# 確率安定性と転移作用素

中野雄史*

京都大学大学院人間・環境学研究科

## 1　問題の背景：SRB 測度（物理測度）の安定性

コンパクトで滑らかなリーマン多様体 $M$ 上の写像 $f: M \to M$ の $n$ 回合成 $f^n$ による力学系 $\{f^n\}_{n\geq 0}$ を考える．多様体 $M$ 上の確率測度 $\mu_0$ が力学系 $f$ の SRB 測度であるとは, 任意の連続関数 $\varphi: M \to \mathbb{R}$, および Lebesgue 測度 $m$ についてほとんどすべての点 $x \in M$ で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \int \varphi d\mu_0$$

が成立することである. これは軌道平均という決定論的な量と, 確率平均という確率論的な量に関係を付けることができるということを意味し, この点において SRB 測度の存在は統計力学の基礎付けなどにおいて重要な役割を果たしており, 物理的に重要な力学系の SRB 測度の存在証明は, エルゴード理論の中心的な問題の一つとなっている.（このため SRB 測度は物理測度とも呼ばれる）

一方, 一般的にそのような物理モデルは理想化されたものであるため, 現実的には微小摂動下でも同様の等式が成り立つことが望まれる. この問題の定式化としては様々な形が考えられるが，現在最も広く研究されている形のものをある程度抽象化して定式化すると以下のようになる：$\mathcal{S} = \mathcal{S}(M, M)$ をリーマン多様体 $M$ 上の写像からなる, 写像の合成について閉じた完備可分距離空間とし, $\mathcal{S}_\epsilon(f)$ を $f$ の $\epsilon$-近傍, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする. さらに $\{f_n\}_{n\geq 0}$ を $\Omega$ 上の同分布な $\mathcal{S}_\epsilon(f)$-値確率過程とする. この確率過程たちの 0 から $n-1$ 番目までの合成

$$f^{(n)}: \Omega \to \mathcal{S}, \quad f^{(n)}(\omega) := f_{n-1}(\omega) \circ f_{n-2}(\omega) \circ \cdots \circ f_0(\omega)$$

による $\mathcal{S}$-値確率過程 $\{f^{(n)}\}_{n\geq 0}$（写像 $f$ の微小摂動下での”ランダムな力学系”）について SRB 測度と類似の測度の存在を考える. つまり, 多様体 $M$ 上の確率測度 $\mu_\epsilon$ が存在して, 任意の連続関数 $\varphi: M \to \mathbb{R}$ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^{(i)}(\omega)(x)) = \int \varphi d\mu_\epsilon, \quad \mathbb{P} \times m - a.s.$$

が成り立つとき，$\mu_\epsilon$ を（ランダムな）SRB 測度と呼ぶ.

さて，元の力学系が SRB 測度を持つとき，微小摂動下での力学系も SRB 測度を持つのだろうか？また，この測度は $\epsilon$ を 0 に近づけていったときに元の SRB 測度 $\mu_0$ に収束するのであろうか？

これらの問題をあわせて確率安定性の問題といい, その重要性から多数の研究がなされてきた. しかしその研究のほとんどは, $\{f_n\}_{n\geq 0}$ が独立な場合のものであり, より一般的な摂動に関しての確率安定性の研究が望まれていたが, 簡単な力学系を除いてはほとんど研究がなされていなかった. 報告者は, 近年発展の著しい関数解析的な方法を用いることで, より一般的な摂動下での確率安定性の研究に関するある程度体系だった方法を与えることを目標としており，本報告（ないし講演）ではその部分的な結果の報告を目標している.

*nakano@math.h.kyoto-u.ac.jp

## 2 主定理

$f : M \to M$ は次のいずれかとする；

（１）$\mathcal{C}^2$-拡大写像

$f$ は $\mathcal{C}^2$-級で，定数 $\lambda > 1$ が存在して十分大きい任意の $n \geq 1$ およびすべての $x \in M, v \in T_xM$ について

$$\|Df^n(x)v\| \geq \lambda^n\|v\|;$$

（２）$\mathcal{C}^2$-**Anosov 微分同相写像**

$f$ は $\mathcal{C}^2$-級で，定数 $\lambda > 1$ と接ベクトル空間の不変な分解 $TM = E^u \oplus E^s$ が存在して（つまり任意の $x \in M$ について $Df(x)E^\sigma(x) \subset E^\sigma(f(x))$，$\sigma = u, s$），十分大きい任意の $n \geq 1$ およびすべての $x \in M$ について

$$\|Df^n(x)v\| \geq \lambda^n\|v\|, \quad v \in E^u(x),$$

$$\|Df^{-n}(x)v\| \geq \lambda^n\|v\|, \quad v \in E^s(x).$$

さらに $f$ は位相推移的であるとする．つまり，任意の空でない $M$ の部分集合 $U, V$ について，$f^n(U) \cap V = \emptyset$ となる $n \geq 1$ が存在すると仮定する．

$X$ 上の確率測度 $\mu_0$ が $f$-不変であるとは, 任意の Borel 集合 $A$ について $\mu_0(f^{-1}A) = \mu_0(A)$ を満たすことを言う．$f$-不変な確率測度 $\mu_0$ がエルゴード的であるとは，任意の $\mu_0$-可積分関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$, および $\mu_0$ についてほとんどすべての点 $x \in M$ で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \int \varphi d\mu_0$$

が成立することを言う．次の定理が知られており，最近のものも含めて様々な証明が存在する．([GL])

**定理 2.1** *$f$ は唯一つエルゴード的で $f$-不変な SRB 測度を持つ．*

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とし, 変換 $\theta : \Omega \to \Omega$ は可測, 全単写, 逆も可測とする．このような $(\theta, \mathbb{P})$ をベース力学系と呼ぶ．簡単のため, $\omega_n = \theta^n\omega, n \in \mathbb{Z}$ と書き, 以下すべてのベース力学系は測度論的に推移的であるとする．つまり, 任意の $\theta$-不変な Borel 集合 $A$ (i.e., $\theta^{-1}A = A$) は, $\mathbb{P}(A) = 0$ もしくは 1 であるとする．可測写像 $F : \mathbb{Z} \times \Omega \times M \to M, (n, \omega, x) \mapsto \tilde{F}(n, \omega)(x)$ が, ベース力学系 $(\theta, \mathbb{P})$ と相空間 $M$ 上の RDS(Random Dynamical System) であるとは, 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ と $\omega \in \Omega$ について, 次のコサイクル性を満たすことを言う:

$$F(0, \omega) = \mathrm{id}_M,\ F(m+n, \omega) = F(m, \omega_n) \circ F(n, \omega).$$

**注意 2.2** 記号の濫用であるが，$\omega$ から $F(1, \omega)$ へ可測写像も $F$ と書く．このとき三組み $(\theta, \mathbb{P}, F)$ は一対一対応で *RDS* を定めるので，これも *RDS* と呼ぶ．

$M$ 上の写像たちからなる, 写像の合成について閉じた完備可分距離空間 $\mathcal{S}$ について, $F(\Omega) \subset \mathcal{S}$ と仮定する．$f_n := F \circ \theta^n$ とする．このとき, 次が成り立つ:

**補題 2.3** *$\{f_n\}_{n\geq 0}$ は $\Omega$ 上の同分布な $\mathcal{S}-$ 値確率過程となる．*

定義より明らかに, $\Omega \times M$ からそれ自身への歪積写像 $\tilde{F}(\omega, x) := (\theta\omega, F(\omega)(x))$ について,

$$\tilde{F}^n(\omega, x) = (\theta^n\omega, F(n, \omega)(x))$$

となる．このファイバー成分（=RDS）$F(n, \omega)$ を $f^{(n)}(\omega)$ と書く．

確率測度の族 $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (以後混乱のない限り $\mu_\omega$ とだけ書く) が $F$-不変であるとは, 任意の Borel 集合 $A = \bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\} \times A_\omega$ について, 確率測度 $\mathbb{P}$ に関してほとんど確実に

$$\mu_{\omega_{-1}}(F(\omega_{-1})^{-1}A_\omega) = \mu_\omega(A_\omega)$$

を満たすことを言う．明らかに, $\mu_\omega$ が $F$-不変であることと $\mathbf{P} := \mu_\omega \times \mathbb{P}$ が $\tilde{F}$-不変であることは同値である．

不変測度 $\mu_\omega$ が（ランダムな）SRB 測度であるとは, 任意の連続関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^{(i)}(\omega)(x)) = \int \varphi d(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{\omega_i}), \quad m \times \mathbb{P}-\text{a.s.}$$

が成立することを言う．Birkhoff のエルゴード定理より測度論的に推移的であればエルゴード的であるので, 上の式は $\int \varphi d\bar{\mu}$，$\bar{\mu} = \int \mu_\omega d\mathbb{P}$ に等しく，結果的にこれは $\omega$ に関しても一定の値をとる．

また, 不変測度 $\mu_\omega$ がエルゴード的であるとは, 上の SRB 測度の定義において連続関数を $\bar{\mu}$-可積分関数, $m \times \mathbb{P}$-a.s. を $\mathbf{P}$-a.s. にかえた条件を満たすことを言う．

RDS の族 $(\theta, \mathbb{P}, F_\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ が，(1)$\omega$ について本質的に一様に $\epsilon$ に関して 0 で上半連続，つまり，$\mathcal{S}$ の距離 $d_{\mathcal{S}}(\cdot,\cdot)$ について $\epsilon \to 0$ のとき

$$\text{ess.sup}\{d_{\mathcal{S}}(F_0(\omega), F_\epsilon(\omega)) | \omega \in \Omega\} \to 0,$$

(2)$F_0(\omega) = f$, $\mathbb{P}$-a.s. を満たすときこれを $f$ の $\mathcal{S}$-微小摂動と呼ぶ．

**定理 2.4** 任意の $\mathcal{C}^2$-微小摂動 $(\theta, \mathbb{P}, F_\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ について，

（１）十分小さい任意の $\epsilon$ について $F_\epsilon$ は唯一つエルゴード的で $F_\epsilon$-不変な *SRB* 測度 $\{\mu_\omega^{(\epsilon)}\}_{\omega \in \Omega}$ を持つ;

（２）$\bar{\mu}_\epsilon := \int \mu_\omega^{(\epsilon)} d\mathbb{P}$ は $f$ の唯一つのエルゴード的で $f$-不変な *SRB* 測度 $\mu_0$ に弱収束する．

## 3 証明のアイディア：転移作用素の擬コンパクト性の安定性

主定理の証明において中心的な役割を果たす道具は転移作用素である．転移作用素 $L = L_f$ とは,（形式的には）力学系 $f : M \to M$ による引戻しの共役作用素として定義される．つまり, $E = E(M, \mathbb{R})$ を $f$ の引戻しに対して不変な実数値関数たちからなる Banach 空間とすると, 転移作用素 $L$ はその共役空間 $E'$ からそれ自身への作用素として,

$$\int L\varphi \cdot \psi dm = \int \varphi \cdot \psi \circ f dm, \quad \psi \in E$$

を満たすものとして（可能であれば）定義される．

$\nu$ が絶対連続な測度であるとき，測度の送出し $f_*$ について $\frac{d(f_*\nu)}{dm} = L(\frac{d\nu}{dm})$ であり，この意味で転移作用素 $L$ は密度関数の送出しに対応しており, それゆえその不動点 (固有値 1 の固有関数) は $f$ の不変測度 $\mu_0$ の密度関数となる．さらに非常に形式的に射影分解を行うと

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i \delta_x = \mu_0 + O(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|L^i|_\Sigma\|) m$$

を得る．ただし $\delta_x$ は Dirac のデルタ関数であり，$E' = \mathbb{R}\rho_0 \oplus \Sigma$（$\rho_0$ は転移作用素 $L$ の不動点，$\mu_0 = \rho_0 dm$）という $E'$ の直和分解が存在すると仮定している．この式に $\varphi$ をかけて積分し $n$ について極限をとれば, 左辺が軌道平均, 右辺第 1 項が確率平均になるので, 結局右辺第 2 項が 0 に収束すれば $\mu_0$ は SRB 測度となる．よって, 十分適切な Banach 空間 $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ 上で $L$ が RPF スペクトル構造 (Ruelle-Perron-Frobenius) を持つとき, すなわち $L$ のスペクトル半径が 1 で擬コンパクト, 絶対値 1 の固有値は 1 のみでその重複度は 1 であるとき, $f$ は唯一つエルゴード的で $f$-不変な SRB 測度を持つ．

同様に, 確率安定性についてもスペクトル構造の言葉で対応をつけることが可能である．$L$ は RPF スペクトル構造を持つとし, その本質的スペクトル半径を $\lambda < 1$ とする．$n \geq 1$ について $L_\omega^n := L_{f^{(n)}(\omega)}$ とする．このとき, $\mathbb{P}$-a.s. で

$$\|L_\omega^n - L^n\| \leq (\lambda - \epsilon)^n \tag{3.1}$$

が成り立てば, これは $L_\omega$ の "スペクトル構造" が $L$ に十分近いことを意味するので, RPF スペクトル構造もある程度引き継がれることを意味する．その結果, $f$ と同様に, $F$ も唯一つエルゴード的で $f$-不変な SRB 測

度 $\mu_\omega^{(\epsilon)}$ を持ち, この密度関数が固有値 1 の固有関数に対応するので, 固有空間の摂動に対する安定性の結果として確率安定性を得ることができる．つまり，不等式 (3.1) はある程度抽象的な（関数解析的な）確率安定性の十分条件であり，また実際，この条件（もしくはもう少し弱くしたもの）を与えられた力学系と微小摂動が満たすことを確認することにより確率安定性を証明するという流れは，少なくとも本報告中の力学系について適用可能であり，さらにより一般的な ” 双曲的な ” 力学系についても適用可能であると期待される．

ただし $L_\omega^n$ は何らかの線形作用素を $n$ 回合成したものではないので，” 固有関数 ” の意味を考える必要がある．また, 実際は不等式 (3.1) はかなり強い条件であり, より複雑な力学系についてはこの条件を満たすことは望めない. それゆえ, 当初の目標であったある程度体系だった確率安定性の研究を完遂するためには，より複雑な力学系についてもこの形の議論が適用できるように, より弱い形で条件を考えなおす必要がある. これらの問題は [N] で解決されている．以下，この十分条件を用いた議論を（ある程度）正確に述べて，本報告を終える．

$(E, \|\cdot\|)$ を十分 ” 適切な ” $M$ 上の位数 2 の実数値超関数たちからなる Polish, Banach 空間とし，より弱いノルム $|\cdot|$（任意の $x \in E$ について $|x| \leq \|x\|$）が存在して，$\|\cdot\|$ による単位球が $|\cdot|$ の位相でコンパクトであるとする．$\mathbb{L}^\infty(E)$ を $(\Omega, \mathbb{P})$ 上の $E$-値 Bochner-Lebesgue 空間とする．つまり，

$$B(E) = \{\varphi : \Omega \to E,\ measurable :\ \|\varphi\| := \int \|\varphi(\omega)\| d\mathbb{P} < \infty\}$$

を確率 1 で一致すれば同じ関数とみなすという同値関係で割った空間である．

$$K(E) = \{\varphi \in \mathbb{L}^\infty(E)\ : \exists I_\varphi \in \mathbb{R}, \int \varphi(\omega) dm = I_\varphi,\ \mathbb{P} - a.s.\}$$

と定義する．この空間の上に転移作用素 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ を次によって定義する;

$$(\mathcal{L}_0\varphi)(\omega) = L_f[\varphi(\theta^{-1}\omega)];$$

$$(\mathcal{L}_\epsilon\varphi)(\omega) = L_{\epsilon,\theta^{-1}\omega}[\varphi(\theta^{-1}\omega)].$$

ただし $L_{\epsilon,\omega} = L_{F_\epsilon(\omega)}$．$\mathcal{L}_\epsilon$ は $\tilde{F}_\epsilon$ による引戻しと $\mathbb{L}^2_{\mathbb{P}\times m}$-共役であり，その不動点に $m$（$\mathbb{P} \times m$, $resp.$）をかけたものは $F_\epsilon$（$\tilde{F}_\epsilon$, $resp.$）の不変測度となる．また，$\mathcal{L}_0$ は次の特徴を持つ;

**定理 3.1** $L_f$ が $E$ で $RPF$ スペクトル構造を持つとき，$\mathcal{L}_0$ も $K(E)$ で $RPF$ スペクトル構造を持つ．

確率安定性の関数解析的な十分条件を与える；定数 $C_0 > 0$ および上半連続な正値単調関数 $\tau : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\tau_\epsilon \to 0 (\epsilon \to 0)$ が存在して以下を満たす．十分大きな任意の $n \geq 1$ に対して $\epsilon(n) > 0$ が存在して, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon(n)$ について

$$|\mathcal{L}_\epsilon^n| \leq C_0, \tag{3.2}$$

$$\|\mathcal{L}_\epsilon^n\varphi\| \leq C_1\lambda^n\|\varphi\| + C_2|\varphi|, \quad \varphi \in K(E), \tag{3.3}$$

$$|\mathcal{L}_\epsilon^n\varphi - \mathcal{L}_0^n\varphi| \leq \tau_\epsilon\|\varphi\|, \quad \varphi \in K(E). \tag{3.4}$$

上 2 つの不等式を LY 型不等式（Lasota-Yorke）と呼び，下の不等式を KL 型不等式（Keller-Liverani）と呼ぶことにする．

**定理 3.2** $LY$ 型不等式および $KL$ 型不等式が成り立つとき，十分小さい任意の $\epsilon$ について $\mathcal{L}_\epsilon$ は $K(E)$ で $RPF$ スペクトル構造を持つ．さらに固有値 1 の固有関数 $\rho_\epsilon$ は $K(E)$ で $\mathcal{L}_0$ の固有値 1 の固有関数 $\rho_0$ に収束する．

先に見てきたように，$\mathcal{L}_\epsilon$ の RPF スペクトル構造は SRB 測度 $\{\mu_\omega^{(\epsilon)}\}_{\omega\in\Omega}$ の存在を意味し，その密度関数が固有値 1 の固有関数であったので，結局これは主定理 2.4 を結論する．

# 謝辞

今回は，このようなセミナーで講演をする機会を与えて下さり，関係者の皆様に心からお礼申し上げます．また様々なご意見等をいただき有意義な時間を過ごせました．参加者の方々にも改めて感謝いたします。

# 参考文献

[GL] Gouëzel, S.,Liverani, C., *Banach spaces adapted to Anosov systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **26** (2006), 189-217.

[N] Nakano, Y, *Stability of the spectra of fibre expanding maps*, in preparation.