Seifert fiber からの real Bott 多様体の一般化

中山　雅友美*

首都大学東京大学院理工学研究科　数理情報科学専攻修士 2 年

1　序

n 次元リーマン平坦多様体とは剛体運動群 $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O(n)}$ の virtually 可換な (可換群を有限指数な正規部分群として含む) 離散部分群 Γ を $\mathbb{R}^n$ に作用させてできる軌道多様体 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ である．このときベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を一般化してベキ零リー群，さらに可解リー群をとり，上と同じようにして virtually ベキ零，virtually 可解な離散群による軌道多様体が考えられ，リーマン平坦多様体 $\Longrightarrow$ infra-nil 多様体 $\Longrightarrow$ infra-solv 多様体という幾何多様体の一般化が得られる．これらの多様体は普遍被覆空間が可縮なので非球形多様体とも呼ばれる．一方，real Bott 多様体と呼ばれるある特殊な S^1-束の底空間として現れている多様体があり，全ての real Bott 多様体はあるリーマン平坦多様体と微分同相であることを示すことができる。この研究の目的は real Bott 多様体のファイバー構造を変えて一般化し，より多くの非球形閉多様体を構成してその幾何構造を調べることである．今回紹介した S^1-fibred nilBott 多様体は real Bott 多様体をザイフェルトファイバーの立場から一般化したもので，infra-nil 多様体に微分同相であることを示すことが出来た．

2　リーマン平坦多様体、infra-nil 多様体

$\mathrm{O}(n)$ を $n \times n$ の直交行列がなす群 (直交群) とする．$\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ の任意の元 (n, A) に対して，

$$x \mapsto n + Ax$$

で定義された n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の写像 $f_{(n,A)}$ を剛体運動という．剛体運動の合成 $f_{(m,B)} \circ f_{(n,A)}$ は $x \mapsto m + Bn + BAx$ なので，$f_{(m,B)} \circ f_{(n,A)}$ は剛体運動 $f_{(m+Bn,BA)}$ となる．また $f_{(-A^{-1}n,A^{-1})} \circ f_{(n,A)} = id = f_{(0,I)}$ ということから，剛体運動の全体は合成を積として群を作ることがわかる．集合 $\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ にこの写像の合成に対応するように積を入れた群を $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O(n)}$ または $\mathrm{E}(n)$ で表す．$\mathrm{O(n)}$ がコンパクトであることから $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O(n)}$ の $\mathbb{R}^n$ への作用は固有不連続作用であることを示すことが出来る．

定義 2.1. $\mathrm{E}(n)$ の有限位数な元を持たないユニフォームな離散部分群 Γ を Bieberbach 群という．

Bieberbach 群 Γ は $\mathrm{E}(n)$ の部分群なので $\mathbb{R}^n$ に固有不連続に作用するが，このことと有限位数の元を持たないことから自由な作用であることを示すことができ, 軌道空間 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ はコンパクトな多様体になる．

定義 2.2. Γ を Bieberbach 群とする．$\mathbb{R}^n/\Gamma$ をリーマン平坦多様体という．

例 2.3. n 次元トーラス $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$. ここで $\Gamma = \langle (e_1, E), (e_2, E), \cdots (e_n, E) \rangle$ である．

例 2.4. Klein Bottle $K = \mathbb{R}^2/\Gamma$. ここで $\Gamma = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$ である．

*nakayama-mayumi@ed.tmu.ac.jp

$\mathrm{E}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O(n)}$ は短完全系列 $1 \to \mathbb{R}^n \to \mathrm{E}(n) \to \mathrm{O(n)} \to 1$ を持つ．Bieberbach 群 $\Gamma \leq \mathrm{E}(n)$ においては以下の事実が知られている．

定理 2.5. [Bieberbach 定理] $\mathbb{R}^n \cap \Gamma$ は Γ の極大可換正規部分群で $\mathbb{Z}^n$ に同型であり，$H = \Gamma/\mathbb{R}^n \cap \Gamma$ は有限群である．

定理 2.5 は任意の Bieberbach 群 Γ は短完全系列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\ \nu\ } H \longrightarrow 1 \tag{2.1}$$

を持つことを示している．

注意 2.6. Γ が $\mathbb{R}^n$ に作用してリーマン平坦多様体 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ を作る．一方，Γ の極大可換部分群 $\mathbb{Z}^n$ のみ $\mathbb{R}^n$ に作用さると商多様体として $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ができ，この T^n へ有限群 $H = \Gamma/\mathbb{Z}^n$ の作用が引き起こされて，軌道空間 T^n/H は $\mathbb{R}^n/\Gamma$ と微分同相であることを示すことができる．

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n) & \longrightarrow & (\Gamma, \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{(\nu,p)} & (H, T^n) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \Gamma/\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\ \bar{p}\ } & T^n/H. \end{array} \tag{2.2}$$

次の節で述べるが，n 次元 real Bott 多様体は T^n 上の有限群の作用の軌道多様体として得られることが示されている．

次に infra-nil 多様体の定義を紹介する．$\mathcal{N}$ を単連結ベキ零リー群, $\mathcal{K}$ を $\mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ の極大コンパクト部分群とし，半直積群 $\mathcal{N} \rtimes \mathcal{K}$ を作ると $\mathcal{N}$ に $(n, A)x = n \cdot Ax$ で作用する．

定義 2.7. Γ を $\mathcal{N} \rtimes \mathcal{K}$ の有限位数の元を持たないユニフォームな離散部分群とする．$\mathcal{N}$ を Γ で割った軌道多様体 $\mathcal{N}/\Gamma$ を infra-nil 多様体という．

特別に $\mathcal{N}$ として $\mathbb{R}^n$ をとるとリーマン平坦多様体となる．infra-nil 多様体に対しても，Bieberbach の定理と同様の事が示されている．

定理 2.8. [Auslander Bieberbach 定理] $\Gamma \cap \mathcal{N}$ は Γ の極大ベキ零正規部分群で、$H = \Gamma/\mathbb{R}^n \cap \Gamma$ は有限群である。また、$\Gamma \cap \mathcal{N}$ は $\mathcal{N}$ のユニフォームな離散正規部分群である．

注意 2.9. infra-nil 多様体 $\mathcal{N}/\Gamma$ の普遍被覆空間は $\mathcal{N}$ で非球形閉多様体であり, 基本群は Γ に同型である．

3 Real Bott タワー

n 個の S^1-束の繰り返しによってつくられる多様体の列

$$M = M_n \to M_{n-1} \to \ldots \to M_1 \to \{\mathrm{pt}\} \tag{3.1}$$

で次の特徴を持つものを real Bott タワーと呼ぶ．各 i において，$M_i \to M_{i-1}$ は S^1 をファイバーに持つファイバー束で，そのファイバーは自明な 1 次元束 θ ともう一つの 1 次元ベクトル束 l_i の Whitney 和 $\theta \oplus l_i$ の射影束 $R(\theta \oplus l_i)$ のファイバー $\mathbf{RP}^1 = S^1$ となっているとする．ここで先頭に現れる多様体 M を real Bott 多様体という．

ここからは，商多様体が n 次元 real Bott 多様体となるような T^n への $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用を紹介する．

まず $n \times n$ の上三角行列 $A = (\alpha_{ij})$ で、$\alpha_{ii} = 1$，$i < j$ のとき $\alpha_{ij} = 0$ or 1 を満たしているものを準備する．このような行列 A を Bott 行列と呼ぶ．次に $n \times n$ の Bott 行列 A に，行ベクトル表示 $A = {}^t(g_1, g_2, \ldots, g_n)$

を与え，任意の $g_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) = (0, \ldots, 0, 1, \alpha_{ii+1}, \ldots, \alpha_{in})$ に対して $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 上の変換 $g_i : T^n \to T^n$ を以下で定める．

$$g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{i-1}, -z_i, z'_{i+1}, \ldots, z'_n)$$

ここで z'_m は $\alpha_{im} = 0$ のとき z_m，$\alpha_{im} = 1$ のとき $\bar{z}_m$(複素共役) である．$g_i \circ g_i = id$ なので g_i は T^n 上への自由な $\mathbb{Z}_2$-作用となり，A は T^n 上に自由な $(\mathbb{Z}_2)^n$-作用を与える．このときの軌道空間 T^n/A は n 次元 real Bott 多様体であることを示すことができ，$M(A)$ で表す．real Bott 多様体 $M(A)$ はリーマン平坦多様体と微分同相になっていることを示すことが出来る．

そして，任意の n 次元 real Bott 多様体は $n \times n$Bott 行列による T^n への作用の商多様体として得られることが示されている．

Kamishima, Nazra[3] によって 5 次元までの real Bott 多様体は分類されていて，一般次元での分類は Choi, Masuda, Oum[1] によってなされている．

4 ザイフェルトファイバー

Δ を有限位数の元を持たない有限生成なベキ零群，W を可縮 (1 点とホモとピー同値) な空間とする．群拡大 (短完全系列)：

$$1 \to \Delta \to G \xrightarrow{\nu} Q \to 1 \tag{4.1}$$

が与えられているとし，さらにココンパクト (W/Q がコンパクトとなる) 固有不連続作用 (Q, W) があると仮定する．このとき Malce'v の定理より，Δ をココンパクトな離散部分群として含んでいる単連結ベキ零リー群 $\mathcal{N}$ がただ一つ存在している. 次のことが [2] で示されている．

定理 4.1. G の $\mathcal{N} \times W$ 上の作用で

$$\mathcal{N} \text{ の } \mathcal{N} \times W \text{ 上への左移動 } (y \cdot (x, w) = (yx, w)) \text{ を正規化する}$$

ものが存在する．

定理 4.1 から得られる G の作用は条件から, $\mathcal{N} \times W$ から W への射影を p であらわすと, 軌道空間上に写像 $\mathcal{N} \times W/\pi \xrightarrow{\bar{p}} W/Q$ が自然と引き起こされることがわかる．

$$\begin{array}{ccccc}
(\Delta, \mathcal{N}) & \longrightarrow & (G, \mathcal{N} \times W) & \xrightarrow{(\nu,p)} & (Q, W) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{N}/\Delta & & \mathcal{N} \times W/G & \xrightarrow{\bar{p}} & W/Q.
\end{array} \tag{4.2}$$

この作用 $(G, \mathcal{N} \times W)$ をザイフェルト構造，軌道空間を $\mathcal{N} \times W/G$ をザイフェルト空間といい，引き起こされた写像 $\bar{p}$ をザイフェルトファイバーと呼ぶ．またこのとき 1 点 $[w] \in W/Q$ の逆像 $\bar{p}^{-1}([w])$ はそれぞれ違うが $[w]$ のファイバーと呼ばれている．

定義 4.2. Δ を有限指数な正規部分群として含む離散群 π を virtually ベキ零群と呼ぶ.

注意 4.3. 定理 2.8 より，任意の infra-nil 多様体の基本群は virtually ベキ零群である．

π を virtually ベキ零群とすると定義から群拡大：

$$1 \to \Delta \to \pi \longrightarrow F \to 1 \tag{4.3}$$

を作る．ここで F は有限群なので，F の一点 $\{pt\}$ への自明な作用は固有不連続として存在している．したがって定理 4.1 より次を得る．

系 4.4. virtually ベキ零群 π は単連結ベキ零リー群 $\mathcal{N}$ 上へのザイフェルト構造を持つ.

このとき軌道多様体 $\mathcal{N}/\pi$ は infra-nil 多様体であることが示されている. (cf. [2])

補足 (具体的な $(G, \mathcal{N} \times W)$ の作用. cf. [2])
群拡大 (4.1) が与えられた時,

- ν の断面 $s : Q \to G$ によって共役写像 $\psi = \mu(s) : Q \to \mathrm{Aut}(\Delta)$ が定義される. Malce'v の定理からこの写像は一意的に $\bar{\psi} : Q \to \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ に拡張される.
- この群拡大 (4.1) は写像 $f : Q \times Q \to \Delta,\ f(\alpha, \beta) = s(\alpha)s(\beta)s^{-1}(\alpha\beta)$ によって表され, G の群の積は
$$(n, \alpha)(m, \beta) = (n\psi(\alpha)(m)f(\alpha, \beta), \alpha\beta)$$
$(\forall\, n, m \in \Delta, \forall\, \alpha, \beta \in Q)$ で与えられる.
- 任意の $\alpha \in Q$ に対し ある写像 $\chi(\alpha) : W \to \mathcal{N}$ s.t. $f(\alpha, \beta) = \delta^1\chi(\alpha, \beta)(w) \quad (\forall\, w \in W)$ が存在していて, $(G, \mathcal{N} \times W)$ は
$$(n, \alpha)(x, w) = (n\bar{\psi}(\alpha)(x)\chi(\alpha)(\alpha w), \alpha w) \tag{4.4}$$
$(\forall\, (n, \alpha) \in G, \forall\, (x, w) \in \mathcal{N} \times W)$ で与えられる.

5 ザイフェルト剛性

定理 5.1. [ザイフェルト剛性](cf. [2]). 二つのザイフェルト構造

$$(\Delta, \mathcal{N}) \longrightarrow (\pi, \mathcal{N} \times W) \xrightarrow{(\nu, p)} (Q, W) \tag{5.1}$$

$$(\Delta', \mathcal{N}') \longrightarrow (\pi', \mathcal{N} \times W') \xrightarrow{(\nu', p')} (Q', W') \tag{5.2}$$

が与えられて, 同型写像 $\theta : \pi \to \pi'$ で 2 つの同型写像 $\theta|_\Delta : \Delta \to \Delta',\ \bar{\theta} : Q \to Q'$ を引き起こしているものが存在しているとする. さらに, 微分同相写像 $h' : W \to W'$ で $h(\alpha w) = \theta'(\alpha)h'(w)$, $(\forall \alpha \in Q, \forall w \in W)$ を満たしているものが存在しているとする. このとき微分同相写像 $h : \mathcal{N} \times W \to \mathcal{N} \times W'$ で $h((n, \alpha)(x, w)) = \theta(n, \alpha)h(x, w)$, $(\forall (n, \alpha) \in \pi, \forall (x, w) \in \mathcal{N} \times W)$ を満たしているものが存在する.

簡単に言うとそれぞれの群が同型で $(Q, W) \to (Q', W')$ が同変同値であれば, $\mathcal{N} \times W/\pi$ と $\mathcal{N} \times W/\pi'$ は微分同相である.

6 S^1-fibred nilBott タワー

real Bott タワーの一般化として n 個の S^1-束 (ここでファイバーはザイフェルトファイバーとする) の繰り返しによってつくられる非球形閉多様体の列

$$M_n \to M_{n-1} \to \ldots \to M_1 \to M_0 = \{\mathrm{pt}\} \tag{6.1}$$

を与える. この列を S^1-fibred nilBott タワーという. 詳しく述べる. ここから $\tilde{M}_i$ は M_i の普遍被覆空間, π_i を M_i の基本群とする. (6.1) の各 S^1-束 $M_i \to M_{i-1} \quad (i = 0, \cdots, n)$ に対して

(i) 普遍被覆空間上で主束 $\mathbb{R} \to \tilde{M}_i \to \tilde{M}_{i-1}$ が存在し,

(ii) π_i の $\tilde{M}_i$ への作用は $\mathbb{R}$ の作用を正規化している

とする．このとき，(6.1) を S^1-fibred nilBott タワー，先頭に現れる多様体 M_n を n 次元の S^1-fibred nilBott 多様体と呼ぶ．

注意 6.1. S^1-束 $M_i \to M_{i-1}$ は基本群の群拡大 $1 \to \mathbb{Z} \to \pi_i \to \pi_{i-1} \to 1$ を引き起こしていて条件 (ii) よりザイフェルト構造

$$(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \longrightarrow (\pi_i, \tilde{M}_i) \longrightarrow (\pi_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}) \tag{6.2}$$

を持つ．また任意の real Bott タワーの各 S^1-束もサイフェルトファイバーであることが示される．

定理 6.2. 任意の S^1-fibred nilBott 多様体 M は infra-nil 多様体と微分同相である．

（これと類似の結果が Lee, Masuda[5] によって得られている．）

定理 6.2 の証明の鍵となったことは，各多様体 M_i の基本群 π_i が virtually ベキ零群であったことである．したがって系 4.4 より各 i に対してザイフェルト構造:

$$(\Delta_i, \mathcal{N}_i) \longrightarrow (\pi_i, \mathcal{N}_i) \longrightarrow (F, pt) \tag{6.3}$$

ができて，infra-nil 多様体 $\mathcal{N}_i/\pi_i$ を作ることができる．さらにこの繰り返されたザイフェルト構造は次のようなサイフェルト構造:

$$(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \longrightarrow (\pi_i, \mathcal{N}_i) \longrightarrow (\pi_{i-1}, \mathcal{N}_{i-1}) \tag{6.4}$$

を構成していることを示すことができた．この (6.4) と定義から与えられているサイフェルト構造 (6.2)

$$(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \longrightarrow (\pi_i, \mathcal{N}_i) \longrightarrow (\pi_{i-1}, \mathcal{N}_{i-1}),$$
$$(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \longrightarrow (\pi_i, \tilde{M}_i) \longrightarrow (\pi_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}).$$

に対して，$\mathcal{N}_{i-1}/\pi_{i-1}$ と $\tilde{M}_{i-1}/\tilde{\pi}_{i-1} = M_{i-1}$ が微分同相であることを仮定すると定理 5.1 より M_i は infra-nil 多様対 $\mathcal{N}_i/\pi_i$ に微分同相であることが示される．i に関する帰納法を使って $M = M_n$ が infra-nil 多様体 $\mathcal{N}_n/\rho(\pi_n)$ と微分同相であることを示した．

7 3-次元 S^1-fibred nilBott 多様体

定理 6.2 から S^1-fibred nilBott 多様体は infra-nil 多様体に微分同相であることが分かるが，S^1-fibred nilBott 多様体はリーマン平坦多様体と微分同相であると言えるのではないか？という疑問が起こる．これを解決するために低次元の S^1-fibred nilBott 多様体を調べた．1 次元では S^1-fibred nilBott 多様体は S^1(リーマン平坦多様体) と微分同相な多様体のみでこれは real Bott 多様体の場合と同じである．2 次元ではトーラス T^2 とクラインの壺 K(どちらもリーマン平坦多様体) に分類されこれも real Bott 多様体と同じである．(これらのことは閉曲面の分類定理からすぐに分かる.）3 次元の場合はリーマン平坦多様体に微分同相になる S^1-fibred nilBott 多様体とそれ以外に分けて考察した．

既に 3 次元リーマン平坦多様体の微分同相類は 10 種類の $\mathcal{G}_1$，$\mathcal{G}_2$，$\mathcal{G}_3$，$\mathcal{G}_4$，$\mathcal{G}_5$，$\mathcal{G}_6$ (向き付け可能なもの), $\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$，$\mathcal{B}_3$，$\mathcal{B}_4$ (向き付け不可能なもの) に分類されている。(ここでの記号は [10] のものを使っている．）更に Y. Kamishima, M. Masuda, A. Nazra [4], [3] によって real Bott 多様体は $\mathcal{G}_1$，$\mathcal{G}_2$，$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_3$, であることが証明されている．そして real Bott 多様体とならない 6 つの $\mathcal{G}_3$，$\mathcal{G}_4$，$\mathcal{G}_5$, $\mathcal{G}_6$，$\mathcal{B}_2$，$\mathcal{B}_4$ が底空間をトーラスまたはクラインの壺とする S^1-束となるかを調べ，$\mathcal{B}_2$，$\mathcal{B}_4$ はそのような S^1-束になり，$\mathcal{G}_3$，$\mathcal{G}_4$，$\mathcal{G}_5$，$\mathcal{G}_6$, はならないことを示すことができたので次の定理を得た．

定理 7.1. リーマン平坦多様体と微分同相な 3 次元の S^1-fibred nilBott 多様体は 6 種類の微分同相類

$$\mathcal{G}_1,\ \mathcal{G}_2,\ \mathcal{B}_1,\ \mathcal{B}_2,\ \mathcal{B}_3,\ \mathcal{B}_4$$

に分類される．

これにより real Bott 多様体と微分同相にはならないがリーマン平坦多様体と微分同相な S^1-fibred nilBott 多様体もあることが言えた.

また 3 次元の場合にはリーマン平坦多様体ではない S^1-fibred nilBott 多様体は無限個現れることが分かった.

例 7.2. $\mathcal{N}$ を $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ に積を

$$(x,w)(y,z)=(x;y-Im(\bar{w}z),w+z)$$

で入れた単連結べき零 Lie 群とする.($\mathcal{N}$ は Heisenberg nil 多様体である.) $\Delta(k)$ を $\mathcal{N}$ の元

$$(2k,0),(0,k),(0,ki)$$

で生成される $\mathcal{N}$ の正規部分群とする.等質空間 $\mathcal{N}/\Delta(k)$ はリーマン平坦多様体ではない S^1-fibred nilBott 多様体の例である.(cf. [7]).

参考文献

[1] S. Choi, M. Masuda and S. Oum, *Classification of Real Bott Manifolds and Acyclic Digraphs*, Preprint, arXiv:1006.4658v1. math.AT (2010).

[2] Y. Kamishima, K.B. Lee and F. Raymond, *The Seifert construction and its applications to infranil manifolds*, Quart. J. Math., Oxford (2), **34** (1983), 433-452.

[3] Y. Kamishima and A. Nazra, *Seifert fibred structure and rigidity on real Bott towers, Contemp. Math.*, vol. 501, 103-122 (2009).

[4] Y. Kamishima and M. Masuda, *Cohomological rigidity of real Bott manifolds, Algebr. Geom. Topol.* **9** (2009), 2479-2502. MR 2576506

[5] J.B. Lee and M. Masuda, *Topology of iterated S^1-bundles*, arXiv:1108.0293 (math.AT.) 2011.

[6] K.B. Lee and F. Raymond, *Seifert fiberings*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 166, 2010.

[7] S. MacLane, *Homology*, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* vol. 114 Springer, Berlin, New York 1967.

[8] A. Nazra, *Diffeomorphism Classes of Real Bott Manifolds. Tokyo J. Math. 34 (2011), 229-260.*

[9] M.S. Raghunathan, 'Discrete subgroups of Lie groups,' *Ergebnisse Math. Grenzgebiete* vol. 68 Springer, Berlin, New York 1972.

[10] J. Wolf, *Spaces of constant curvature*, *McGraw-Hill, Inc.*, 1967.