Cauchy-Fantappiè形式と特異積分作用素

永田　義一[*]

名古屋大学　多元数理科学研究科　M 2

1　はじめに

城崎新人セミナーでは一時間の発表の機会をいただいた．当初, Cauchy-Fantappiè 形式について話した後その特異積分作用素について述べる予定であったが, 時間の関係でそこまで話すのは無理だと判断し Cauchy-Fantappiè 形式の構成を丁寧に話した．それでも要領が悪かったせいで, 最後の方は雑な話になったので報告書では計算も含めて丁寧に書くことにする．第２章では Cauchy-Fantappiè 形式の一般論を述べる．第３章では強擬凸領域の場合の Cauchy-Fantappiè 形式の正則化について述べる．

発表の機会を準備していただいた城崎新人セミナー委員の皆様にお礼申し上げます．

2　Cauchy-Fantappiè 形式

$D \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域で滑らかな境界 $\partial D \in C^\infty$ を持つとする．U を ∂D の近傍とする．$w \in D$ を助変数とする $z \in U$ に関する $(1,0)$ 形式

$$W(w,z) := \sum_{j=1}^{n} u_j(w,z) dz_j, \quad u_j \in C^\infty(D \times U)$$

は $w \in D,\ z(\neq w) \in U$ に対して

$$\langle W, z-w \rangle := \sum_{j=1}^{n} u_j(w,z)(z_j - w_j) = 1 \tag{2.1}$$

を満たすとする．

$$\Omega_0(W) := (2\pi i)^{-n} W \wedge (\overline{\partial}_z W)^{n-1}$$

と定める．$\Omega_0(W)$ は $w \in D$ を助変数とする $z \in U$ に関する $(n, n-1)$ 形式である．

定理 2.1. $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$ に対して

$$f(w) = \int_{z \in \partial D} f(z) \Omega_0(W) \quad (w \in D)$$

が成立する．

$\Omega_0(W)$ を Cauchy-Fantappiè 形式という．W を構成する関数の組 $\{u_j\}$ は式 (2.1) をみたすものならば, どのようにとっても良い．しかも $\{u_j\}$ は $\overline{D}$ 上で定義されてなくとも, ∂D の近傍で定義されていればよいのである．この定理の証明は本質的にストークスの定理による．いくつかに分けて示そう．

[*]m10035y@math.nagoya-u.ac.jp

補題 2.2.

$$d_z\Omega_0(W)=\overline{\partial}_z\Omega_0(W)=0$$

証明.

$$d_z\Omega_0(W)=\overline{\partial}_z\Omega_0(W)=(2\pi i)^{-n}(\overline{\partial}_z W)^n$$

である. 一方

$$\overline{\partial}_z\langle W,z-w\rangle=\sum_{j=1}^n\overline{\partial}_z u_j(w,z)(z_j-w_j)=0$$

であるから, $z\neq w$ ならば $\overline{\partial}_z u_1,\cdots,\overline{\partial}_z u_n$ は, 線形従属である. したがって,

$$(\overline{\partial}_z W)^n=0$$

となる. □

補題の証明より (1,0) 形式 W が式 (2.1) をみたすように正規化されていることが重要で, このとき Cauchy-Fantappiè 形式は閉形式となる. このことは Cauchy-Fantappiè 形式が再生性をもつ本質的なカギとなる.

定理をまず, 特別な場合で示そう:
$\beta:=|z-w|^2$ とおく. $z\neq w$ のとき

$$\begin{aligned}B(w,z) &:= \partial\beta/\beta\\ &= \frac{1}{|z-w|^2}\sum_{j=1}^n(\overline{z}_j-\overline{w}_j)dz_j\end{aligned}$$

と定義すると, B は

$$\langle B,z-w\rangle=1$$

を満たす.

$$K_0(w,z):=(2\pi i)^{-n}B\wedge(\overline{\partial}_z B)^{n-1}$$

と定める. このとき

命題 2.3. $f\in\mathcal{O}(D)\cap C^1(\overline{D})$ に対して

$$f(w)=\int_{z\in\partial D}f(z)K_0(w,z)\quad(w\in D)$$

が成立する.

K_0 を Bochner-Martinelli 形式と呼ぶ.
注意　一般に関数 g に対して $gW\wedge\overline{\partial}(gW)=g^2W\wedge\overline{\partial}W$ である.

証明. $f\in\mathcal{O}(D)$ ならば,

$$d_z(f(z)K_0(w,z))=\overline{\partial}_z(f(z)K_0(w,z))=0$$

である．ストークスの定理を二回もちいると

$$\begin{aligned}\int_{z\in\partial D} f(z)K_0(w,z) &= \int_{z\in\partial B_\epsilon(w)} f(z)K_0(w,z)\\ &= (2\pi i)^{-n}\int_{z\in\partial B_\epsilon(w)} f(z)\frac{1}{|z-w|^{2n}}\partial_z\beta\wedge(\overline{\partial}_z\partial_z\beta)^{n-1}\\ &= (2\pi i)^{-n}\epsilon^{-2n}\int_{z\in\partial B_\epsilon(w)} f(z)\partial_z\beta\wedge(\overline{\partial}_z\partial_z\beta)^{n-1}\\ &= (2\pi i)^{-n}\epsilon^{-2n}\int_{z\in B_\epsilon(w)} f(z)(\overline{\partial}_z\partial_z\beta)^{n}\\ &= (2\pi i)^{-n}n!\epsilon^{-2n}\int_{z\in B_\epsilon(w)} f(z)d\overline{z}_1\wedge dz_1\cdots d\overline{z}_n\wedge dz_n\\ &= \pi^{-n}n!\epsilon^{-2n}\int_{z\in B_\epsilon(w)} f(z)dx_1dy_1\cdots dx_ndy_n\end{aligned}$$

を得る．最後の式に現れる係数の逆数 $\pi^n\epsilon^{2n}/n!$ は半径 ϵ の $2n$ 次元球の体積である．第一の等号は十分小さな $\epsilon>0$ を任意にとれるから $\epsilon\to 0$ としてよく, 平均値の定理より

$$\int_{z\in\partial D} f(z)K_0(w,z) = f(w)$$

を得る．

□

定理 2.1 の証明をしよう．方法は Bochner-Martinelli 形式を用いて Cauchy-Fantappiè 形式に細工を施しておくのである．定理は Cauchy-Fantappiè 形式が閉形式であることからえられる．

証明．(定理 2.1 の証明)

$w\in D$ を固定して $U\cap B_\epsilon(w)=\emptyset$ となるように U と $\epsilon>0$ を十分小さくとっておく．$\chi\in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ を ∂D 上で $\chi=1$ であり $\mathrm{supp}\chi\subset U$ となるものとする．

$$\tilde{W}(w,z) := \chi(z)W(w,z)+(1-\chi(z))B(w,z)$$

とおく．$\tilde{W}(w,\cdot)$ は ∂D 上では $W(w,\cdot)$ であり $\overline{B}_\epsilon(w)$ の近傍で $B(w,\cdot)$ である．作り方から $z(\neq w)\in\overline{D}$ に対して

$$\langle\tilde{W}, z-w\rangle = 1$$

である．したがって

$$\Omega_0(\tilde{W}) := (2\pi i)^{-n}\tilde{W}\wedge(\overline{\partial}_z\tilde{W})^{n-1}$$

と定義すると, $\Omega_0(\tilde{W})$ は閉形式である．ストークスの定理と命題 2.3 より

$$\begin{aligned}\int_{z\in\partial D} f(z)\Omega_0(W) &= \int_{z\in\partial D} f(z)\Omega_0(\tilde{W})\\ &= \int_{z\in\partial B_\epsilon(w)} f(z)\Omega_0(\tilde{W})\\ &= \int_{z\in\partial B_\epsilon(w)} f(z)K_0(w,z)\\ &= f(w).\end{aligned}$$

これで定理が証明された． □

C-F 形式の構成に関する注意　$z\in U,\ w\in D$ に対して $W(w,z)\neq 0$ なら W を $W/\langle W, z-w\rangle$ で置き換えれば $\langle\frac{W}{\langle W,z-w\rangle}, z-w\rangle=1$ となる．さらにこのことから, W は $z\in\partial D,\ w\in D$ に対して $\langle W, z-w\rangle=1$ を満たせば良い．∂D の近傍 U は便宜的に取っているのである．

3　強擬凸領域における C-F 形式の正則化

$D \subset\subset \mathbb{C}^n$ を滑らかな境界を持つ強擬凸領域とする．この意味は，D の定義関数 $\lambda \in C^\infty(\overline{D})$ で $\overline{D}$ 上強多重劣調和であるものが存在する．すなわち，$D = \{\lambda < 0\}$，$\partial D = \{\lambda = 0\}$ かつ ∂D 上で $d\lambda \neq 0$ であり，ある正数 C が存在して任意の $z \in \overline{D}$，$w \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} w_i \overline{w}_j \geq C|w|^2$$

が成り立つような λ が存在する． このとき，実数 $\epsilon\,(|\epsilon| << 1)$ に対して，λ の二階偏導関数の連続性より $D_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^n : \lambda < \epsilon\}$ は強擬凸領域である．

今，十分小さな正数 ϵ を固定しておく．この λ を用いて，D の Cauchy-Fantappiè 形式を生成するもので，$z \in \partial D$ の近傍で助変数 w に関して正則である (1,0) 微分形式 L^D を構成しよう．

$$F(w,z) := 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda(z)}{\partial z_i}(z_i - w_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_i \partial z_j}(z_i - w_i)(w_j - z_j)$$

を Levi 多項式とよぶ．これは λ のテーラー展開の一部で

$$\begin{aligned}
\lambda(w) = \lambda(z) \quad &+ \quad \mathrm{Re}\{2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda(z)}{\partial z_i}(w_i - z_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_i \partial z_j}(w_i - z_i)(w_j - z_j)\} \\
&+ \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(w_i - z_i)(\overline{w}_j - \overline{z}_j) + o(|z-w|^2) \\
= \lambda(z) \quad &- \quad \mathrm{Re}F(w,z) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(w_i - z_i)(\overline{w}_j - \overline{z}_j) + o(|z-w|^2)
\end{aligned}$$

である．λ の強多重劣調和性よりある $\delta, c > 0$ が存在して $z \in \partial D, |z-w| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}F(w,z) \quad &= \quad -\lambda(w) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(w_i - z_i)(\overline{w}_j - \overline{z}_j) + o(|z-w|^2) \\
&\geq \quad -\lambda(w) + c|z-w|^2
\end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_i(w,z) \quad &:= \quad 2\frac{\partial \lambda}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j}(w_j - z_j) \\
\tilde{G}(w,z) \quad &:= \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}_i(w,z) dz_i
\end{aligned}$$

とおくと

$$F(w,z) = \langle \tilde{G}, z-w \rangle$$

である．

$\chi \in C^\infty([0,\infty))$ を $0 \leq \chi \leq 1$ で $\chi(t) = 1,\ (t \leq \frac{\delta}{4})$，$\chi(t) = 0,\ (t \geq \frac{\delta}{2})$ なるものとし，$\phi(w,z) := \chi(|w-z|)$ とおく．

$$\begin{aligned}
g_i(w,z) \quad &:= \quad \phi(w,z)\tilde{g}_i(w,z) + (1 - \phi(w,z))(\overline{z}_i - \overline{w}_i) \\
G(w,z) \quad &:= \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(w,z) dz_i
\end{aligned}$$

と定義する. $z \in \partial D,\ w \in D$ に対して

$$\Phi(w,z) := \langle G, z-w \rangle \neq 0 \tag{3.1}$$

であり, $z \in \partial D, w \in D_\epsilon, |z-w| < \frac{\delta}{4}$ ならば w に関して正則である.

$$L_D := \frac{G}{\Phi}$$

とおく. これで, 目的のものを構成した.

$$\Omega_0(L_D) = (2\pi i)^{-n} L_D \wedge (\overline{\partial}_z L_D)^{n-1}$$

は $\overline{D} \times \partial D \setminus \{(z,z)|z \in \partial D\}$ 上で定義された滑らかな係数をもつ C-F 形式である.

∂D 上のルベーグ測度を $d\sigma$ とし

$$\Omega_0(L_D) = E(w,z)d\sigma_z$$

とかく. $\overline{\partial}_w E(w,z)$ は点 $z \in \partial D$ の近傍 $|w-z| < \delta/4$ で 0 とおけば $C^\infty_{0,1}(D_\epsilon \times \partial D)$ の元に拡張される.

強擬凸領域では次の定理が成り立つ.

定理 3.1. Ω が強擬凸のとき, 次の性質をもつ有界線形作用素 $T : H^2_{(0,1)}(\Omega) \longrightarrow E^2_{(0,0)}(\Omega)$ が存在する:
任意の $f \in H^2_{(0,q)}(\Omega)$ に対して $\overline{\partial}(Ef) = f$. ここで
$H^2_{(0,1)}(\Omega) := \{f \in L^2_{(0,1)}(\Omega)|\overline{\partial}f = 0\}$,
$E^2_{(0,1)}(\Omega) := H^2_{(0,1)}(\Omega)^\perp$.

$$C(w,z) = -T_w \overline{\partial}_w E(w,z)$$

とおく. C は $\overline{\partial}_w C = -\overline{\partial}_w E$ を満たす $C^\infty(V_0 \times \partial D)$ の元である.

$$H(w,z) := E(w,z) + C(w,z)$$

とおくと H は $\overline{D} \times \partial D \setminus \{(z,z)|z \in \partial D\}$ 上でなめらかであり, $z \in \partial D$ を止めるごとに $H(\cdot,z)$ は $\overline{D} \setminus \{z\}$ 上で正則である. H を Kerzman-Stein 核という.

$\Omega_0(L_D) = E(w,z)d\sigma_z$ は C-F 形式であった. すなわち正則関数の再生性をすでに備えた核である.

定理 3.2. $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ に対して

$$f(w) = \int_{z \in \partial D} f(z)H(w,z)d\sigma_z \ (w \in D)$$

が成立する.

証明.

$$\int_{z \in \partial D} f(z)C(w,z)d\sigma_z = 0$$

を示せばよい.

まず, $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$ とする.

$$\int_{z \in \partial D} f(z)C(w,z)d\sigma_z = \int_{z \in \partial D} f(z)T^{V,V_0}\overline{\partial}_w E(w,z)d\sigma_z = T^{V,V_0}_w \int_{z \in \partial D} f(z)\overline{\partial}_w E(w,z)d\sigma_z$$

となる. D_ϵ 上で

$$\int_{z \in \partial D} f(z)\overline{\partial}_w E(w,z)d\sigma_z = 0$$

となることをいう. 実際, $\overline{\partial}_w E(w,z)d\sigma_z$ は $|w-z|<\delta/4$ ならば 0 で, $|w-z|>\delta/4$ ならば $\overline{\partial}_w\Omega_0(L_D)$ であるから, 補題**??**を用いると

$$\begin{aligned}\int_{z\in\partial D} f(z)\overline{\partial}_w E(w,z)d\sigma_z &= \int_{z\in\partial D,|w-z|>\delta/4} f(z)\overline{\partial}_w\Omega_0(L_D)\\ &= -\int_{z\in\partial D,|w-z|>\delta/4} f(z)\overline{\partial}_z\Omega_1(L_D)\\ &= -\int_{z\in\partial D} f(z)\overline{\partial}_z\Omega_1(L_D)\\ &= -\int_{z\in\partial D} d_z(f(z)\Omega_1(L_D))=0\end{aligned}$$

である. ここで, $\overline{\partial}_z\Omega_1(L_D)$ は $|w-z|<\delta/4$ ならば 0 であることをもちいた.

$f\in\mathcal{O}(D)\cap C(\overline{D})$ のときを示す. $\epsilon<0$ が十分 0 に近いとき, 連続性より L_D は ∂D_ϵ 上の (1,0) 形式で, $\Omega_0(L_D)$ は D_ϵ の C-F 形式である. 任意の $w\in D$ に対して $\epsilon<0$ を $w\in D_\epsilon$ となるようにとる. このとき, $f\in\mathcal{O}(D_\epsilon)\cap C^\infty(\overline{D}_\epsilon)$ であるから

$$f(w)=\int_{z\in\partial D_\epsilon} f(z)H(w,z)d\sigma_z$$

が成り立ち, $\epsilon\to 0$ とすると f,H の連続性より

$$f(w)=\int_{z\in\partial D} f(z)H(w,z)d\sigma_z$$

が成立する. □

この定理から Kerzman-Stein 核の補正項 C は正則関数との積分に対して寄与がないことが分かった. Kerzman-Stein 核の再生性は完全に主要項 E によっている.

参考文献

[KS] N. Kerzman and E. M. Stein, *The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappiè kernels.*, Duke Math., **J. 45.** (1978), 197–224.

[R] M. Range, Holomorphic functions and integral representations in several complex variables. Graduate Texts in Mathematics, 108. Springer-Verlag.