Casson 不変量の topological な構成について

清水達郎[*]

東京大学数理科学研究科博士 2 年、2012 年 6 月 30 日

1 背景

1.1 ホモロジー 3 球面

ホモロジー球面とは，ホモロジーでは球面と区別がつかないコンパクト多様体である．

定義 1.1 (ホモロジー 3 球面)**.** 向き付けられたコンパクト 3 次元多様体 M が整 *(resp.* 有理*)* ホモロジー *3* 球面であるとは，任意の整数 i に対し以下の条件を満たすときをいう．

$$H_i(M;\mathbb{Z}(resp.\mathbb{Q})) \cong H_i(S^3;\mathbb{Z}(resp.\mathbb{Q})).$$

以降，整ホモロジー 3 球面は単にホモロジー球面という．
ホモロジー 3 球面は，沢山ある．

例 1.2 (ホモロジー 3 球面の例)**.**

- $I \subset SO(3)$ を正 12 面体群，$\tilde{I} \subset Spin(3) \cong S^3$ をその 2 重被覆とする．$\tilde{I}$ は完全群 (i.e. 可換化が 0) であることが知られている．よって $S^3/\tilde{I}$ はホモロジー 3 球面である．$S^3/\tilde{I}$ は Poincaré3 球面と呼ばれる．
- k を S^3 内の任意の結び目とする．k に沿った ± 1-Dehn 手術によって得られる 3 次元多様体はホモロジー 3 球面である．また，k に沿った 0 手術を除く Dehn 手術によって得られる 3 次元多様体は有理ホモロジー 3 球面である．

1.2 Rokhlin 不変量

整ホモロジー 3 球面の不変量として，Rokhlin 不変量が古くから知られている．Rokhlin 不変量 μ は $\mathbb{Z}/2$-値不変量である．任意の整ホモロジー 3 球面 M はただ 1 つスピン構造[1]をもつことが知られている．一般に 4 次元多様体の符号数，及びスピン構造に対して以下が知られている．向き付けられた 4 次元多様体 W に対し $Sign(W)$ を W の符号数とする．

命題 1.3. W_1, W_2, W を 4 次元多様体，$-W$ を W の向きを逆にした 4 次元多様体とする．

- 符号数は位相不変量である．すなわち $W \simeq W'$(同相) ならば $SignW = SignW'$.
- (Novikov 加法性)$Sign(W_1 \cup W_2) = Sign(W_1) + Sign(W_2)$.
- $Sign(-W) = -Sign(W)$.

[*]shimizu@ms.u-tokyo.ac.jp

[1]TM に同伴する $Spin(3)$ 主束をスピン構造という．

- 任意の閉スピン 3 次元多様体 M に対し，$\partial W = M$ となるスピン 4 次元多様体が存在する．
- W を任意のスピン 4 次元多様体とする．このとき，$8|Sign(W)$.
- (Rokhlin) W を任意の**閉**スピン 4 次元多様体とする．このとき，$16|Sign(W)$.

定義 1.4 (Rokhlin 不変量)**.** ホモロジー球面 M に対し，許容する唯一のスピン構造をこめて M を境界にもつ 4 次元スピン多様体を一つとり W とする．このとき，

$$\mu(M) := Sing(W)/8 \in \mathbb{Z}/2$$

を M の Rokhlin 不変量という．

先述の命題から，Rokhlin 不変量が矛盾なく定義されていることがわかる．特に重要なのは Rokhlin による,「W を任意の閉スピン 4 次元多様体とする．このとき，$16|Sign(W)$」である．また，定義から次の性質が直ちに従う．

命題 1.5.
- $M \simeq M'$(同相) ならば $\mu(M) = \mu(M')$.
- $\mu(-M) = -\mu(M) = \mu(M)$.

次の問かけは自然である．

もし $M \simeq -M$ ならば $\mu(M) = 0$ か？

この問の答えは「Ｙｅｓ」であることが知られている．しかし Rokhlin 不変量は $\mathbb{Z}/2$ 不変量であるため，上の性質から直ちにこれを示すことはできない．Rokhlin 不変量の $\mathbb{Z}$-持ち上げ μ'（すなわち $\mathbb{Z}$-値不変量であって，射影 $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ との合成 $p \circ \mu'$ が μ と一致するもの）が見つかり，$\mu'(-M) = -\mu'(M)$ であれば，上の問いかけに肯定的に答えることができる．この持ち上げの 1 つに Casson 不変量と呼ばれる不変量がある．

1.3 Casson 不変量

Casson 不変量 λ は，1985 年に Casson により定義されたホモロジー球面の整数値不変量である．以下のような性質を持つ．

- $\lambda(-M) = -\lambda(M)$.
- $\lambda(M)/8 \equiv \mu(M) \pmod{2}$.

Casson 不変量は基本群の $SU(2)$ 表現を用いて定義される．定義から直接 Rokhlin 不変量の持ち上げであることを確かめることは難しい[2]．現在ではホモロジー球面の不変量は沢山知られており，それらを用いることで Casson 不変量のトポロジカルな解釈が得られている．すると Casson 不変量が Rokhlin 不変量の持ち上げであることが直接確かめられる．このように Casson 不変量にトポロジカルな理解を与える不変量として，Moriyama 不変量を紹介する．

2 Moriyama 不変量

まず，Rokhlin 不変量と Moriyama 不変量の定義を比較した表を示す．なお，この節でもちいる「e 構造」は Rokhlin 不変量との対応をわかりやすくするために用いるここだけの言葉である．Moriayama [5][6] では $e-$manifold として定義されている．

[2]手術公式を比較することにより確かめられる．

	Rokhlin 不変量	Moriyama 不変量
	{ ホモロジー 3 球面 }/ $\simeq \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2$	{ ホモロジー 3 球面 }/ $\simeq \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}$
付加的構造	スピン構造	基点 & e 構造
コボルディズム	ホモロジー球面 M から自然に定まる 3 次元スピン多様体はある 4 次元スピン多様体の境界となっている．	ホモロジー球面 M から自然に定まる 3 次元 e 多様体はある 4 次元 e 多様体の境界となっている．
構造が符号数に与える制約	W; 境界のない 4 次元スピン多様体 $\Rightarrow Sign(W) \equiv 0$ (mod16)	W; 境界のない 4 次元 e 多様体 $\Rightarrow Sign(W) = 0$

定義 2.1 (e 構造)**.** n 次元多様体 M の e 構造とは，以下を満たす組 (W, M, e) のこと．

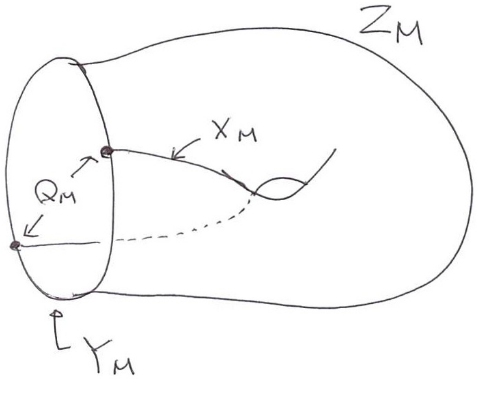
- W は $n+3$ 次元多様体.
- M は W に固有に[3]埋め込まれている．
- $e \in H^2(W \setminus N(M); \mathbb{Q})$ は条件 $e|_{\partial \overline{N(M)}} = e(F_M)$ を満たすコホモロジー類．ここで $N(M)$ は M の開管状近傍であり，F_M は球面束 $\partial \overline{N(M)} \to M$ のファイバー方向の接束である．また，e は ($\mathbb{Q}$ 係数)Euler 類である．

e 構造を与えた多様体を e 多様体という．

M を基点 $\infty \in M$ つきホモロジー球面[4]とする．(M, ∞) から canonical に 3 次元 e 多様体 (Y_M, Q_M, e_M) が得られる．詳細はここでは述べないが，気持ちとしては $Y_M = M \times M, Q_M = \Delta$(対角線) を考える[5]．このとき，コボルディズムに関する以下の定理が成り立つ．

定理 2.2. ([5][6]) M を任意のホモロジー球面，(Y_M, Q_M, e_M) を先述の通りとする．このとき 4 次元 e 多様体 (Z_M, X_M, E_M) が存在し，以下の条件を満たす．

- $\partial Z_M = Y_M$.
- $\partial X_M = Q_M$.
- $E_M|_{Y_M \setminus N(Q_M)} = e_M$.



また，符号数に関する以下の定理が成り立つ．

定理 2.3 ([5])**.** (Z, X, E) を $\partial Z = \emptyset, \partial X = \emptyset$ を満たす任意の 4 次元 e 多様体とする．このとき，$SignX = 0$.

[3] proper に
[4] 基点は任意でよい．以下の議論はすべて基点の選択に依存しない．
[5] 厳密な構成は，Moriyama [6] のセクション 3，"Construction of α_M"を参照．

定義 2.4 ([5][6]). $\sigma(M) := SignX_M \in \mathbb{Z}$ を M の Moriyama 不変量という.

定理 2.5. M がホモロジー 3 球面のとき, $\sigma(M)/8 = \lambda(M)$.

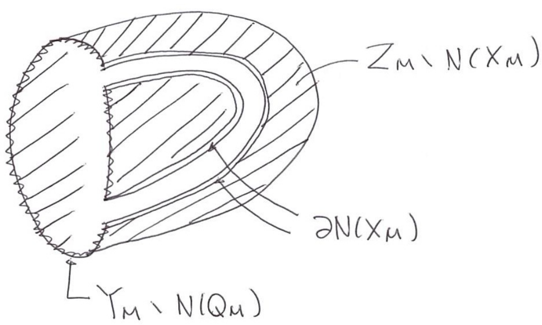
X_M としては 4 次元スピン多様体が取れることが知られている. また, Q_M から M が復元でき, したがって $\sigma(M)/8 = \lambda(M)$ が Rokhlin 不変量 $\mu(M)$ の $\mathbb{Z}-$ 持ち上げであることがわかる.

注意 2.6.
- Moriyama 不変量は任意の 3 次元 e 多様体に対して定義される有理数値不変量であり, 3 次元球面の 6 次元球面への埋め込みに関する Haefliger 不変量 [1] や Milnor による 3 重絡み数 (triple linking number) を統一的に捉える拡張になっている.
- 本文で述べた Moriyama 不変量は有理ホモロジー 3 球面に対して定義され, Casson-Walker 不変量 [8] と定数倍を除いて一致する.

3 Moriyama 不変量の背景

Moriyama 不変量の背景には, M. Kontsevich [2], G. Kuperberg, D. Thurston [3] らによる不変量 Z がある. Z は有理ホモロジー球面の次数つき代数 $A(\emptyset)$ に値をとる位相不変量であり, 有限型という性質を持つ不変量である[6]. Casson 不変量や Moriyama 不変量は有限型不変量である. 整ホモロジー球面の任意の $\mathbb{C}$-値有限型不変量 c に対して, 線形写像 $w : A(\emptyset) \to \mathbb{C}$ が存在し, $c = w \circ Z$ となることが知られている. この意味で Z は普遍的である.

Moriyama 不変量 $\sigma(M)$ は 4 次元多様体の符号数を用いた不変量であった. 4 次元多様体の符号数は, 特性類の積分で書かれる. これと前章で構成した $Z_M \setminus N(X_M)$ の境界が $Y_M \setminus Q_M$ と X_M 上の球面束からなること (下図参照), さらに $Y_M \setminus Q_M$ がだいたい $M \times M \setminus \Delta$ と似たものであることを思い出すと, Moriyama 不変量 $\sigma(M)$ が 2 点配置空間 $(M \times M) \setminus \Delta = \{(x, y)|x, y \in M, x \neq y\}$ 上のある 6 次閉微分形式の積分であらわされることがわかる. 一般に, $2n$ 点配置空間 $M^n \setminus \Delta(\Delta =$ "すべての対角線 ") 上である (グラフから指定される)6n 次閉微分形式を積分することである実数が得られる. これらの情報を集めたのが Z の n 次部分の大まかな定義である[7].



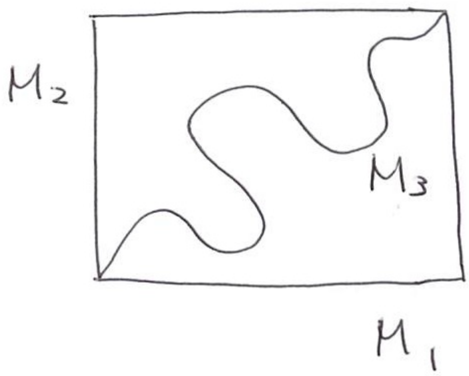
4 Moriyama 不変量の 1 つの応用

ここでは, Moriyama 不変量の 1 つの応用として, 有理ホモロジー 3 球面の間の correspodence に対する不変量を与える.

定義 4.1. 有理ホモロジー 3 球面 M_1, M_2 の間の correspondence とは, $M_1 \times M_2$ の部分集合のこと.

[6]有限型不変量についてはたとえば Ohtsuki [7] を参照. 手術に関する振る舞いによって記述される.
[7]詳細は C. Lescop[3].

通常 correspondence としてはある程度 ”よい条件 ”を満たすものを扱う．そのような correspondence を admissible correspondence と呼ぶことにする[8]．



$C=(M_1,M_2,M_3)$ を admissible correspondence とすると，C から自然な方法で 3 次元 e 多様体 (Y_C,Q_C,e_C) が得られる．気持ちとしては $Y_C=M_1\times M_2$，$Q_C=M_3\subset M_1\times M_2$ と考えられる．

定義 4.2. $\sigma(C):=\sigma(Y_C,Q_C,e_C)$.

定義 4.3. $o(C):=\sigma(C)-\sigma(M_2)$.

これらの ”不変量 ”について以下が成り立つ．

定理 4.4. M_3 がある smooth な写像 $f:M_1\to M_2$ のグラフ $\Gamma_f:=\{(x,f(x))|x\in M_1\}\subset M_1\times M_2$ とアイソトピックであれば，$o(C)=0$ が成り立つ．

すなわち，$o(C)$ は admissible correspondence がある写像のグラフとアイソトピックになるための 1 つの障害となっている．

最後にこの不変量の計算例を示す．以下の結果は具体的に手術公式を求めることによって計算される．

例 4.5.
- 任意の整数 n,p に対し，レンズ空間 $L(p,1)$ と S^3 の間の admissible correspondence M_3 であって，

$$\sigma(L(p,1),S^3,M_3)=n$$

を満たすものが具体的に構成できる．

- 任意の有理ホモロジー 3 球面 M_1,M_2 に対して M_1 と微分同相な admissible correspondence M_3 であって，

$$o(M_1,M_2,M_3)\neq 0$$

となるものが具体的に構成できる．[9]

参考文献

[1] A. Haefliger, *Knotted* $(4k-1)$*-spheres in* $6k$*-space*, Ann. of Math. (2) **75** , 452-466, 1962.

[8] 正確には次のようなものを考える．$(M_1,\infty_1),(M_2,\infty_2),(M_3,\infty_3)$ を基点つき有理ホモロジー 3 球面とする．組 (M_1,M_2,M_3) が admissible correspondence であるとは，M_3 が以下を満たす $M_1\times M_2$ の部分多様体であるときをいう．

- $\infty_3=(\infty_1,\infty_2)$ かつ $(p_i|_{M_3})^{-1}(\infty_i)=\{\infty_3\}$．ただし，$p_i:M_1\times M_2\to M_i (i=1,2)$ は射影である．
- $\infty_i\in M_i$ は $p_i|_{M_3}:M_3\to M_i$ の正則値である $(i=1,2)$.

[9] M_3 が $f:M_1\to M_2$ のグラフとアイソトピックならば M_3 と M_1 は微分同相である．

[2] M. Kontsevich,*Jacobi diagrams and low-dimensional topology*, First European Congress of Mathematics II 97-121, Birkhäuser Basel, 1994.

[3] G. Kuperberg, D. P. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology*, math.GT/9912167.

[4] C. Lescop, *On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres*, arXiv:math.GT/0411088.

[5] T. Moriyama, *An invariant of embeddings of* 3*-manifolds in* 6*-manifolds and Milnor 's triple linking number*, arXiv:0806.3733.

[6] T. Moriyama, *On the vanishing of the Rokhlin invariant*, arXiv:0807.2195.

[7] T. Ohtsuki, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, J. Knot Theory Ramifications 5 , no. 1, 101-115, 1996.

[8] K. Walker, An extension of Casson 's Invariant, Annals of Math. Studies **126**, Princeton University Press, 1992.