parabolic Cantor set の Hasudorff 次元

下村健吾*

大阪大学情報科学研究科情報基礎数学専攻

1 はじめに

反復関数系はコンパクト距離空間上の単射縮小変換族からなる．これらの変換で写像半群を考え，その極限集合を考える．極限集合が全不連結のとき，それを Cantor set という．一次分数変換で生成される Cantor set を考える．特に生成元の一次分数変換が parabolic の場合に生成される Cantor set を parabolic Cantor set と呼ぶことにする．本文は parabolic Cantor set の複雑さの指標である Hasudorff 次元の評価について記す．

2 反復関数系

反復関数系の一般概念とその極限集合について説明する．

2.1 反復関数系と極限集合

定義 2.1.
(X,d) : コンパクトな距離空間とし，Σ を少なくとも 2 つ以上の元をもつ有限集合とする．X 上の単射縮小変換の集合族 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ を**反復関数系**という．

$H(X)$ を X の空でないコンパクト部分集合からなる集合とし，$H(X)$ 上の写像 $F : H(X) \to H(X)$ を以下で定義する．

$$F(B) := \bigcup_{i \in \Sigma} f_i(B) \qquad\qquad (\forall B \in H(X))$$

これは $(H(X), h_d)$ で縮小変換となり（h_d は Hausdorff 距離），縮小写像定理から $F(A_S) = A_S$ を満たす $A_S \in H(X)$ がただ 1 つ存在する．この A_S を反復関数系 S の**極限集合**という．

反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ を変換族による極限集合の像 $\{f_i(A_S) | i \in \Sigma\}$ の連結状態で以下の 3 つに分類する．

- totally disconnected
  任意の異なる $i, j \in \Sigma$ に対して，$f_i(A_S) \cap f_j(A_S) = \phi$ が成り立つ．
- overlapping
  A_S の内包 $\mathrm{int}(A_S)$ で $f_i(\mathrm{int}(A_S)) \cap f_j(\mathrm{int}(A_S)) \neq \phi$ となるような $i, j \in \Sigma$ が存在する．
- just touching
  A_S の内包 $\mathrm{int}(A_S)$ で totally disconnected となる．

*k-shimomura@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2.2 コードマップと極限集合の例

定義 2.2. Σ^∞ を Σ の無限直積とし，$\pi : \Sigma^\infty \to X$ を次で定義する．

$$\pi(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ \cdots \circ f_{\omega_n}(X) \qquad (\forall \omega = \omega_1\omega_2\omega_3\cdots \in \Sigma^\infty)$$

π は Σ^∞ 上連続となり，$\pi(\Sigma^\infty) = A_S$ となる．この $\pi : \Sigma^\infty \to X$ を反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ のコードマップという．

$\Rightarrow A_S$ の任意の元は長さ無限のコードで表せる．

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_i & \\ \Sigma^\infty & \longrightarrow & \Sigma^\infty \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ A_S & \longrightarrow & A_S \\ & f_i & \end{array}$$

(σ_i はシフト写像 $\sigma_i(\omega) := i\omega$)

極限集合はフラクタル集合となる場合が多い．

例 1.　シェルピンスキーガスケット　$\{f_1, f_2, f_3\}$

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x \\ 0.5y \end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x + 1.0 \\ 0.5y \end{pmatrix}, f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x + 0.5 \\ 0.5y + 1.0 \end{pmatrix}$$

例 2. シダの葉　$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.16y \end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2x - 0.26y \\ 0.23x + 0.22y + 1.6 \end{pmatrix}$$

$$f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15x + 0.28y \\ 0.26x + 0.24y + 0.44 \end{pmatrix}, f_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85x + 0.04y \\ -0.04x + 0.85y + 1.6 \end{pmatrix}$$

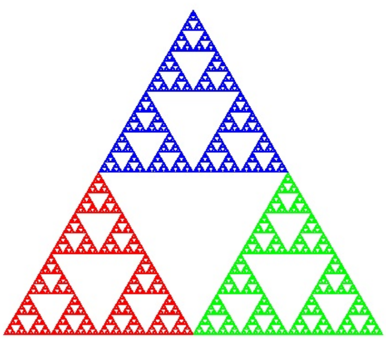


図 1: シェルピンスキーガスケット

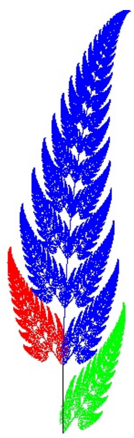


図 2: シダの葉

3　極限集合の次元

Hausdorff 次元の定義とその評価方法について述べる．

3.1 Hausdorff 次元

定義 3.1.
A を集合とし，$s \geq 0, \delta > 0$ とする．$\mathcal{H}^s_\delta(A)$ を次で定義する．

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\{\sum_{i=1} \mathrm{diam}^s(A_i) | \bigcup_{i=1} A_i \text{ は } A \text{ の } \delta \text{ 被覆 }\}$$

A の **s 次元 Hausdorff 測度** $\mathcal{H}^s(A)$ を定義する．

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

A の **Hausdorff 次元**を $\mathcal{H}^s(A)$ をつかって定義する．

$$\dim_H A := \sup\{s \geq 0 | \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \inf\{s \geq 0 | \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ の極限集合の A_S に対しては次が成り立つ．

命題 3.2.
反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ の極限集合 A_S に対して，

$$\dim_H A_S = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s_\infty(A_S) = 0\}.$$

Hausdorff 次元の性質として，以下のことが知られている．

命題 3.3.
Hausdorff 次元に対して以下が成り立つ．

- $A \subset B$ ならば $\dim_H A \leq \dim_H B$.
- $\dim_H(A \cup B) = \max\{\dim_H A, \dim_H B\}$.
- $\dim_H(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sup_{1 \leq i} \dim_H A_i$.
- f が双 Lipschitz 変換ならば $\dim_H f(A) = \dim_H A$.
- A が有限または可算集合ならば，$\dim_H A = 0$.

一般に Hausdorff 次元の上からの評価については Hausdorff 次元の定義より，適当な被覆をとってくればいいので上からの評価は容易にする事ができる．一方で下からの評価を得るには全ての δ 被覆 $\{A_i\}$ に対し，$\displaystyle\sum_{i=1} \mathrm{diam}^s(A_i)$ がある値より大きくなる事を示さなければならないので困難である．下からの評価については次の定理を使う．

定理 3.4. **（質量分布原理）**
μ を A 上の質量分布とする．つまり μ の台が A 上にあるような測度である．ある s に対して $c > 0$ および $\epsilon > 0$ が存在して，

$$\mu(U) \leq c\, \mathrm{diam}(U)^s,$$

がすべての $\mathrm{diam}(U) < \epsilon$ となる U に対して成り立つとする．このとき $\mathcal{H}^s(A) \geq \mu(F)/c$ であり，

$$s \leq \dim_H A,$$

が成り立つ．

この定理を使うと，totally disconnected な反復関数系の極限集合，Cantor set に対して，次の定理が成り立つ．

定理 3.5.
totally disconnected な反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ の極限集合 A_S に対して，各変換の上 Lipschitz 定数と下 Lipshitz 定数を $0 < \underline{L}(f_i) \leq \overline{L}(f_i) < 1$ とする．このとき，

$$\sum_{i\in\Sigma} \underline{L}(f_i)^r = 1, \qquad \sum_{i\in\Sigma} \overline{L}(f_i)^s = 1,$$

をみたす r, s をつかって，以下が成り立つ．

$$r \leq \dim_H A_S \leq s,$$

証明. 上の不等式は Hausdorff 測度と $F(A_S) = A_S$ より明らか．$d > 0$ を，

$$d = \min_{i\neq j} \inf\{d(x, y) : x \in f_i(A_S), y \in f_j(A_S)\},$$

とする．$A_{i_1\ldots i_k} := f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_k}(A_S)$ とし，μ を $\mu(A_{i_1\ldots i_k}) := (\underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_k}))^r$ で定義する．すると，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \mu(A_{i_1\ldots i_k i}) = \sum_{i=1}^{m} (\underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_k})\underline{L}(f_i))^r &= (\underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_k}))^r \\ &= \mu(A_{i_1\ldots i_k}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_{i_1\ldots i_k i}\right),\end{aligned}$$

であるから，μ は $\mu(A_S) = 1$ を満たす，A_S 上の質量分布である．$x \in A_S$ のとき，全ての k に対して，$x \in A_{i_1\ldots i_k}$ となるような無限列 $i_1, i_2, \ldots$ が一意に存在する．$0 < t < d$ に対して k を

$$\underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_k})d \leq t < \underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_{k-1}})d,$$

を満たす最小の整数とする．$i'_1, \ldots, i'_k$ が $i_1, \ldots, i_k$ と異なるとき，集合 $A_{i'_1\ldots i'_k}$ と $A_{i_1\ldots i_k}$ は互いに素であり，少なくとも $\underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_{k-1}})d > t$ だけ離れている．これより $A_S \cap B(x, t) \subset A_{i_1\ldots i_k}$ となるから，(ただし，$B(x, t)$ は中心 x，半径 t の開球.)

$$\mu(A_S \cap B(x, t)) \leq \mu(A_{i_1\ldots i_k}) = (\underline{L}(f_{i_1}) \cdots \underline{L}(f_{i_k}))^r \leq d^{-r}t^r,$$

が成り立つ．U が A_S と交わりをもつならば，$t = \mathrm{diam}(U)$ とおくと，ある $x \in A_S$ に対して，$U \subset B(x, t)$ となる．よって，$\mu(U) \leq d^{-r}\mathrm{diam}(U)^r$ であり，質量分布原理より $\dim_H A_S \geq r$ を得る． □

4 一次分数変換による Cantor 集合

一次分数変換 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を行列の形で定義する．

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (\forall x \in \mathbf{R})$$

を次の行列で表す．

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1)$$

一次分数変換は次の 3 つに分類される．

1. loxodromic
   不動点を 2 つ持ち，1 つが反発不動点，もう 1 つが吸引不動点．
   $\Leftrightarrow (a + d)^2 > 4$

2. elliptic
   不動点を２つ持ち，ともに反発不動点でもなければ吸引不動点でもない．
   $\Leftrightarrow (a+d)^2 < 4$

3. parabolic
   不動点を１つしか持たず，それが反発でも吸引でもない．
   $\Leftrightarrow (a+d)^2 = 4$

ここでいう「反発」とは不動点近傍の点の軌道 $\{f^n(x)\}$ を考えたときに不動点から遠ざかることを意味する．「吸引」は不動点近傍の点の軌道が不動点に近づいていくことを意味する．

$X = [0,1]$ とし，$\Sigma = \{0,1\}$ とする．X 上で一次分数変換からなる反復関数系 $S := \{f_i : X \to X | i \in \Sigma\}$ を考える．古典 Cantor 集合を反復関数系で考えると，

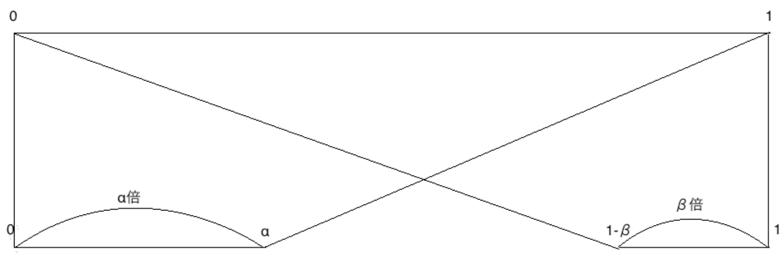
$$f_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

図 3: 古典 Cantor 集合 $\{f_0, f_1\}$

このとき f_0, f_1 ともに相似変換でその相似比はともに $\frac{1}{3}$．f_0, f_1 をそれぞれ $f_i(X) = f_{ip}(X)$ を満たすような parabolic な一次分数変換 f_{0p}, f_{1p} と入れ替える．このときの反復関数系でできる極限集合の Hausdorff 次元について考える．$0 < \alpha < 1$ と $0 < \beta < 1$ を $\alpha + \beta < 1$ を満たすようにとり，f_{0h}, f_{1h} を 0 と 1 を不動点とする，α 倍の相似変換と β 倍の相似変換とし，f_{0p}, f_{1p} を 0 と 1 を不動点とし，$f_{ih}(X) = f_{ip}(X)$ を満たすような parabolic な一次分数変換とする．

$$f_{0h} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, f_{0p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \qquad (s = \frac{1}{\alpha} - 1, t = \sqrt{\alpha})$$

$$f_{1h} = \begin{pmatrix} v & v^{-1} - v \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}, f_{1p} = \begin{pmatrix} 1-u & u \\ -u & 1+u \end{pmatrix} \qquad (u = \frac{1}{\beta} - 1, v = \sqrt{\beta})$$



反復関数系 $\{f_{0h}, f_{1p}\}$，$\{f_{0p}, f_{1h}\}$，$\{f_{0p}, f_{1p}\}$ の極限集合としてできる Cantor 集合の Hausdorff 次元について考察する．片方のみ置き換えた Cantor 集合を $SPC(\alpha, \beta)$，両方置き換えた Cantor 集合を $DPC(\alpha, \beta)$ とする．

5 Cantor 集合の Hausdorff 次元

$\{f_{0h}, f_{1h}\}$ の極限集合である Cantor 集合 $C(\alpha, \beta)$
⇒parabolic な一次分数変換を含む反復関数系の極限集合の Hausdorff 次元は？相似変換に置き直した場合の極限集合の Hausdorff 次元より大きくなるのか小さくなるのか？

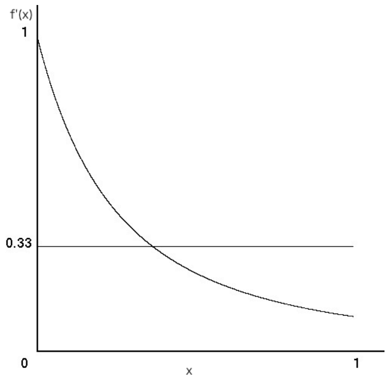


図 4: f_{0h} と f_{0p} の導関数

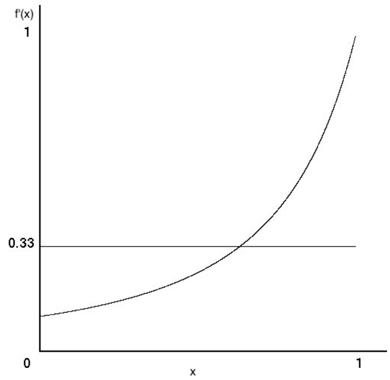


図 5: f_{1h} と f_{1p} の導関数

図 6: 上から $\{f_{0h}, f_{1h}\}, \{f_{0p}, f_{1h}\}, \{f_{0h}, f_{1p}\}, \{f_{0p}, f_{1p}\}$ の極限集合

$W_n^0, W_n^1 \in \Sigma^{n+1}$ を次のように定義する．$(n = 1, 2, \dots)$

$$W_n^0 = \underbrace{0 \dots 0}_{n} 1 \qquad W_n^1 = \underbrace{1 \dots 1}_{n} 0$$

任意の $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \dots \in \Sigma^*(\Sigma^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n)$ に対して f_ω を次のように定義.

$$f_\omega = f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ f_{\omega_3} \cdots$$

5.1 $SPC(\alpha, \beta)$ の場合

定理 5.1. (lower bound)
$\{f_{0p}, f_{1h}\}$ でできる parabolic な Cantor 集合 $SPC(\alpha, \beta))$ に対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(nsv^{-1} + v^{-1})^{2d}} > 1$$

を満たす $d > 0$ に対して $\dim_H SPC(\alpha, \beta) \geq d$ が成り立つ.

証明. $n \geq 2$ を自然数とする.$\{f_{W_0^0}, \dots, f_{W_k^0}, f_{0p}^{k+1}\}$ を考えるとこの極限集合は $SPC(\alpha, \beta)$ と一致する. なぜならコード空間のコードマップによる像が極限集合であることから，コード空間の生成元を変えてもその極限集合は変わらないからである. この反復関数系に定理 3.5 を適用させると,

$$\sum_{n=0}^{k} \underline{L}(f_{W_n^1})^d + \underline{L}(f_{0p}^{k+1})^d = 1,$$

を満たす $d > 0$ に対して，$\dim_H A \geq d$ が成り立つ．$k \to \infty$ とすると，$\underline{L}(f_{0p}^{k+1})^d \to 0$ より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underline{L}(f_{W_n^0})^d = 1,$$

を満たす $d > 0$ に対して $\dim_H A \geq d$ が成り立つ．$n \in \mathbf{N}$ を任意に取り，f_0 の n 回合成を考えると,

$$f_{0p}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ns & 1 \end{pmatrix}.$$

なので,

$$f_{W_n^0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} v & v^{-1} - v \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & v^{-1} - v \\ nsv & ns(v^{-1} - v) + v^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$f'_{W_n^0}(z) = \frac{1}{(nsvz + ns(v^{-1} - v) + v^{-1})^2},$$

となるので

$$\underline{L}(f_{W_n^0}) = \frac{1}{(nsv^{-1} + v^{-1})^2},$$

となり，定理が証明される. □

定理 5.2. (upper bound)
$\{f_{0p}, f_1\}$ でできる parabolic な Cantor 集合 $SPC(\alpha, \beta))$ に対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ns(v^{-1} - v) + v^{-1})^{2d}} < 1$$

を満たす $d > 0$ に対して $\dim_H SPC(\alpha, \beta) \leq d$ が成り立つ.

証明. $k \in \mathbf{N}$ を任意にとる．少なくとも 1 を k 個含むような無限コード全体の集合は次のように表せる.

$$W_{n_1}^0 \dots W_{n_k}^0 \Sigma^\infty, \qquad (n_1, \dots, n_k = 0, 1, 2, \dots).$$

コード空間 Σ^∞ は,

$$\Sigma^\infty = \Big(\bigcup_{n_1=0}^{\infty} \cdots \bigcup_{n_k=0}^{\infty} W_{n_1}^0 \cdots W_{n_k}^0 \Sigma^\infty \Big) \cup B,$$

となる．ただし B は,

$$B := \bigcup_{l=0}^{k-1} \{W_{n_1}^0 \dots W_{n_l}^0 000 \dots \mid n_1, \dots, n_l = 0, 1, 2, \dots\}.$$

となり可算集合である．よって $SPC(\alpha, \beta)$ の被覆として,

$$SPC(\alpha, \beta) \subset \Big(\bigcup_{n_1=0}^{\infty} \cdots \bigcup_{n_k=0}^{\infty} f_{W_{n_1}^0} \circ \cdots \circ f_{W_{n_k}^0}([0, 1]) \Big) \cup \pi(B),$$

となり，$\mathcal{H}^d_\infty(SPC(\alpha,\beta))$ の上からの評価として，命題 3.2 から $\mathcal{H}^d_\infty(\pi(B))=0$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^d_\infty(SPC(\alpha,\beta)) \le \quad & \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\left(\mathrm{diam}(f_{W^0_{n_1}}\circ\cdots\circ f_{W^0_{n_k}}([0,1]))\right)^d \\ &\le \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\left(\overline{L}(f_{W^0_{n_1}})\cdots\overline{L}(f_{n_{W^0_k}})\right)^d \\ &= \Big(\sum_{n_1=0}^{\infty}\overline{L}(f_{W^0_{n_1}})^d\Big)\cdots\Big(\sum_{n_k=0}^{\infty}\overline{L}(f_{W^0_{n_k}})^d\Big) \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{L}(f_{W^0_n})^d\Big)^k,\end{aligned}$$

となる．この値が 0 になる条件として，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{L}(f_{W^0_n})^d<1,$$

である． 1 次分数変換なので合成は行列の積で計算され，

$$f_{W^0_n}=\begin{pmatrix}1&0\\s&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}v&v^{-1}-v\\0&v^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v&v^{-1}-v\\nsv&ns(v^{-1}-v)+v^{-1}\end{pmatrix},$$

となるので，

$$\overline{L}(f_{W_n})=\frac{1}{(ns(v^{-1}-v)+v^{-1})^2}.$$

以上より定理は示される． □

5.2 $DPC(\alpha,\beta)$ の場合

$DPC(\alpha,\beta)$ の場合も $SPC(\alpha,\beta)$ の場合と同様の方法で評価できるが，Lipschitz 定数が n によって変わることに注意する．

定理 5.3. （lowerbound）
$\{f_{0p},f_{1p}\}$ でできる parabolic な Cantor 集合 $DPC(\alpha,\beta)$ に対し，

1. $\alpha\le\frac{1}{2}$ かつ $\beta\le\frac{1}{2}$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nsu+u+1)^{2d}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nu+s+1)^{2d}}>1$$

2. $\alpha>\frac{1}{2}$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nsu+u+1)^{2d}}+\sum_{n=1}^{N_1-1}\frac{1}{(nsu+s+1)^{2d}}+\sum_{n=N_1}^{\infty}\frac{1}{(nu+1)^{2d}}>1$$

3. $\beta>\frac{1}{2}$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nsu+s+1)^{2d}}+\sum_{n=1}^{N_2-1}\frac{1}{(nsu+u+1)^{2d}}+\sum_{n=N_2}^{\infty}\frac{1}{(ns+1)^{2d}}>1$$

を満たすような $d>0$ に対して，$\dim_H DPC(\alpha,\beta)\ge d$ が成り立つ．ただし N_1 は $n>\frac{s}{u(1-s)}$ を満たす最小の自然数 n とし，N_2 は $n>\frac{u}{s(1-u)}$ を満たす最小の自然数 n とする．

定理 5.4. （upper bound）
$\{f_{0p}, f_{1p}\}$ でできる parabolic な Cantor 集合 $DPC(\alpha,\beta)$ に対し，

1. $\alpha \le \frac{1}{2}$ かつ $\beta \le \frac{1}{2}$ のとき
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ns+1)^{2d}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nu+1)^{2d}}<1$$

2. $\alpha > \frac{1}{2}$ のとき
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ns+1)^{2d}}+\sum_{n=1}^{N_1-1}\frac{1}{(nu+1)^{2d}}+\sum_{n=N_1}^{\infty}\frac{1}{(nsu+s+1)^{2d}}<1$$

3. $\beta > \frac{1}{2}$ のとき
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nu+1)^{2d}}+\sum_{n=1}^{N_2-1}\frac{1}{(nsu+u+1)^{2d}}+\sum_{n=N_2}^{\infty}\frac{1}{(ns+1)^{2d}}<1$$

を満たすような $d>0$ に対して，$\dim_H DPC(\alpha,\beta) \le d$ が成り立つ. ただし N_1 は $n > \frac{s}{u(1-s)}$ を満たす最小の自然数 n とし，N_2 は $n > \frac{u}{s(1-u)}$ を満たす最小の自然数 n とする.

例. $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$ のとき，
$$\left(\frac{1}{3}\right)^d+\left(\frac{1}{3}\right)^d=1$$
を満たす $d=\frac{\log 2}{\log 3}\approx 0.6309$ が $C(1/3,1/3)$ の Hausdorff 次元となる.

$$0.6747 \le \dim_H(SPC(1/3,1/3)) \le 0.7342$$
$$0.6507 \le \dim_H(DPC(1/3,1/3)) \le 0.8129$$

となり，いずれも相似変換からなる Cantor 集合の Hausdorff 次元より大きくなる.

系 5.5.
parabolic な一次分数変換を含む Cantor 集合の Hausdorff 次元は $\frac{1}{2}$ より大きい.

参考文献

[1] M.Barnsley, Fractals Everywhere, Morgan Kaufmann, 1993.

[2] D.Mauldin and M.Urbanski, Graph directed Markov systems: Geometry and Dynamics of limit sets, Cambridge Tracts in Mathmatics 148, 2003.

[3] J.E.Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. 30 713-747 1981.

[4] K.J.Falconer, Fractal Geometry:Mathematical Foundations and Applications, 2nd ed., Wiley, 2003.