Cauchy-Sylvester の compound determinants と 古典的 Coxeter 配置

中島　規博[*]

北海道大学大学院理学院

1　序文

$V=\mathbb{R}^\ell$ を ℓ 次元実ユークリッド空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の標準内積とする．ベクトル $e_\alpha \in V$ に対して，H_α を e_α の直交補空間とする．V 上の線形変換 s が，ある $e_\alpha \in V$ が存在して

$$s(v) = v - \frac{2(v,e_\alpha)}{(e_\alpha,e_\alpha)}e_\alpha \quad (v \in V)$$

をみたすとき，s を鏡映と呼ぶ（H_α を s の鏡映面と呼ぶ.）．また，いくつかの鏡映で生成される $O(V)$ の部分群 W を（実）鏡映群と呼ぶ.

有限鏡映群 W を一つ固定し，W に含まれる鏡映の鏡映面全体の集合 $\mathcal{A}(W)$ を（W に関する）鏡映配置という．$H \in \mathcal{A} = \mathcal{A}(W)$ に対して，H を定義する多項式 $p_H \in V^*$ を一つ固定して H の定義多項式と呼ぶ.

$\mathrm{A,B,D}$ 型の既約有限鏡映群に関する鏡映面の全体（$\mathrm{A,B,D}$ 型の鏡映配置）は次で表されることが知られている：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\ell-1} &:= \{H_{ij} = \{x_i - x_j = 0\} \mid 1 \le i < j \le \ell\},\\
\mathcal{B}_\ell &:= \{H_i = \{x_i = 0\} \mid i = 1,\dots,\ell\}\\
&\qquad \cup \left\{H_{ij}^{\pm 1} = \{x_i \pm x_j = 0\} \mid 1 \le i < j \le \ell\right\},\\
\mathcal{D}_\ell &:= \left\{H_{ij}^{\pm 1} = \{x_i \pm x_j = 0\} \mid 1 \le i < j \le \ell\right\}.
\end{aligned}$$

（上から順に A 型，B 型，D 型の鏡映配置である.）

$S = \mathrm{Sym}(V^*) \simeq \mathbb{R}[x_1,\dots,x_\ell]$ を V^* の対称代数とする.

$$D^{(m)}(S) := \bigoplus_{|\alpha|=m} S\partial^\alpha$$

とおいて m 階の微分作用素の加群と呼ぶこととする．特に $m=1$ のとき，$D^{(1)}(S)$ は多項式環の導分加群と呼ばれている．また，鏡映配置 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(W)$ に対して，

$$D^{(m)}(\mathcal{A}) := \left\{\theta \in D^{(m)}(S) \mid \theta(Q(\mathcal{A})S) \subseteq Q(\mathcal{A})S\right\}.$$

を m 階の $\mathcal{A}$-微分作用素の加群と呼ぶ．ただし，$Q(\mathcal{A})$ は W のすべての鏡映面の定義多項式の積である（$Q(\mathcal{A}) = \prod_{H\in\mathcal{A}} p_H$）．$m=1$ のとき，$D^{(1)}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$-導分加群である.（詳しくは [OT] を参照.）

W を鏡映群とする．W は，V 上の多項式関数の集合とみた S に次で作用する：任意の $f \in S$ と $w \in W$ に対して $w \cdot f$ を

$$w \cdot f(v) = f(w^{-1}v) \qquad (v \in V)$$

[*]naka_n@math.sci.hokudai.ac.jp

で定める．また，$f \in S$ が任意の $w \in W$ に対して $w \cdot f = f$ をみたすとき，f は W-不変であるという．S の W-不変な要素全体を S^W とかく．

$\mathcal{A}$-導分加群は鏡映群の不変式の理論と非常に強い関わりを持つ．W は

$$D^{(1)}(S) \simeq S \otimes V$$

にテンソル積とみて作用する．次の事実が Saito によって示されている．

命題 1.1 (cf. Theorem 6.59 in [OT])**.**

$$D^{(1)}(\mathcal{A}) \simeq S \otimes_{S^W} D^{(1)}(S)^W \tag{1.1}$$

ただし，$m \geq 1$ に対して $D^{(m)}(S)^W$ は $D^{(m)}(S)$ の不変な要素の全体である．

一方で，一般の階数の場合には命題 1.1 は成り立たない（W-不変な要素だけでは生成されない）．

本報告書では，A 型，B 型，D 型の鏡映配置に関する階数 2 の微分作用素の加群の基底を構成し，階数 2 の場合に命題 1.1 の拡張が成り立たない反例を挙げる．

また，本報告書の内容は [N1] に掲載予定であり，証明は [N2] に書かれている．

2　行列式等式と Saito-Holm の判定法

この節では，主定理の証明に使う定義と既知の事実を紹介する．また，全体を通して $\ell \geq m$ を仮定する．

$\mathcal{A}$ を鏡映配置とする．$s_m := \binom{\ell+m-1}{m}$，$t_m := \binom{\ell+m-2}{m-1}$ とする．また

$$\{\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s_m)}\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^\ell \mid |\alpha| = m\},$$

とおく．ただし，multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ に対して $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell$ である．微分作用素 $\theta_1, \ldots, \theta_{s_m} \in D^{(m)}(\mathcal{A})$ に対して，その係数行列を

$$M_m(\theta_1, \ldots, \theta_{s_m}) := \left(\theta_i\left(\frac{x^{\alpha^{(j)}}}{\alpha^{(j)}!}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq s_m},$$

と定義する．ただし $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_\ell!$ である．このとき次が成り立つ：

命題 2.1 (Saito-Holm の判定法)**.** $\theta_1, \ldots, \theta_{s_m} \in D^{(m)}(\mathcal{A})$ を（階数によって）斉次な微分作用素とする．このとき

(1) ある定数 $c \in \mathbb{R}^\times$ が存在して $\det M_m(\theta_1, \ldots, \theta_{s_m}) = cQ^{t_m}$ である．

(2) $\theta_1, \ldots, \theta_{s_m}$ は $D^{(m)}(\mathcal{A})$ の S 上の基底をなす．

は同値な命題である．

（命題 2.1 は $m = 1$ のとき，斎藤恭司氏 [S] によって導入され，Holm[H] によって一般の階数 m に拡張された.）また，命題 2.1 は基底の候補となる微分作用素が基底をなすことを証明するときに有効な判定法である．

次に Cauchy-Sylvester の行列等式を紹介する．

$$Z := \{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m \mid 1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m \leq \ell\}.$$

とし，$x_\mu := (x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_m}) \in S^m$ とおく．

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq \ell}$ を ℓ 次正方行列とする．$\mu, \nu \in Z$ に対し，

$$A_{\mu,\nu} := \left(a_{\mu_i,\nu_j}\right)_{1 \leq i,j \leq m}.$$

とおく．また行列の成分の並べ方を一つ決めて

$$A^{(m)} := (\det A_{\mu,\nu})_{\mu,\nu\in Z}\,,$$

とおく．$A^{(m)}$ を m 次の compound matrix と呼ぶ（$A^{(m)}$ は $\binom{\ell}{m}\times\binom{\ell}{m}$ の正方行列である）．

以後，記号の簡略化のため，$f, g\in S$ に対してある定数 $c\in\mathbb{R}^{\times}$ が存在して $f = cg$ であるとき，$f \doteq g$ とかく．次の命題は Cauchy と Sylvester によって与えられた.（例えば [IO, Proposition 3.1] を参照.）

命題 2.2 (Cauchy-Sylvester)．$A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le\ell}$ を正方行列とする．このとき $A^{(m)}$ の行列式は

$$\det A^{(m)} \doteq (\det A)^{\binom{\ell-1}{m-1}} \tag{2.1}$$

である．

次に $D^{(2)}(\mathcal{A})$ の基底の候補となる微分作用素が基底をなすことを示すときに使う行列式の等式を紹介する．それら行列式等式はある行列に命題 2.2 を適用することで得ることが出来る．

まず

$$\Lambda := \{\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathbb{Z}^m \mid \ell - m \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m \ge 0\}\,.$$

とおく．そして，A 型，B 型，D 型の基底を構成するために使う（Laurent）多項式をそれぞれ次で定義する：任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し，

$$s^A_\lambda := \frac{\det(t_i^{\lambda_j+m-j})_{1\le i,j\le m}}{\det(t_i^{m-j})_{1\le i,j\le m}}, \tag{2.2}$$

$$s^B_\lambda := \frac{\det(t_i^{2(\lambda_j+m-j)+1})_{1\le i,j\le m}}{\det(t_i^{2(m-j)})_{1\le i,j\le m}}, \tag{2.3}$$

$$s^D_\lambda := \frac{\det(t_i^{2(\lambda_j+m-j)-1})_{1\le i,j\le m}}{\det(t_i^{2(m-j)})_{1\le i,j\le m}}. \tag{2.4}$$

D 型の場合は λ のとり方によっては，s^D_λ は Laurent 多項式である．次は命題 2.2 から得られる：

命題 2.3.

$$\det\left(s^A_\lambda(x_\mu)\right)_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mu\in Z}} \doteq \left[\prod_{1\le i<j\le\ell}(x_i - x_j)\right]^{\binom{\ell-2}{m-1}},$$

$$\det\left(s^B_\lambda(x_\mu)\right)_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mu\in Z}} \doteq (x_1\cdots x_\ell)^{\binom{\ell-1}{m-1}}\left[\prod_{1\le i<j\le\ell}(x_i^2 - x_j^2)\right]^{\binom{\ell-2}{m-1}},$$

$$\det\left(s^D_\lambda(x_\mu)\right)_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mu\in Z}} \doteq \frac{1}{(x_1\cdots x_\ell)^{\binom{\ell-1}{m-1}}}\left[\prod_{1\le i<j\le\ell}(x_i^2 - x_j^2)\right]^{\binom{\ell-2}{m-1}}.$$

3 主結果

この節では主結果を紹介する．基底を構成するために使う微分作用素は A 型と B 型はほぼ同様に定義されるが，D 型の場合は多少工夫して定める必要がある．まずそれぞれの型に関する微分作用素を定義する．

A 型，B 型の場合の微分作用素を定める．$k = 1,\ldots,\ell$ に対して，

$$h^A_k := (x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_\ell),$$
$$h^B_k := x_k(x_k^2 - x_1^2)\cdots(x_k^2 - x_{k-1}^2)(x_k^2 - x_{k+1}^2)\cdots(x_k^2 - x_\ell^2)$$

とおき，

$$\eta_k^A := h_k^A \frac{1}{m!}\partial_k^m, \quad \eta_k^B := h_k^B \frac{1}{m!}\partial_k^m.$$

と定める．また $\lambda \in \Lambda$ に対して，

$$\theta_\lambda^A := \sum_{|\alpha|=m} s_\lambda^A\left(x_\alpha\right)\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha, \quad \theta_\lambda^B := \sum_{|\alpha|=m} s_\lambda^B\left(x_\alpha\right)\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha.$$

と定める．ただし，multi-index α に対して，

$$x_\alpha := (x_1, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_2, \ldots, x_\ell, \ldots, x_\ell)$$

である（x_α の x_i は α_i 個）．

次に D 型の場合の微分作用素を定める．(D 型の場合に A 型，B 型と多少異なるのはそれぞれを $D^{(2)}(\mathcal{D}_\ell)$ の微分作用素にするためである.）$m = 2$ とする．

$$\Lambda^{'} := \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid \ell - 2 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1\right\},$$
$$\Lambda^{''} := \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid \ell - 2 \geq \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 = 0\right\}.$$

とおいて，$\lambda^{(0)} := (0, 0)$ とおく．さらに $D^{(2)}(\mathcal{D}_\ell)$ の微分作用素を次のように定める：

$$\theta_\lambda^D := \sum_{|\alpha|=2} s_\lambda^D\left(x_\alpha\right)\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \quad \text{if } \lambda \in \Lambda^{'},$$
$$\theta_\lambda^D := (x_1 \cdots x_\ell)\sum_{|\alpha|=2} s_\lambda^D\left(x_\alpha\right)\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \quad \text{if } \lambda \in \Lambda^{''} \setminus \{\lambda^{(0)}\},$$
$$\theta_\lambda^D := (x_1 \cdots x_\ell)^2\sum_{|\alpha|=2} s_\lambda^D\left(x_\alpha\right)\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha \quad \text{if } \lambda = \lambda^{(0)}.$$

$k = 1, \ldots, \ell$ に対して，

$$h_k^D := (x_k^2 - x_1^2)\cdots(x_k^2 - x_{k-1}^2)(x_k^2 - x_{k+1}^2)\cdots(x_k^2 - x_\ell^2)$$

とおいて，

$$\eta_k^D := \frac{h_k^D}{2x_k}\partial_k^2 - (-1)^{\ell-1}\frac{1}{x_k}\theta_{\lambda^{(0)}}^D.$$

と定義する．以上の設定の下で次の主定理が成り立つ．

定理 3.1. $m = 2$ とする．このとき

(1)

$$C_A := \left\{\eta_k^A \mid k = 1, \ldots \ell\right\} \cup \left\{\theta_\lambda^A \mid \lambda \in \Lambda\right\}$$

は $D^{(2)}(\mathcal{A}_{\ell-1})$ の S-基底をなす．

(2)

$$C_B := \left\{\eta_k^B \mid k = 1, \ldots \ell\right\} \cup \left\{\theta_\lambda^B \mid \lambda \in \Lambda\right\}$$

は $D^{(2)}(\mathcal{B}_\ell)$ の S-基底をなす．

(2)

$$C_D := \left\{\eta_k^D \mid k = 1, \ldots \ell\right\} \cup \left\{\theta_\lambda^D \mid \lambda \in \Lambda\right\}$$

は $D^{(2)}(\mathcal{D}_\ell)$ の S-基底をなす．

4 鏡映群の作用

この節では A 型に限定して議論を進める.（ただし，同様の事実が B 型，D 型の場合にも成り立つ.）

$W = W_A$ を A 型の鏡映群（対称群）とする．W は $D^{(m)}(S) \simeq S \otimes S_{(m)}$（$S_{(m)}$ は S の m 次の斉次成分全体）にテンソル積として作用する．また $D^{(2)}(\mathcal{A}_{\ell-1}) \subseteq D^{(m)}(S)$ は W の作用で閉じているので $D^{(2)}(\mathcal{A}_{\ell-1})$ は W-加群である.

ここで，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して θ^A_λ は W-不変な微分作用素である.

一方で，$k = 1, \ldots, \ell$ に対して η^A_k は W-不変ではない．さらに次のことが言える.

定理 4.1. W-加群として

$$\mathbb{R}\eta^A_1 + \cdots + \mathbb{R}\eta^A_\ell \simeq \mathbb{R}t_1 + \cdots + \mathbb{R}t_\ell$$

である．ただし、$t_1, \ldots, t_\ell$ は変数である.

ここで，$\mathbb{R}t_1 + \cdots + \mathbb{R}t_\ell$ は W-加群として 1 次元の既約表現（W-不変な部分）と $\ell - 1$ の既約表現に分解されることがわかる．この事実より定理 3.1 で与えた基底の S-線形和から W-不変な要素で基底を構成することは出来ない．したがって，$D^{(2)}(\mathcal{A}_{\ell-1})$ は W-不変な微分作用素のみからなる基底は存在しない.

5 例

この節では，定理 3.1 で挙げた基底の（3 次元の場合の）係数行列を書き下す.

例 5.1.

Type A

$$\begin{aligned}
&\det M_2\left(\eta^A_1, \eta^A_2, \eta^A_3, \theta^A_{(1,1)}, \theta^A_{(1,0)}, \theta^A_{(0,0)}\right) \\
&= \begin{vmatrix}
(x_1-x_2)(x_1-x_3) & 0 & 0 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_1 & \frac{1}{2} \\
0 & (x_2-x_1)(x_2-x_3) & 0 & \frac{1}{2}x_2^2 & x_2 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & (x_3-x_1)(x_3-x_2) & \frac{1}{2}x_3^2 & x_2 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & x_1x_2 & x_1+x_2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & x_1x_3 & x_1+x_3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & x_2x_3 & x_2+x_3 & 1
\end{vmatrix} \\
&= -(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 \begin{vmatrix}
x_1x_2 & x_1+x_2 & 1 \\
x_1x_3 & x_1+x_3 & 1 \\
x_2x_3 & x_2+x_3 & 1
\end{vmatrix} \\
&\doteq Q(\mathcal{A}_2)^3
\end{aligned}$$

Type B

$$\begin{aligned}
&\det M_2\left(\eta^B_1, \eta^B_2, \eta^B_3, \theta^B_{(1,1)}, \theta^B_{(1,0)}, \theta^B_{(0,0)}\right) \\
&= \begin{vmatrix}
x_1(x_1^2-x_2^2)(x_1^2-x_3^2) & 0 & 0 & \frac{1}{2}x_1^6 & x_1^4 & \frac{1}{2}x_1^2 \\
0 & x_2(x_2^2-x_1^2)(x_2^2-x_3^2) & 0 & \frac{1}{2}x_2^6 & x_2^4 & \frac{1}{2}x_2^2 \\
0 & 0 & x_3(x_3^2-x_1^2)(x_3^2-x_2^2) & \frac{1}{2}x_3^6 & x_2^4 & \frac{1}{2}x_3^2 \\
0 & 0 & 0 & x_1^3x_2^3 & x_1x_2(x_1^2+x_2^2) & x_1x_2 \\
0 & 0 & 0 & x_1^3x_3^3 & x_1x_3(x_1^2+x_3^2) & x_1x_3 \\
0 & 0 & 0 & x_2^3x_3^3 & x_2x_3(x_2^2+x_3^2) & x_2x_3
\end{vmatrix} \\
&\doteq Q(\mathcal{B}_3)^3.
\end{aligned}$$

Type D

$$
\begin{aligned}
&\det M_2\left(\eta_1^D, \eta_2^D, \eta_3^D, \theta_{(1,1)}^D, \theta_{(1,0)}^D, \theta_{(0,0)}^D\right)\\
\doteq&\begin{vmatrix}
\frac{1}{2}(x_1x_2^2+x_1x_3^2-x_1^3) & \frac{1}{2}x_2x_3^2 & \frac{1}{2}x_2^2x_3 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_1x_2x_3 & \frac{1}{2}x_2^2x_3^2\\
\frac{1}{2}x_1x_3^2 & \frac{1}{2}(x_1^2x_2-x_2^3+x_2x_3^2) & \frac{1}{2}x_1^2x_3 & \frac{1}{2}x_2^2 & x_1x_2x_3 & \frac{1}{2}x_1^2x_3^2\\
\frac{1}{2}x_1x_2^2 & \frac{1}{2}x_1^2x_2 & \frac{1}{2}(x_1^2x_3+x_2x_3^2-x_3^3) & \frac{1}{2}x_3^2 & x_1x_2x_3 & \frac{1}{2}x_1^2x_2^2\\
x_2x_3^2 & x_1x_3^2 & x_1x_2x_3 & x_1x_2 & x_3(x_1^2+x_2^2) & x_1x_2x_3^2\\
x_2^2x_3 & x_1x_2x_3 & x_1x_2^2 & x_1x_3 & x_2(x_1^2+x_3^2) & x_1x_2^2x_3\\
x_1x_2x_3 & x_1^2x_3 & x_1^2x_2 & x_2x_3 & x_1(x_2^2+x_3^2) & x_1^2x_2x_3
\end{vmatrix}\\
\doteq&\begin{vmatrix}
\frac{(x_1^2-x_2^2)(x_1^2-x_3^2)}{x_1} & 0 & 0 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_1x_2x_3 & \frac{1}{2}x_2^2x_3^2\\
0 & \frac{(x_2^2-x_1^2)(x_2^2-x_3^2)}{x_2} & 0 & \frac{1}{2}x_2^2 & x_1x_2x_3 & \frac{1}{2}x_1^2x_3^2\\
0 & 0 & \frac{(x_3^2-x_1^2)(x_3^2-x_2^2)}{x_3} & \frac{1}{2}x_3^2 & x_1x_2x_3 & \frac{1}{2}x_1^2x_2^2\\
0 & 0 & 0 & x_1x_2 & x_3(x_1^2+x_2^2) & x_1x_2x_3^2\\
0 & 0 & 0 & x_1x_3 & x_2(x_1^2+x_3^2) & x_1x_2^2x_3\\
0 & 0 & 0 & x_2x_3 & x_1(x_2^2+x_3^2) & x_1^2x_2x_3
\end{vmatrix}\\
\doteq&Q(\mathcal{D}_3)^3
\end{aligned}
$$

参考文献

[H] P. Holm, *Differential Operators on Arrangements of Hyperplanes*, PhD. Thesis, Stockholm University, (2002).

[IO] M. Ito and S. Okada, *An Application of Cauchy-Sylvester's Theorem on Compound Determinants to a BC_n-Type Jackson Integral*, Partitions, Q-Series, and Modular Forms (2012), Volume 23, 145-157.

[N1] N. Nakashima, *Bases for modules of differential operators of order 2 on the classical Coxeter arrangements*, Proceeding of 24th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatrics (FPSAC), Nagoya (2012), to appear.

[N2] N. Nakashima, *Cauchy-Sylvester's theorem on compound determinants and modules of differential operators on Coxeter arrangements.* Preprint. arXiv:1111.6712

[OT] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Grundlehren dermatematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, 1992.

[S] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), 265-291.