu_J &= \frac{d}{ds}T_2 + [T_0, T_2] + [T_3, T_1] \\ -\mu_K &= \frac{d}{ds}T_3 + [T_0, T_3] + [T_1, T_2] \end{aligned}$$

を得る. $\mu_I = 0, \mu_J = 0, \mu_K = 0$ としたものは Nahm 方程式と呼ばれる.

定理 2.9 (Kronheimer[Kr1], T). \mathcal{M}_0 , つまり Nahm 方程式の解のなすモジュライ空間は $T^*GL(n) \cong GL(n) \times \mathfrak{gl}(n)$ と複素シンプレクティック同相.

\mathcal{G}_{00} はコンパクトでないので, モジュライ空間が多様体になるところから示す必要がある. [Kr1] ではあまりちゃんと議論がされていないので, 厳密な証明を与えて修士論文にした².

注意 2.10. $n = 1$ とすると Nahm 方程式は自明になり, $\mathcal{M}_0 \cong GL(1) \times \mathfrak{gl}(1) \cong S^1 \times \mathbb{R}^3$ を得る. $S^1 \times \mathbb{R}^3$ が超ケーラー多様体になることは知られているが, この同型により超ケーラー構造が入ると思ってもよい.

3 籠多様体と ALE 空間

定義 3.1. コンパクトでない 4 次元超ケーラー多様体のうち, 体積の増大度が距離の 4 乗に比例するものを ALE (= *Asymptotically Locally Euclidean*) 空間と呼ぶ. ただし, 特異点はあってもよい.

例 3.2. 例 1.3 の \mathbb{R}^4 は ALE.

例 3.3. Γ を $SU(2)$ の有限部分群とする. これは ADE 型で分類できることが知られていて, 具体的には

$$A_n = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{(n+1)} & 0 \\ 0 & \zeta_{(n+1)}^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad D_n = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_{(2n-4)} & 0 \\ 0 & \zeta_{(2n-4)}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_6, E_7, E_8 \text{ は省略}$$

なるもの (ζ_m は 1 の m 乗根).

Γ は $SU(2)$ の部分群として $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ に自然に作用し, その作用で割ったもの ($= \mathbb{C}^2/\Gamma$) も ALE. これは \mathbb{C}^2 の計量 $dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2$ が $SU(2)$ で不変であることから従う.

この ALE という超ケーラー空間に対して次の強力な定理が知られている.

定理 3.4 (Kronheimer[Kr2]). ALE 空間は \mathbb{C}^2/Γ とその特異点解消で尽くされ, しかも超ケーラー商で構成できる.

この定理の Kronheimer による証明の手順としては,

1. Γ の拡大ディンキン図式に対応する超ケーラー商 \mathcal{M}_ζ を考える.
2. パラメータ ζ を 0 としたものが \mathbb{C}^2/Γ に一致.
3. パラメータ ζ を動かすと特異点解消に対応. 特異点解消したのもも ALE.
4. ALE 空間はこれらで尽くされる.

である.

2 についてのみ詳しく説明する. 命題 2.3 で得られた $\mathcal{M}_0 \cong S_n \mathbb{C}^2$ への Γ の作用を考え, 固定点を取る. これは \mathbb{C}^2 への作用から誘導される作用である. 特に $n = \#\Gamma$ とすると, 固定点は Γ の軌道が対角成分に現れるような行列の組.

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1 a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1 b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} b \end{pmatrix} \right)$$

つまり, \mathbb{C}^2/Γ と同型になる.

これは超ケーラー商の Γ 固定点を考えているが, とある Γ 固定点に対する超ケーラー商と思いたい. それにより得られるのが 1 の拡大ディンキン図式であり, これは籠多様体になっている. 3 で特異点解消が得られるのは注意 2.5 と同様の理由である. ALE であることは, 運動量写像の斉次性

$$\mu(rA, rB) = r^2 \mu(A, B)$$

を用いて, $\mathcal{M}_{(\zeta, 0, 0)}$ が $\mathcal{M}_{(0, 0, 0)}$ 近いことを示すことにより得られる. 4 は ALE 空間の一般論が必要になる.

²2012 年 6 月末の時点では未発表

4 弓箭多様体と ALF 空間

定義 4.1. コンパクトでない 4 次元超ケーラー多様体のうち、体積の増大度が距離の 3 乗に比例するものを ALF ($F=flat$) 空間と呼ぶ.

超ケーラー多様体は計量に関する条件も含んでいるので、ALE 空間の計量を変形して ALF 空間を得るといふ議論は出来ないことに注意する.

例 4.2. $S^1 \times \mathbb{R}^3$ は ALF.

注意 2.10 の様に超ケーラー構造が入り、 S^1 がコンパクトであることから明らか.

例 4.3. Taub-NUT 空間.

これは計量が

$$g_{TN} = \left(1 + \frac{1}{|y|}\right) dy_{\mathbb{R}^3}^2 + \left(1 + \frac{1}{|y|}\right)^{-1} (d\psi + \omega)^2$$

で与えられる \mathbb{R}^4 と微分同相の超ケーラー多様体.

この計量は \mathbb{R}^4 の計量を変形したのようになっていて、実際ホップ・ファイバーによる座標を用いると、

$$g_{\mathbb{R}^4} = \frac{1}{|y|} dy_{\mathbb{R}^3}^2 + \left(\frac{1}{|y|}\right)^{-1} (d\psi + \omega)^2$$

となる. ただし、ホップ・ファイブレーションは $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$ と思い、 S^1 のファイバーの座標を ψ とする. ω は \mathbb{R}^3 上のとある微分 1 形式.

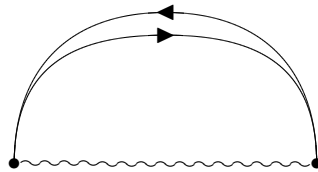
Taub-NUT 空間が ALF であることは、

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} g_{TN} = dy_{\mathbb{R}^3}^2 + (d\psi + \omega)^2$$

と、 ψ は S^1 の座標であることからわかる.

ALE 空間と同様に ALF 空間を超ケーラー商で構成したい. しかし、ALF 空間の一般論は知られておらず、ADE 型で分類できる保証もない. そもそも、 $S^1 \times \mathbb{R}^3$ や Taub-NUT 空間の計量を保つ $SU(2)$ の作用が存在するかも知られていない. 一方、Taub-NUT 空間については次のことが知られている.

定理 4.4 (Cherkis[C]). Taub-NUT 空間は超ケーラー商で構成できて、次の図式に対応させることができる.



この図式の意味は次のとおり.

- “•” を 1 次元ベクトル空間とする
- 二つの \rightarrow は線形写像を表し、それらを $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ とする.
- \sim は $[0, 1]$ 区間上の $u(1)$ 値関数の組を表し、それを $(t_0, t_1, t_2, t_3) \in \Gamma([0, 1], i\mathbb{R})^{\oplus 4}$ とする.
- 群 $\mathcal{G} = \Gamma([0, 1], U(1))$ を作用させる.

これらの情報から例 2.2, 2.8 のように超ケーラー商を考えると Taub-NUT 空間が得られる, というのが上の定理の主張. $\mathcal{G} \cong U(1) \times \mathcal{G}_{00} \times U(1)$ なので, 区間の内部では例 2.8 と同様に運動量写像は Nahm 方程式になる. ただし, 今回は 1 次元なので Nahm 方程式の解 (t_0, t_k) は定数のもの. 区間の両端の $U(1)$ に対応する運動量写像は

$$\begin{aligned}\mu_I &= t_1 - i(|a|^2 - |b|^2) \\ \mu_J + i\mu_K &= t_2 + it_3 - 2ab\end{aligned}$$

となる. これにより超ケーラー商の計量を計算すると, 実際に Taub-NUT 空間を得る.

写像 $(t_0, t_k, a, b) \mapsto (a, b)$ を考えると, これは Taub-NUT 空間から \mathbb{C}^2 の微分同相写像を誘導することがわかる (計量は保たない). この写像により, \mathbb{C}^2 への $SU(2)$ の作用から Taub-NUT への $SU(2)$ の作用が得られる. ただし, E 型の作用は Taub-NUT 計量を保たない.

A, D 型の Γ の作用はあるので, 定理 3.4 と同じことができるかを考える. 今のところ次の結果を得ている.

定理 4.5 (T). 定理 4.4 の図式において \bullet を n 次元ベクトル空間にした超ケーラー商を考えると, Taub-NUT 空間の対称積 $S_n(\text{Taub-NUT})$ を得る.

更に, $S_n(\text{Taub-NUT})$ には A, D 型の $SU(2)$ の有限部分群 Γ の作用があり, $n = \#\Gamma$ として固定点を取ると, Taub-NUT/ Γ を得る. 特にこれは ALF 空間.

証明の概略. 一つ目に関しては命題 2.3 と同様にして示す. ただし, 証明で使った関数 $p_{(A,B)}(g)$ は

$$p_{(T_0, T_k, A, B)}(g) = \|g \cdot (A, B)\|^2 + \int_0^1 \|g \cdot (T_0, T_k)\|^2 ds$$

に変える. 二つ目は定理 3.4 の後の説明のとおり. ALF であることは, Taub-NUT 計量が Γ の作用で保たれることから従う. \square

今後の課題としては, 定理 3.4 の証明の手順にある, 1,3,4 に相当することを行うことである. 1 については見当がついているが, 3 に相当する議論をそのまま行うには困難がある. それは, Nahm 方程式には斉次性がないことに由来する.

また, 定理 4.4 にあるような, 矢印と波線を組み合わせた図式から超ケーラー商により得られる多様体を弓箭多様体と呼ぶ. ALF 空間が弓箭多様体として得られるか, 既知の多様体で弓箭多様体として構成できるものはあるか, 一般に弓箭多様体はどのような性質を持つか, など, これから明らかにすべきことは多い.

参考文献

- [C] S. Cherkis, *Instantons on the Taub-NUT Space*, Adv. Theor. Math. Phys. 14(2010), 609-641.
- [HKLR] N. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Rocek, *Hyper-kähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys. 108(1987), 535-589.
- [Kr1] P. Kronheimer, *A hyper-kähler structure on the cotangent bundle of a complex Lie group*, arXiv:math/0409253v1.
- [Kr2] P. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients*, J. Diff. Geom. 29(1989), 665-683.
- [MFK] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1994.
- [Na1] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 76-2(1994), 365-416.
- [Na2] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, American Mathematical Society, 1999.