

# Planar グラフの Clique Complex のホモトピー型について

佐藤 敬志\*

京都大学大学院理学研究科数学教室 M2

## 概要

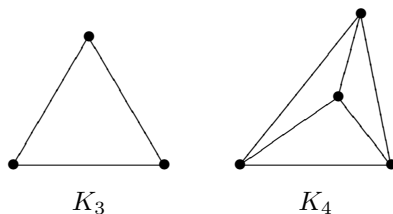
グラフ  $G$  に対し、clique complex  $\text{Cl}(G)$  という単体複体が定まる。特にグラフ  $G$  が  $\mathbb{R}^2$  に埋め込めるときに、 $\text{Cl}(G)$  のホモトピー型を求めた。

以上のことを第 9 回城崎新人セミナーで発表した。本稿はそれをまとめ、より正確な形にしたものである。

## 1 Introduction

ここで扱うグラフは有限かつ単純とする。つまり、頂点 (vertex) の数は有限で、2 つの頂点の間にある辺 (edge) は高々 1 つ。また、1 つの頂点から出てまた戻るといった辺 (loop) は存在しない。

定義 1.1. グラフ  $G$  の clique complex  $\text{Cl}(G)$  とは、その  $n$ -単体が  $G$  内の完全グラフ  $K_{n+1}$  からなる単体複体である。ここで、完全グラフ  $K_m$  とは  $m$  個の頂点からなるグラフで全ての頂点同士が結ばれているもの。



本稿では平面に埋め込めるグラフ (planar グラフ) について述べる。

$$G: \text{planar} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \epsilon: G \hookrightarrow \mathbb{R}^2$$

平面に埋め込まれているグラフを平面グラフという。

グラフ  $G$  の clique complex は  $G$  連結成分の clique complex の非交和となるため、以降ではグラフは連結とする。

定義 1.2. (グラフの用語について)

- $G$  の cut vertex とは頂点  $v$  で  $G \setminus \{v\}$  が非連結なもの。
- $G$  が cut vertex を持たないとき、 $G$  を非分離的と言う。
- $G$  を cut vertices で分離していくことで、 $G$  を一意にいくつかの非分離的な部分グラフに分解できる。この分解をブロック分解と言う。
- $G$  の部分グラフ  $G'$  が誘導部分グラフであるとは、 $G$  の辺でその端点が  $G'$  に含まれるなら、その辺が  $G'$  に含まれるときに言う。つまり  $e = vw \in E(G), v, w \in V(G') \Rightarrow e \in E(G')$

---

\*t-sato@math.kyoto-u.ac.jp

$\text{Cl}(G)$  のホモトピー型を決定するために、 $G$  をより簡単な部分グラフに分解する。次の補題により、分解したグラフの clique complex からもとのグラフの clique complex のホモトピー型が分かる。

**補題 1.3.**  $G$  をグラフとする。 $G_1, G_2$  を  $G$  の誘導部分グラフとし、 $G = G_1 \cup G_2$  を満たすとする。このとき、次の単体複体の間の同相を得る。

$$\text{Cl}(G) \cong \text{Cl}(G_1) \cup_{\text{Cl}(G_1 \cap G_2)} \text{Cl}(G_2).$$

さらに  $\text{Cl}(G_1 \cap G_2)$  が可縮なら、ホモトピー同値

$$\text{Cl}(G) \simeq \text{Cl}(G_1) \vee \text{Cl}(G_2)$$

を得る。

**証明.**  $K_n \subset G$  が  $i = 1$  or  $2$  で  $V(K_n) \subset V(G_i)$  を満たすなら、 $G_i$  は誘導部分グラフなので  $K_n \subset G_i$ . 仮定より、どちらにも入らない完全グラフは存在しないので、初めの主張は示された。

次に、2番目の主張を示す。 $(\text{Cl}(G_i), \text{Cl}(G_1 \cap G_2))$  は CW 対 なので、inclusion  $\text{Cl}(G_1 \cap G_2) \hookrightarrow \text{Cl}(G_i)$  は cofibration であり、次の pushout

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(G_1 \cap G_2) & \longrightarrow & \text{Cl}(G_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cl}(G_1) & \longrightarrow & \text{Cl}(G) \end{array}$$

は homotopy pushout である。 $\text{Cl}(G_1 \cap G_2)$  が可縮なら、次の可換図式の縦の射はホモトピー同値。

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(G_1) & \longleftarrow * & \longrightarrow \text{Cl}(G_2) \\ \parallel & \downarrow \simeq & \parallel \\ \text{Cl}(G_1) & \longleftarrow \text{Cl}(G_1 \cap G_2) & \longrightarrow \text{Cl}(G_2) \end{array}$$

$\text{Cl}(G_1) \vee \text{Cl}(G_2)$  は上の行の homotopy pushout である。それゆえ induced map  $\text{Cl}(G_1) \vee \text{Cl}(G_2) \rightarrow \text{Cl}(G)$  はホモトピー同値。

$$\begin{array}{ccccc} & & * & \longrightarrow & \text{Cl}(G_2) \\ & \swarrow & \downarrow & & \parallel \\ \text{Cl}(G_1) & \longrightarrow & \text{Cl}(G_1) \vee \text{Cl}(G_2) & \longrightarrow & \text{Cl}(G_2) \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ & & \text{Cl}(G_1 \cap G_2) & \longrightarrow & \text{Cl}(G_2) \\ & \swarrow & \downarrow \simeq & \swarrow & \\ \text{Cl}(G_1) & \longrightarrow & \text{Cl}(G) & \longrightarrow & \end{array}$$

□

この補題を繰り返し用いることで、 $G$  のブロック分解  $G = G_1 \cup \cdots \cup G_n$  に対し、

$$\text{Cl}(G) \simeq \text{Cl}(G_1) \vee \cdots \vee \text{Cl}(G_n)$$

が分かる。

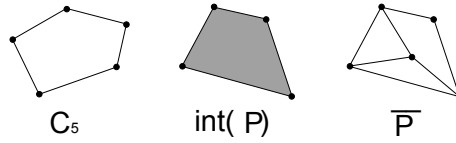
## 2 グラフの分解のための準備とホモトピー型を記述する量

定義 2.1. グラフ  $G$  内の  $n$ -gon とは巡回グラフ  $C_n$  in  $G$  のこと。ただし、特に  $n \geq 3$  のときは polygon と呼び、3-gon は 3 角形 (triangle) と呼ぶことにする。

polygon  $P$  in  $H$  (平面グラフ) は  $\mathbb{R}^2$  内の単純閉曲線。Jordan の曲線定理より、 $P$  は  $\mathbb{R}^2$  を 2 つの 弧状連結な開集合に分ける。int( $P$ ) でその有界な方を表す。

定義 2.2.  $H$  を平面グラフ、 $P$ : polygon in  $H$  とする。 $\bar{P}$  を int( $P$ ) の閉包に含まれる 頂点と辺による  $H$  の部分グラフとする。

$$\bar{P} = H \cap \overline{\text{int}(P)}$$



平面グラフ  $H$  に対し、 $H$  内の polygons の集合に次で partial order を入れる。

$$P \leq Q \Leftrightarrow \text{int}(P) \subset \text{int}(Q)$$

定義より  $P \leq Q \Leftrightarrow \bar{P} \subset \bar{Q}$ .  $\mathcal{P}(H)$  でこの poset を表す (partially ordered set)。

以降、 $H$  は 非分離的な平面グラフとする。

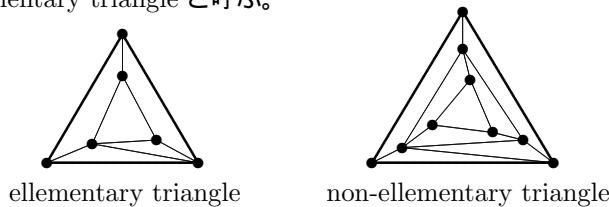
グラフの有限性より次が分かる。

命題 2.3.  $H$ : 非分離的な平面グラフ、 $P$ : polygon in  $H$  とする。このとき次は同値。

(a)  $P$  は  $\mathcal{P}(H)$  の極小元。

(b) int( $P$ ) には頂点や辺が存在しない。

定義 2.4.  $\mathcal{P}(G)$  の中で極小でない triangles の集合を  $\mathcal{T}(G)$  とする。 $\mathcal{T}(G)$  は  $\mathcal{P}(G)$  の subset である。 $\mathcal{T}(G)$  の極小元を elementary triangle と呼ぶ。



また、グラフの単純性より次が分かる。

補題 2.5.  $Q$  を polygon in  $H$  とし、 $\mathcal{T}(H)_{>Q}$  を  $\mathcal{T}(H) \cap \mathcal{P}(H)_{>Q}$  とする。 $\mathcal{T}(H)_{>Q} \neq \emptyset$  であれば  $\mathcal{T}(H)_{>Q}$  には極小元が存在する。

極小な  $n$ -gon  $Q$  in  $H$  ( $n \geq 4$ ) に対し、 $\mathcal{T}(H)_{>Q}$  の極小元を punctured と呼ぶ。

定義 2.6. clique complex のホモトピー型を記述するための量を以下のように定義する。

- $q(H)$ : 極小な  $n$ -gons in  $H$  ( $n \geq 4$ ) の数。
- $t_p(H)$ : punctured triangles in  $H$  の数。
- $t_s(H)$ : 次のような triangles  $T$  の数。より小さい triangles  $T_i \subsetneq T$  で、 $\bar{T} = \bigcup_{i \in I} \bar{T}_i$  かつ int( $T_i$ )  $\cap$  int( $T_j$ ) =  $\emptyset$  for  $i \neq j$  という triangles が存在するもの。つまり  $\bar{T}$  が  $\bar{T}_i$  たちでタイル張りされているもの。
- $t_v(H)$ : 次のような triangles  $T$  の数。int( $T$ ) 内の頂点で  $T$  の 3 つ全ての頂点と結ばれているものが存在する。

### 3 主定理 (定理 3.3) とその証明

命題 3.1. elementary triangle  $T$  は次のいずれかが 1 つに分類される。

I  $\bar{T}$  に極小な  $n$ -cycle ( $n \geq 4$ ) は存在せず、

(a)  $\text{int}(T)$  にはただ 1 つ頂点がある。

(b)  $\text{int}(T)$  には 2 つ以上頂点がある。

II  $\bar{T}$  に極小な  $n$ -cycle ( $n \geq 4$ ) が存在する。

各々の例として次のようなものがある。

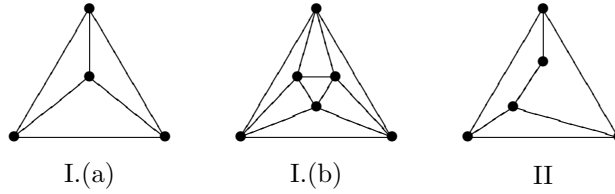


表 1:  $q, t_p, t_s, t_v$  の値

type of $\bar{T}$	I.(a)	I.(b)	II
$q(\bar{T})$	0	0	-
$t_p(\bar{T})$	0	0	1
$t_s(\bar{T})$	1	1	0
$t_v(\bar{T})$	1	0	0

上記のそれぞれの場合に clique complex のホモトピー型を見る。

補題 3.2.  $T$ : small triangle in  $H$  とする。  $\text{Cl}(\bar{T})$  は  $\bar{T}$  が I.(a), I.(b), II のとき、それぞれ、1 点、  $S^2$ ,  $\bigvee_{q(\bar{T})-1} S^1$  にホモトピー同値。

証明.  $\bar{T}$  が I.(a) 型だと、それは  $K_4$  ゆえ  $\text{Cl}(\bar{T}) \simeq *$ .  $\bar{T}$  が I.(b) 型だと、  $\text{Cl}(\bar{T})$  は  $S^2$  の三角形分割。  $\bar{T}$  が II 型だと、  $\text{Cl}(\bar{T})$  は  $S^2$  から  $q(\bar{T})$ -点を除いたものにホモトピー同値。 それゆえ

$$\text{Cl}(\bar{T}) \simeq S^2 \setminus \bigsqcup_{q(\bar{T})} * \simeq \bigvee_{q(\bar{T})-1} S^1.$$

□

定理 3.3.  $G$  を 非分離的で連結な planar グラフとし embedding  $\epsilon: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  を固定する。ブロック分解  $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$  に対し、

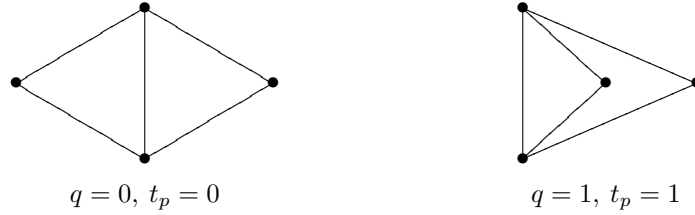
$$n_1 = \sum_{i=1}^n (q(\epsilon(G_i)) - t_p(\epsilon(G_i))), \quad n_2 = \sum_{i=1}^n (t_s(\epsilon(G_i)) - t_v(\epsilon(G_i))).$$

とすると、

$$\text{Cl}(G) \simeq \bigvee_{n_1} S^1 \vee \bigvee_{n_2} S^2.$$

注意 3.4. 補題 3.2 は 定理 3.3 の特別な場合。

定義より、 $t_v$  は埋め込み  $\epsilon: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  の選択に依らず、それゆえ  $t_s$  も選択に依らない。ただ、 $q$  と  $t_p$  はそうでなく、次の例では異なる。



次の系は  $\text{Cl}(G)$  が埋め込みに依らないことより分かる。

系 3.5.  $n_1$  と  $n_2$  は埋め込み  $\epsilon: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  の選択に依らない。

この系は組合せ論的に証明しようとするると全ての埋め込みを見つけて考える必要があり、難しいと思わる。また、 $\text{Cl}(H)$  の  $f$ -vector について次の式を得る。

系 3.6.  $H$ : 非分離的で連結な平面グラフ とし、 $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  を  $\text{Cl}(H)$  の  $f$ -vector とする。このとき、

$$\begin{aligned} f_0 &= |V(H)|, \\ f_1 &= |E(H)|, \\ f_2 &= t_s + t_p - q + |E(H)| - |V(H)| + 1, \\ f_3 &= t_v. \end{aligned}$$

証明.  $f_2 = t_s + t_p - q + |E(H)| - |V(H)| + 1$  を示せばよい。Euler-Poincaré formula により、

$$\begin{aligned} \chi(\text{Cl}(H)) &= n_2 - n_1 + 1 \\ -t_v + f_2 - |E(H)| + |V(H)| &= (t_s - t_v) - (q - t_p) + 1, \end{aligned}$$

ここで  $\chi(K)$  は単体複体  $K$  の Euler 標数。それゆえ、

$$f_2 = t_s + t_p - q + |E(H)| - |V(H)| + 1.$$

□

定理 3.3 の証明.  $G$  のブロック分解  $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$  に補題 1.3 を繰り返し用いて、

$$\text{Cl}(G) \simeq \text{Cl}(G_1) \vee \dots \vee \text{Cl}(G_n)$$

を得る。ゆえに非分離的なグラフについてのみ考えればよい。

非分離的な  $G$  に対し、 $\mathcal{T}(G)$  の元の数で帰納法を行う。 $|\mathcal{T}(G)| = 0$  ならば、ホモトピー同値

$$\text{Cl}(G) \simeq \bigvee_{q \in \mathcal{T}(G)} S^1 \quad (3.1)$$

があり、

$$t_p(\epsilon(G)) = 0, t_s(\epsilon(G)) = 0, t_v(\epsilon(G)) = 0. \quad (3.2)$$

が成立している。

$T$  を  $\mathcal{T}(\epsilon(G))$  の極小元とすると、 $G'$  を  $V(G') = V(G) \setminus (V(G) \cap \text{int}T)$  という  $G$  の誘導部分グラフとする。つまり  $G'$  は  $\bar{T} \setminus T$  を  $G$  から取り除いてできる。 $G' \cap \bar{T} = T$ ,  $G' \cup \bar{T} = G$  である。 $\text{Cl}(T)$  は可縮、ゆえに補題 1.3 より、

$$\text{Cl}(G) \simeq \text{Cl}(G') \vee \text{Cl}(\bar{T}).$$

明らかに

$$\begin{aligned} q(\epsilon(G)) &= q(\epsilon(G')) + q(\bar{T}), & t_p(\epsilon(G)) &= t_p(\epsilon(G')) + t_p(\bar{T}), \\ t_s(\epsilon(G)) &= t_s(\epsilon(G')) + t_s(\bar{T}), & t_v(\epsilon(G)) &= t_v(\epsilon(G')) + t_v(\bar{T}), \end{aligned}$$

と

$$|\mathcal{T}(\epsilon(G'))| = |\mathcal{T}(\epsilon(G))| - 1$$

が成立。補題 3.2 を  $T$  に適用し、表 1, (3.1) と (3.2) により帰納法が進んで定理は証明される。  $\square$

## 参考文献

- [A] M. Arkowitz, *Introduction to Homotopy Theory (Universitext)*, Springer, 2011.
- [BM] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics **244**, Springer, 2008.
- [F] A. Frohmader, *Face Vectors of Flag Complexes*, arXiv:math/0605673v1
- [K] D. Kozlov, *Combinatorial algebraic topology*, Algorithms and Computation in Mathematics Vol. **21**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.