単体的セル複体の面の数え上げについて

村井　聡*

山口大学　理学部

序

単体的セル複体とは, 各セルが単体であるような正則な CW-複体[1]のことである. 本稿では単体的セル複体の面の個数に関する色々な研究結果について紹介する.

1　単体的セル複体と simplicial poset

単体的セル複体は組合せ論的に見ると simplicial poset と呼ばれる特殊な poset (半順序集合のこと) と見なすことができる. 本稿ではこの組合せ論的な立場から単体的セル複体を導入する.

有限な poset P が **simplicial** であるとは, 以下の二つの条件を満たす時に言う:

(i) P が最小元 $\hat{0}$ を持つ.

(ii) 任意の元 $\sigma \in P$ に対し, 区間 $[\hat{0}, \sigma] = \{\tau \in P : \hat{0} \leq \tau \leq \sigma\}$ が Boolean 代数となる.

Boolean 代数とは, 有限集合の部分集合全体からなる集合に包含関係で順序関係を入れることでできる poset のことである (図 1 を見よ). もう少し幾何学的に言うと, Boolean 代数とは単体の face poset のことである.

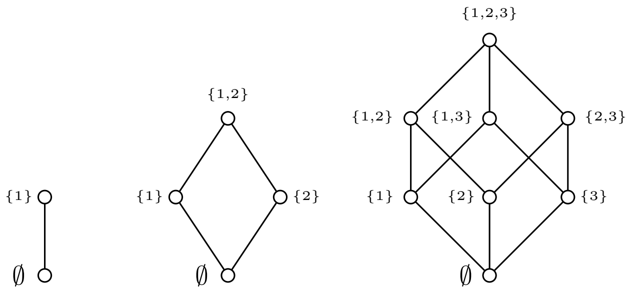

図 1. Boolean 代数

例えば, 次のページの図 2 は simplicial poset だが, 図 3 は simplicial poset ではない. 正則な CW-複体の組合せ論的な特徴付けに関する Björner の結果 [Bj] から, simplicial poset は CW-poset であることがわかる. つまり, simplicial poset はある (自然な) 正則な CW-複体の face poset になっており, poset P から CW-複体 $\Gamma(P)$ を定めることができる. このようにして作られる正則な CW-複体を**単体的セル複体 (simplicial cell complex)** と呼ぶ. つまり, face poset が simplicial poset となる正則な CW-複体が単体的セル複体である. Boolean 代数は単体の face poset であるので, 単体的セル複体は単体を貼り合わせることで作られる CW-複体とみなすこともできる. 尚, 同種の概念として単体的複体があるが, 単体的セル複体は単体的複体より少し広い概念となっている.

*murai@yamaguchi-u.ac.jp

[1] 正則な CW-複体とは各セルの閉包が球体と同相なる CW-複体のことである. このような CW-複体の位相はその face poset から決定する事が知られている.

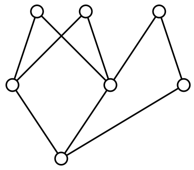

図 2

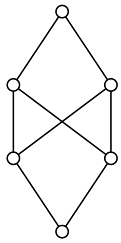

図 3

P を simplicial poset とする時, $[\hat{0},\sigma]$ が rank i の Boolean 代数[2] となるような元 $\sigma \in P$ を P の rank i の元と呼び, $\mathrm{rank}\,\sigma = i$ と書く. $d = \mathrm{rank}\,P = \max\{\mathrm{rank}\,\sigma : \sigma \in P\}$ とし, 各 $i = -1, 0, 1, \ldots, d-1$ に対し,

$$f_i = f_i(P) = \#\{\sigma \in P : \mathrm{rank}\,\sigma = i+1\}$$

とおく, 但し $\#$ は要素の個数を表す. つまり f_i は CW-複体 $\Gamma(P)$ の持つ i 次元のセルの個数である. この時, ベクトル

$$f(P) = (f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$$

を P の **f-列** (又は **face vector**) と呼ぶ. 例えば図 2 の simplicial poset の f-列は $f(P) = (1, 3, 3)$ である. 尚, f_{-1} は常に 1 となる.

単体的セル複体 $\Gamma(P)$ が位相空間 X と同相である時, simplicial poset P(または単体的セル複体 $\Gamma(P)$) を X の**単体的セル分割**と呼ぶ. 単体的セル複体の f-列に関する重要な問題の一つに次のものがある.

問題 1.1. 有限三角形分割可能な多様体 M が与えられた時, M の単体的セル分割の f-列の取りうる値の必要十分条件を与えよ.

本稿では, 上の問題に関する幾つかの結果について紹介する.

2　閉曲面の単体的セル分割の f-列

問題 1.1 の一番簡単な場合は閉曲面の場合である. この場合に関しては特別な知識が無くても簡単に問題は解決できる. ウォーミングアップの意味も込めて少し詳しく書いておこう.

M を閉曲面とし, P を M の単体的セル分割とすると, P の f-列 $f(P) = (1, f_0, f_1, f_2)$ は次の条件を満たすことがすぐにわかる.

(1) $f_2 - f_1 + f_0 = \chi(M)$.

(2) $2f_1 = 3f_2$.

(3) $f_0 \geq 3$.

但し, $\chi(M)$ は M のオイラー数である. (1) はオイラー数の定義から明らかであるし, (3) は $\Gamma(P)$ が少なくとも一つの 2 単体 (三角形) を持つことから明らかである. (2) は, $\Gamma(P)$ において, 各 2 単体はちょうど 3 本の辺を含み, 各辺はちょうど 2 つの 2 単体に含まれるという簡単な事実から導かれる等式である.

実は上の 3 条件がそのまま必要十分条件となる. つまり, 次が成り立つことが知られている.

定理 2.1. M を閉曲面とする. この時, 数列 $f = (1, f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{N}^4$ が M のある単体的セル分割の f-列となることと, f が先の (1), (2), (3) の条件を満たすことは同値.

[2] Boolean 代数の rank とはその鎖の長さの最大値のこと. 例えば, 図 1 はそれぞれ rank 1,2,3 の Boolean 代数である.

証明. 必要性については明らか. $f=(1,f_0,f_1,f_2)$ が条件 (1), (2), (3) を満たす時に f を f-列とするような単体的セル分割を構成すればよい. 条件 (1), (2) より f は

$$f=\bigl(1,f_0,3(f_0-\chi(M)),2(f_0-\chi(M))\bigr)$$

と書き直せるので頂点の個数のみ考えればよい.

2 単体を中心で細分することにより頂点数は任意に増やすことができる[3] ので, どんな閉曲面も頂点数 3 の単体的セル分割を持つことを示せば十分である. 任意の閉曲面は, 球面, トーラス, 射影平面, の連結和として得られることを思い出しておく. 二つの 2 次元の単体的セル複体 Δ,Γ の連結和は Δ,Γ から 2 単体を一つ取り除いて, 取り除いた単体の境界を同一視することで得られる. Δ,Γ の頂点数が共に 3 であれば, この操作を行っても頂点の個数は 3 のままであるので, 球面, トーラス, 射影平面のみ考えればよいことがわかる.

球面については 2 つの単体を境界で同一視することで頂点数 3 の単体的セル分割が構成できる. トーラスと射影平面の場合は次の単体的セル分割を考えればよい.

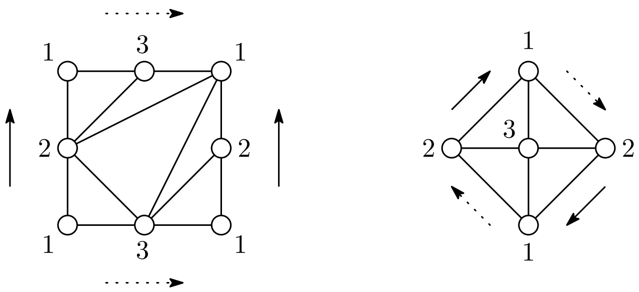

図 4

但し, 左図は境界の四角形の平行な二辺を同じ方向に同一視, 右図は境界の四角形の平行な二辺を反対方向に同一視して得られる単体的セル複体である. □

3 高次元球面の単体的セル分割の f-列

前の章で見たように, 閉曲面の単体的セル分割の f-列の分類は容易である. 閉曲面の場合のポイントは, 単体的セル分割の f-列が頂点の数から決定してしまうという点である. 残念ながら高次元の場合には f-列は頂点の個数のみから決定するわけではないので問題はもっと難しくなる. この章では Stanley と枡田氏により与えられた一般次元球面の単体的セル分割の f-列の特徴付けを紹介する. 彼らの結果を紹介する前に, h-列と呼ばれる不変量を紹介する.

Rank d の simplicial poset P に対し, P の h**-列** $h(P)=(h_0,h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{Z}^{d+1}$ を以下の (t についての一変数の) 等式を満たすベクトルとして定める

$$\sum_{i=0}^{d} f_{d-i-1}t^i=\sum_{i=0}^{d} h_{d-i}(t+1)^i,$$

但し $(f_{-1},f_0,\dots,f_{d-1})$ は P の f-列とする. この時, f-列を知ることと h-列を知ることが同値であることが直ぐに分かる. 特に, 問題 1.1 を考える際に f-列を h-列に変えて考えても問題としては同じものとなる. 球面の単体的セル分割の h-列の分類は次のようになる.

定理 3.1 (Stanley [St1], 枡田 [Ma2])**.** ベクトル $h=(h_0,h_1,\dots,h_d)\in\mathbb{Z}^{d+1}$ が $(d-1)$ 次元球面のある単体的セル分割の h-列であることと h が以下の三条件を満たすことは同値

(1) $h_0=1$ かつ $i=0,1,\dots,d$ に対し $h_i=h_{d-i}$.

[3] (a,b,c) を頂点とする三角形を $(a,b,d),(a,c,d),(b,c,d)$ を頂点とする 3 つの三角形に分ければよい.

(2) $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h_i \geq 0$.

(3) ある $0 < i < d$ について $h_i = 0$ なら $\sum_{i=0}^{d} h_i$ は even.

閉曲面の場合と違い, 上記定理の証明は易しくない. 例えば, 条件 (2) の h-列の非負性は, simplicial poset から face ring と呼ばれる環を定義し, h-列の値がその環の代数的な不変量に一致することを示すことにより導かれる. 十分性については比較的優しいが, 組合せトポロジーに関する初歩的なことをある程度知っておく必要がある. いずれについても詳しくは [St1, Ma2] を参照してほしい.

4　閉多様体の単体的セル分割の f-列

球面の単体的セル分割の f-列を調べる際には h-列を考えることで上手い特徴付けが得られた. 残念ながら, 一般の多様体を考える時, h-列は綺麗な形をしているとは限らない (後述の例 4.1 を見よ). 多様体の単体的セル分割を調べる際には Novik [No] によって導入された h''-列と呼ばれるものを考えることが有効である.

Rank d の simplicial poset P に対し,

$$\beta_i = \beta_i(P) = \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \tilde{H}_i\big(\Gamma(P); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$$

を P の ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の) ベッチ数とする ($\tilde{H}_i(\Gamma(P); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は $\Gamma(P)$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の被約ホモロジー群). Simplicial poset P の h-列が $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ である時, P の **h''-列** $h''(P) = (h''_0, h''_1, \ldots, h''_d)$ を次で定義する

$$h''_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ h_k - \dbinom{d}{k} \left\{ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-k} \beta_{\ell-1} \right\}, & \text{if } 1 \leq k \leq d-1, \\ h_d - \sum_{\ell=1}^{d-1} (-1)^{\ell-d} \beta_{\ell-1} = \beta_{d-1}, & \text{if } k = d. \end{cases}$$

h''-列を理解するのは簡単ではないので一つ例を挙げておく.

例 4.1. 下の図 5 のような二次元トーラス $S^1 \times S^1$ の標準的な三角形分割を考え, P をその face poset とする. この時, $f(P) = (1, 9, 27, 18)$ であるが, h-列を計算すると

$$h(P) = (1, 6, 12, -1)$$

となり, 綺麗な形とはならない (球面の場合には h-列は非負で対称な数列となった). 一方, $\beta_1(P) = 2$ であるから, h''-列を計算すると,

$$h''(P) = h(P) - 2(0, 0, 3, -1) = (1, 6, 6, 1)$$

となり, こちらは綺麗な値をしていることが分かる.

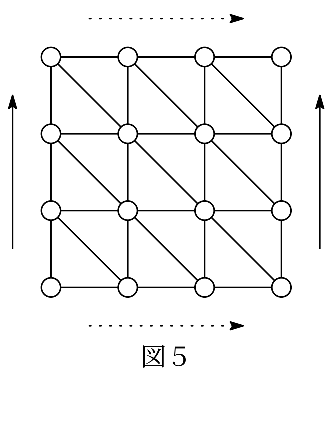

図 5

注意 4.2. P が球面の単体的セル分割ならトップ以外のベッチ数は消えているから $h''(P) = h(P)$ である.

h''-列は h-列とベッチ数から決定するので問題 1.1 を考える上では f-列を h''-列に変えても問題ない. Simplicial poset の h''-列を考える重要なポイントは, 閉多様体の単体的セル分割の h''-列は必ず非負でかつ対称になるという点である. 実際, 次が成り立つ.

定理 4.3. P を境界の無い連結な $(d-1)$ 次元多様体 M の単体的セル分割とし, $h''(P) = (h''_0, h''_1, \ldots, h''_d)$ とする. 次が成り立つ.

(1) (Novik [No]) $h''_0 = 1$ かつ $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h''_i = h''_{d-i}$.

(2) (Novik-Swartz [NS]) $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h''_i \geq 0$.

(3) ([Mu1]) ある $0 < i < d$ について $h''_i = 0$ なら $\sum_{i=0}^{d} h''_i$ は even.

上の定理の証明は簡単ではないが, (1) は以下の二つの式から比較的容易に従う

$$h_{d-i} - h_i = (-1)^i \binom{d}{i} \big(\chi(P) - \big(1 + (-1)^{d-1}\big)\big),$$

$$\beta_i = \beta_{d-1-i},$$

但し $\chi(P) = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{k-1} f_{k-1}(P)$ はオイラー数である. 一つ目の等式は (Klee's) Dhen–Sommerville equation と呼ばれる ([Kl] 参照). 二つ目の等式は Poincaré duality である. 一方, (2), (3) を証明するにはブックスバウム環と呼ばれる可換環論におけるかなりマニアックな概念に関する知識が必要となる. 詳しくは [NS, Mu1] を参照して欲しい.

先の定理から Stanley–枡田の定理の少なくとも必要条件は任意の閉多様体で成り立つことがわかる. では, 十分条件についてはどうだろうか？つまり, どんな多様体に対して定理 4.3 の条件は必要十分条件になるだろうか？この問題については, 次のことがわかっている.

定理 4.4 ([Mu1])**.** M が二つの球面の直積 $S^n \times S^m$, 又は実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の時, 定理 4.3 の条件は必要十分である.

尚, 偶次元の射影空間については枡田氏 [Ma1] が得ていた結果である事を注意しておく.

5 今後の課題など

単体的セル分割の f-列の研究はまだまだ面白い問題がいろいろ残っているように思われる. 今後の問題としては二つの方向性が考えられる.

5.1 閉多様体の単体的セル分割

定理 4.4 をもっと他の多様体の場合に拡張するというのはとても興味深い問題である. 実は, 球面の直積や実射影空間の連結和を取ることで得られる多様体に対しても定理 4.3 の条件は h''-列の満たす必要十分条件となることが知られており, 定理 4.3 の条件が h''-列の満たす必要十分条件となる多様体は他にもありそうである. 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ などは有力な候補ではないかと思うが (実際 $\mathbb{C}P^2$ の場合は必要十分となる) 未解決である. この問題を考える際, 次の補題が有効である

補題 5.1. M を有限三角形分割可能な境界の無い連結な $(d-1)$ 次元多様体とする. 次は同値.

(i) 定理 4.3 の条件が M の単体的セル分割の h''-列の満たす必要十分条件となる.

(ii) M の単体的セル分割 P で $f_d(P) = 2 + \sum_{i=1}^{d-2} \binom{d-1}{i} \beta_i$ となるものが存在.

つまり, ファセットの個数がある特定の値になるような単体的セル分割が構成できればそれで良いのである. **特に, h''-列について何も理解していなくても問題は解ける !! ので興味を持たれた方は是非トライして欲しい**.

全ての多様体に対して定理 4.3 の条件が h''-列の満たす必要十分条件になるわけではないことも注意しておく. 3 次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ やポアンカレ球面などがその例である. そもそも h''-列の定義ではホモロジー群しか考えていないので, ホモロジー群以外の理由で構造が複雑になっている多様体に対しては h''-列を考えるだけでは上手くいかないのはある意味当然の事である.

定理 4.3 の条件が十分条件とならなくても, h''-列の必要十分条件を得られる可能性もある. 興味深い問題として高次元トーラスの場合が挙げられる. 完全な解決を得るのは難しいと思われるが, 部分的な結果を得るだけでも十分面白い. 例えば, 3 次元の場合は次が肯定的に解決できれば必要十分条件が得られる.

問題 5.2. P が 3 次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ の単体的セル分割なら $h''_2(P) \geq 4$ か[4]？

一般次元のトーラスに対しては問題はより難しいが, 次の問題を提唱しておきたい.

問題 5.3. n 次元トーラス $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ の単体的セル分割は少なくとも $(n+1)!$ 個のファセットを持つか？

実は表現論的な構成法を用いて, $(n+1)!$ 個のファセットを持つ n 次元トーラスの単体的セル分割が構成されている [DPS] (Steinberg トーラスと呼ばれる). 上の問題は Steinberg トーラスの構成がファセットの数を最小にするか？と言う問題である. 尚, この問題はファセットの数の最小値に関する問題だが, 任意の三角形分割可能な連結な d 次元閉多様体に対し, $d+1$ 個の頂点を持つ単体的セル分割が構成できることが知られており, 頂点数の最小値に関しては問題は解決している ([FGG] 参照).

5.2　境界を持つ多様体の単体的セル分割

境界を持つ多様体の単体的セル分割の h''-列の研究は今の所ほとんど手が付けられていないのだが, 実は, 最も簡単な場合である球体の場合には Kolins [Ko] と著者 [Mu2] により h-列の完全な分類が得られている. 条件は非常に複雑なのだが, せっかくなので結果を書いておこう.

ベクトル $h=(h_0,h_1,\dots,h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ に対し, $\partial h = (\partial h_0, \partial h_1, \dots, \partial h_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ を次で定義する

$$\partial h_i = (h_0+h_1+\cdots+h_i) - (h_d+h_{d-1}+\cdots+h_{d-i}).$$

定理 5.4 (Kolins, 村井)**.** ベクトル $h=(h_0,h_1,\dots,h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が $(d-1)$ 次元球体のある単体的セル分割の h-列となる事と h が次の (1)–(7) の条件をみたすことは同値.

(1) $h_0=1$, $h_d=0$, かつ $k=1,2,\dots,d-1$ に対し $h_k \geq 0$.

(2) $k=0,1,\dots,d-1$ に対し $\partial h_k \geq 0$.

(3) もし d が odd で, かつある $1 \leq n \leq d-2$ に対し $\partial h_n = 0$ であるなら $\sum_{k=0}^d h_k$ は even.

(4) ある $1 \leq n \leq d-2$ に対し $\partial h_n = 0$ であるなら

$$h_k + h_{k-1} + \cdots + h_{k-n+1} \geq \partial h_k \quad \text{for } k=n,n+1,\dots,d-1.$$

(5) ある整数 i,j について, $\partial h_i = 0$, $h_j = 0$ かつ $i+j \leq d$ となるなら $\sum_{k=0}^d h_k$ は even.

(6) ある $1 \leq n < \frac{d}{2}$ について $\partial h_n = 0$ となるとする. ある $n \leq \ell \leq d-n$ について $(h_\ell + h_{\ell-1} + \cdots + h_{\ell-n+1}) - \partial h_\ell < n$ であるなら $\sum_{k=0}^d h_k$ は even.

[4] h-列の言葉で述べると $h_2(P) \geq 22$.

(7) ある整数 i,j について, $\partial h_i = 0$, $h_j = 0$, $0 < i < \frac{d}{2}$ かつ $d-i < j < d$ となるとする. ある整数 $\ell \le d-j$ について $\partial h_\ell \le \ell$ となるなら $\sum_{k=0}^{d} h_k$ は even.

Stanley–枡田の定理の必要条件が定理 4.3 に拡張されたように, 球体の h-列の必要十分条件を境界を持つ多様体の単体的セル分割の h''-列の必要条件に拡張することができるか, なども興味深い問題であるが, まだきちんと調べられていないようである.

終わりに.

本稿ではどちらかというと組合せ論寄りな立場から単体的セル複体の面の数え上げに関する話を扱ったが, 単体的セル複体の研究には可換環論や代数的トポロジーの話がからんでいる. 可換環論的な扱いに関しては Stanley の論文や著書 [St1, St2] を, トポロジー寄りの扱いに関しては枡田氏の survey [Ma1, Ma3] などを参照してほしい.

参考文献

[Bj] A. Björner, Posets, regular CW complexes and Bruhat order, *European J. Combin.* **5** (1984), 7–16.

[DPS] K. Dilks, T.K. Petersen and J.R. Stembridge, Affine descents and the Steinberg torus, *Adv. Appl. Math.* **42** (2009), 423–444.

[FGG] M. Ferri, C. Gagliardi and L. Grasselli, A graph-theoretical representation of PL-manifolds—a survey on crystallizations, *Aequationes Math.* **31** (1986), 121–141.

[Kl] V. Klee, A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem, *Canadian J. Math.* **16** (1964), 517–531

[Ko] S. Kolins, f-vectors of Simplicial Posets that are Balls, *J. Algebraic Combin.*, to appear.

[Ma1] M. Masuda, 単体的セル分割の単体の数, 数理解析研究所講究録 **1393** (2004), 88–95.

[Ma2] M. Masuda, h-vectors of Gorenstein* simplicial posets, *Adv. Math.* **194** (2005), 332–344.

[Ma3] 枡田 幹也, トーリックトポロジー, 数学 **62** (2010), 386–411.

[Mu1] S. Murai, Face vectors of simplicial cell decompositions of manifolds, *Israel. J. Math.*, to appear.

[Mu2] S. Murai, h-vectors of simplicial cell balls, *Trans. Amer. Math. Soc.,* to appear.

[No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.

[NS] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.

[St1] R.P. Stanley, f-vectors and h-vectors of simplicial posets, *J. Pure Appl. Algebra* **71** (1991), 319–331.

[St2] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.