E_6, E_8 型部分因子環の平面代数と 3次元多様体の状態和不変量の組み合わせ的構成について

岡崎 建太 *

京都大学 数理解析研究所 D3、2012 年 7 月 1 日

城崎新人セミナーでは朝食の前から議論が交わされるなど, 非常に密度の濃い日々を過ごすことができました. このような素晴らしい環境をご提供いただいた先生方, 実行委員の皆様に厚くお礼申し上げます.

1 導入

本報告は E_8 型の部分因子環に由来する平面代数から導びかれる 3 次元多様体の状態和不変量を, 部分因子環の知識や平面代数の一般論を用いずに定義することを目標とする. なお, E_6 型の場合についても同様の議論を並行して行うことができる. 理論的な背景の詳細は, 平面代数については [Jon, MPS, Big], 部分因子環と状態和不変量については [BaWe, SaWa] などを参照されたい.

2 平面代数の構成

2.1 Temperley-Lieb 代数 $TL_n(\delta)$

この節では Temperley-Lieb 代数を平面タングルを用いて定義する. 非負整数 n に対し, 上辺と下辺に各々 n 個の点が付いた長方形領域を考える. **平面 n-タングル**とは, この長方形領域の中の互いに交わらない有限個の滑らかな曲線の集合であり, 各曲線は閉曲線であるか, 端点を長方形の境界上の $2n$ 点のどれかに持ち, かつ $2n$ 個の点はある曲線の端点となっているものとする（図 1 を参照）. 2 つの平面 n-タングルは端点を保つイソトピーによって移り合うとき, 同じものであるとする. 以後長方形領域を略記する.

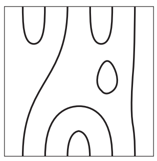
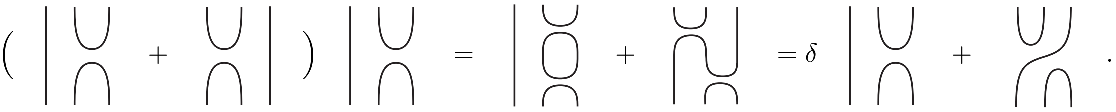


図 1: 平面タングルの例

0 でない複素数 δ を固定する. 平面 n-タングル全体を生成元に持ち, 局所関係式 $O = \delta\emptyset$ の入った複素ベクトル空間を $TL_n(\delta)$ とする. ここで O は閉曲線, $\emptyset$ は空集合を表す. つまり, $TL_n(\delta)$ において閉集合を含む図式が与えられたとき, その閉曲線を取り除いて δ を掛けることができる. 2 つの平面 n-タングル T_1, T_2 が与えられたとき, 積 T_1T_2 を T_1 の下辺と T_2 の上辺を「くっつける」ことによって定める. この積は $TL_n(\delta)$ 上の積に拡張され, $TL_n(\delta)$ に代数の構造を入れることができる. $TL_n(\delta)$ は **Temperley-Lieb 代数**と呼ば

*junes@kurims.kyoto-u.ac.jp

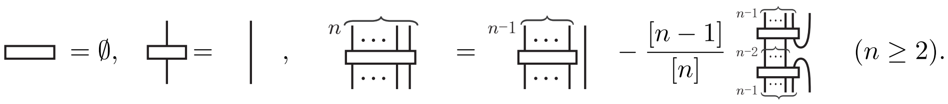
れる. 例えば, $TL_3(\delta)$ において次のような計算ができる:



3 以上の整数 r をとり固定する. 任意の整数 n に対して, **量子整数** $[n]$ を次で定める:

$$[n] = [n]_r = \frac{e^{\pi i n/r} - e^{-\pi i n/r}}{e^{\pi i/r} - e^{-\pi i/r}}.$$

以下では $\delta = [2]$ の場合のみを考える. 整数 $n = 0, 1, \ldots, r-1$ に対し, $TL_n(\delta)$ の元 $f^{(n)} =$  を次で帰納的に定める. 各 $f^{(n)}$ を **Jones-Wenzl べき等元**という.



Jones-Wenzl べき等元は閉 3 次元多様体の Reshetikhin-Turaev $SU(2)$ 不変量や Turaev-Viro $SU(2)$ 不変量の組み合わせ的定義の際にも用いられる, 非常に重要な元である.

2.2 E_8 部分因子環の平面代数 $\mathcal{P}_n$

次に, Temperley-Lieb 代数よりもやや複雑な代数を定義する. 先述の平面 n-タングルに代えて, 図 2 のような「基点付きの 10 本足 S-円盤を有限個（空でもよい）含む平面 n-タングルのイソトピー類」を考える. 以下誤解のない限りこれのことも単に**平面 n-タングル**という.

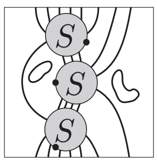
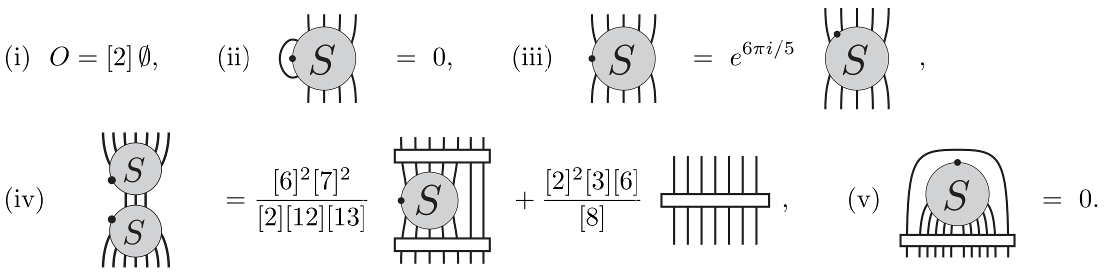


図 2: S-円盤つき平面タングルの例

量子整数を $[n] = [n]_{30}$ とする. （$r = 30$ は E_8 型部分因子環の Coxeter 指数に相当する.）この平面 n-タングルの全体を生成元とし, 局所関係式を以下の (i)–(v) のように入れた複素ベクトル空間を $\mathcal{P}_n$ とおく. $TL_n([2])$ の場合と同様にして $\mathcal{P}_n$ には代数の構造が定まる.

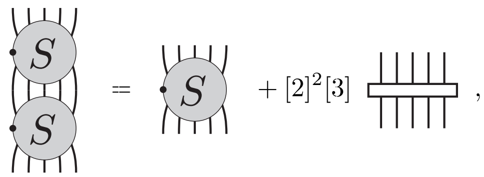


命題 2.1. 平面 0-タングル全体のなす複素ベクトル空間 $\mathcal{P}_0$ は 1 次元である. つまりどんな平面 0-タングルも空集合のスカラー倍として一意に表せる.

証明の概略. S-円盤を 1 つ以上含む任意の連結な平面 0-タングル T は, (ii) の左辺のような「cap された」S-円盤を含む（即ち 0 に等しい）か, さもなくば「2 つの S-円盤で 3 本（実はより強く, 4 本）の曲線でつながっているもの」を含むことが, T に対応する平面グラフのオイラー数を調べることによってわかる. その部分に (iii), (iv) を用いることで, T はより S-円盤の少ない 0-タングルの線型和として表すことができる. これを繰り返すことで, T は S-円盤を含まない 0-タングルの線型和で表せ, さらに (i) を用いればこれは空集合のスカラー倍に等しくなる.

一意性は, 上述の「S-円盤の数を減らしていきスカラーを与えるプロセス」が 3 本の曲線の選び方によらず一意的に定まり, また関係式 (v) とも矛盾しないことを, S-円盤の個数に関する帰納法で示せばよい. □

注意 2.2. $\mathcal{P}_n$ と 同じ生成元, 関係式で, (iv) だけを次の (iv)$'$ に取り替えて定義される代数を $\mathcal{P}'_n$ とおく. こちらがもともとの定義である [Big].

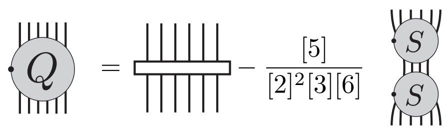
(iv)$'$ 

このとき, 実は $\mathcal{P}_n$ と $\mathcal{P}'_n$ は等しいことを示すことができた. (iv) から (iv)$'$ が導かれることぐすぐにわかるが, (iv)$'$ から (iv) が従うことを示すのには Jones-Wenzl べき等元に関する少しテクニカルな手法を用いた. Bigelow は $\mathcal{P}'_0$ に関して上と同様の主張 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}'_0 = 1$ を, 部分因子環の結果を用いることで示した. 関係式 (iv)$'$ の代わりに (iv) を用いるメリットは, 命題 2.1 の証明を部分因子環の知識を使わず初等的に行える点にある.

以後, 命題 2.1 から得られる同型 $\mathcal{P}_0 \cong \mathbb{C}$ によって平面 0-タングルを複素数ともみなす. 但し $\emptyset = 1$ とする.

3 状態和不変量の構成

この節では前節で定義した $\mathcal{P}_n$ から有向閉 3 次元多様体の状態和不変量を定義する. そのための準備としてまず, 彩色された平面 3 価グラフに 0-タングルを対応させる方法について解説する. $Q \in \mathcal{P}_6$ を次で定める. Q はべき等元であることが計算により確かめられる.



T を平面 3 価グラフとする. 集合 $\mathcal{E} = \{0, 2, 4, Q\}$, $\mathcal{V} = \{\cdot, S, X, Y\}$ を用意し, T の各辺に $\mathcal{E}$ の元を対応させる写像と, 各頂点に $\mathcal{V}$ の元を対応させる写像の組を T の **彩色** という. ただし, 各頂点の周りの彩色は図 3 の左側のいずれかになっているものとし（$\cdot$ で塗られている頂点には何も描かないと約束する）, Y で塗られている頂点には隣接する 3 つの面のうちのどれかに $*$ 印がついているものとする.

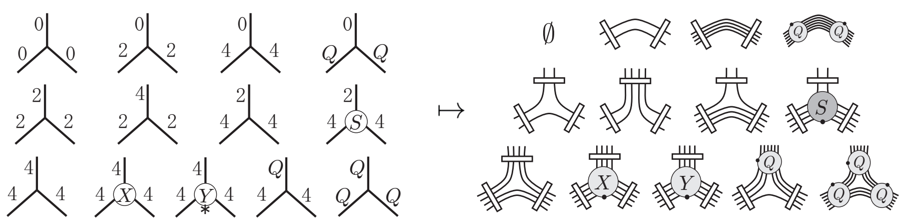
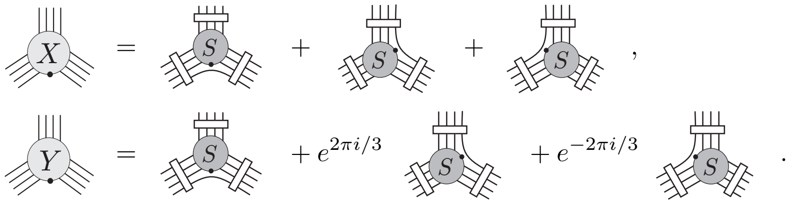
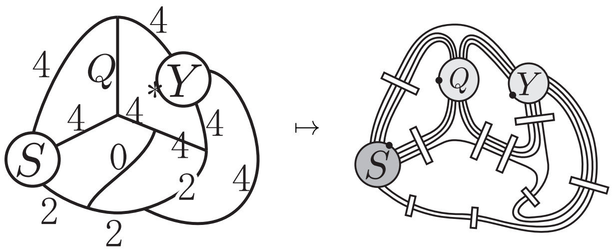


図 3: 彩色のルールと対応する平面タングル

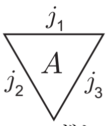
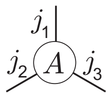
但し X, Y を次のようにおいた:



このとき, $0, 2, 4, Q$ で塗られている辺に各々 $f^{(0)}, f^{(2)}, f^{(4)}, Q$ を, 各頂点の周りで図 3 の右側の対応する平面タングルを「代入」することによって, 上述のように彩色された 3 価グラフに平面 0-タングル（即ち複素数）を対応させせることができる. 次にこの対応の例を一つ与える.

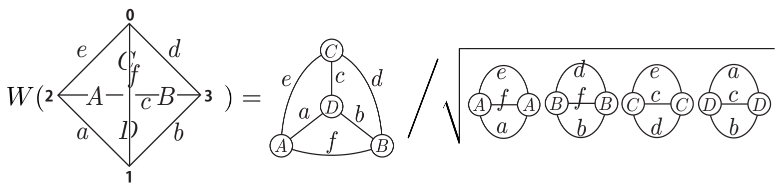


この対応によって, 彩色された平面 3 価グラフも複素数とみなすことにする.

いよいよ状態和不変量を構成する. M を有向閉 3 次元多様体, $\mathcal{T}$ を M の単体分割とする. $\mathcal{T}$ の彩色を, 先ほど定義した 3 価グラフの彩色の「双対」として定義する. つまり $\mathcal{T}$ の**彩色** c とは, $\mathcal{T}$ の各 3 角形（2 単体）に $\mathcal{V}$ の元を対応させる写像 φ と, $\mathcal{T}$ の各辺（1 単体）に $\mathcal{E}$ の元を対応させる写像 λ の組であり, $\mathcal{T}$ の各 3 角形が  （$j_1, j_2, j_3 \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{V}$）のように対応されているとき, その双対グラフ  が図 3 の左側のいずれかになっているものとする. ただし 3 価グラフの場合と同様に, Y で彩色された 3 角形には 3 つの頂点のうちのいずれか 1 つに $*$ 印が付与されているものとする. 単体分割された有向閉 3 次元多様体 $(M, \mathcal{T})$ の**状態和不変量** $Z(M, \mathcal{T}) \in \mathbb{C}$ を次で定める.

$$Z(M, \mathcal{T}) = w^{-v} \sum_{c=(\varphi,\lambda)} \prod_{E} \mathrm{tr}(\lambda_E) \prod_{\Delta} W(\Delta, c),$$

ここで v は $\mathcal{T}$ の 0 単体の数, $\mathrm{tr}(T)$ はタングル T を閉じて得られる 0-タングル（に対応する複素数）のことであり, $w = \sum_{T \in \mathcal{E}} \mathrm{tr}(T)^2$ であり, c は $\mathcal{T}$ の彩色全体を, E は $\mathcal{T}$ の 1 単体全体を, そして Δ は $\mathcal{T}$ の 3 単体全体を走る. さらに, "重み" $W(\Delta, c)$ を, 正に向き付けられた 3 単体 $\Delta = +(0123)$ に対し次で定める:



ただし右辺の $*$ 印は左辺の図中の $*$ 印に応じて付けるものとする. また, 負に符号付けられた 3 単体 $\Delta' = -(0123)$ に対して $W(\Delta', c)$ を $W(\Delta, c)$ の複素共役で定める.

定理 3.1. $Z(M, \mathcal{T})$ の値は単体分割 $\mathcal{T}$ や $*$ 印の付け方に依らない. ゆえに $Z(M) = Z(M, \mathcal{T})$ は M の位相不変量である.

参考文献

[BaWe] J. Barrett, B. Westbury, *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3997–4022.

[Big] S. Bigelow, *Skein theory for the ADE planar algebras* (2009), `arXiv:math/0903.0144`

[Jon] V. Jones, *Planar algebras, I* (1999), `arxiv.org:math/9909027v1[math.QA]`

[MPS] Morrison, Peters and Snyder, *Skein theory for the* D_{2n} *planar algebras*, `arxiv.org:0808.0764v2[math.QA]`, 2008.

[SaWa] N. Sato, M. Wakui, *Computations of Turaev-Viro-Ocneanu invariants of 3-manifolds from subfactors*, J. Knot Theory and its Ramif. **12** (2003) 543–574.