距離空間の Floyd 境界について

嶺山 良介*

大阪大学理学研究科 D2

概 要

空間の中にある「図形」の幾何学的構造を調べるとき, それがどのように埋め込まれているのか, 全体からみてどんな形をしているのか調べることはとても基本的なことと言えるでしょう. これはつまり, その「図形」の境界を調べることに他なりません. 無限遠境界とは, 距離空間自体に対してそのような境界を考えようというものです. ここで考える境界は対象となる距離空間に基点を一つ固定して, その点から無限の彼方にある点を集めることによって定義することができます. 城崎新人セミナーでは２つの無限遠境界について述べましたが, ここでは一つ加えて３つの無限遠境界「Floyd 境界」「Gromov 境界」「理想境界」を紹介し, S.Buckley,S.Kokkendorff による結果 [BK] である, 双曲空間における３つの同型性について述べたいと思います.

城崎新人セミナーにおきまして発表の機会を与えて下さった主催者の方々に御礼申し上げます. ありがとうございました.

1　３つの無限遠境界とそれぞれの位相

目的は距離空間における３つの無限遠境界の同型性を述べることであるが, そのためには距離空間にある程度の仮定が必要である. まずは境界を定義することから始めるが, これを３つの節に分けてそれぞれで必要な性質を空間に適宜付け加えることにする.

1.1　Floyd 境界

ここでは距離が曲線の長さで測れるような空間のみを扱うので, まずはその準備から始める. これは特に Floyd 境界を定義するために必要である. 理想境界については測地空間であれば十分であり, さらに Gromov 境界については距離空間が弧長空間である必要すらない.

(X,d) を距離空間とし, $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ を２点 $x,\ y \in X$ をつなぐ曲線とする（すなわち連続写像である）. この曲線の長さを, 折れ線の長さで近似した上限として以下のように定義する.

定義 1.1 (曲線の長さ)**.** 区間 $[a,b]$ の分割 Δ を $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ として,

$$length(\gamma) = \sup_{\Delta}\left(\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))\right)$$

が有限値として存在するとき, γ の長さとする.

このように定義すると γ は区間上の測度を定めることがわかり, 積分で長さを表すことができる. つまり, $l_\gamma(t) = length(\gamma|_{[a,t]})$ とすると

$$length(\gamma) = \int_a^b dl_\gamma(t)$$

である. さて, この曲線の長さによって X 上に新たな距離 l を導入する.

*r-mineyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

定義 1.2 (length space)**.** $\Gamma(x,y)$ で 2 点 $x,\ y \in X$ をつなぐ曲線全体を表す. 距離 l を

$$l(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} length(\gamma)$$

とおいて, 距離空間 (X,l) を**弧長空間（length space）**という.

一般に, 距離を長さとして実現するような曲線が X 上任意の 2 点に対して必ず存在するとき, その空間は**測地的**, または**測地空間**であるというのであった. 以降, 距離空間 X は常に測地的であると仮定する.

以上を踏まえて Floyd 境界を定義する. (X,l,o) を $o \in X$ を基点とする（測地）弧長空間として, X の任意の点 x に対し $|x| := l(x,o)$ とおく. Floyd 境界とは, 元の距離 l に重みを付けて得られる新しい距離 σ に関する完備化の境界（から元の距離による完備化の境界を引いたもの）である. この重みを与える, 次の条件を充たす可積分関数 $f : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ を弱 Floyd 関数という. 条件:ある定数 $C > 2$ が存在して,

$$s-1 \le t \le 2s+1 \Longrightarrow f(t) \le Cf(s)$$

である. $x,\ y \in X$ に対して $\Gamma(x,y)$ を x と y を結ぶような, 長さで径数づけられた曲線の集合とする. 弱 Floyd 関数により, 距離空間 X を変形しよう.

$$l(x,y) \quad \rightsquigarrow \quad \sigma(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} \int_\gamma f(\,|\gamma(t)|\,)dt$$

この変形により得られた距離空間を X_σ として, その完備化を $\bar{X}_\sigma$ と書く. さらにもとの空間 X の完備化を同様に $\bar{X}$ と書く.

定義 1.3 (Floyd 境界)**.** ある弱 Floyd 関数に対する, 距離空間 X の Floyd 境界 $\partial_\sigma X$ を

$$\partial_\sigma X = \left(\bar{X}_\sigma \setminus X_\sigma\right) \setminus \left(\bar{X} \setminus X\right)$$

と定める.

例えば, $X = \mathbb{R}^2$, $f(t) = 1/\left(1+t^2\right)$ とした時, この f に対する $\mathbb{R}^2$ の変形は Riemann 球面を作る操作にあたり, その Floyd 境界は一点のみからなる. σ 距離による完備化で新しく付け加えられる点は元の距離 l 上での無限遠方にあることに注意する. この境界の特徴的な部分は, 新しく得られた距離空間が有界である, というところである.

Floyd 境界には自然に σ 距離から誘導される距離がある. これにより位相を定めておく.

1.2 Gromov 境界

X 上に Gromov 積：$(x\,|\,y)_z = \big(l(x,z) + l(y,z) - l(x,y)\big)/2$ を定義する. Gromov 境界はこれが発散していく（“無限遠に収束する” という）ような点列（Gromov 列）のある同値類として定義される. つまり無限遠に収束する点列とは, X 上の点列 (x_i) で,

$$\lim_{i,j\to\infty} (x_i\,|\,x_j)_o = \infty$$

を充たすようなものである. 以降 Gromov 列 (x_i) を単に x と表す. Gromov 列はどんな点列であるのか, Gromov 積の定義からおおまかに読み取ってみると, 「各 $x_i,\ x_j$ の組は互いに有界な距離にあるが, 基点 o からはどんどん離れて行くような点列」であることがわかる. さてこの Gromov 列の集合に同値関係を定めよう. これは, 無限遠に収束する点列の “鎖” で結ばれる点列の組を同値であるとすることによって定義される. まず二つの Gromov 列 $x,\ y$ に対して関係 E を以下で定義する.

$$x\,E\,y \iff \liminf_{i,j\to\infty} (x_i\,|\,y_j)_o = \infty.$$

関係 E を用いて, 同値関係 $\sim_G$ を定める. Gromov 列 $x,\ y$ が $x \sim_G y$ であるとは, Gromov 列の列 $(x^k),\ (k = 0, \ldots, n)$ があって,

$$x = x^0,\ y = x^n, \quad \text{かつ} \quad x^k\, E\, x^{k-1},\ 1 \leq k \leq n$$

となるときを言う. これを用いて X 上の Gromov 境界を以下のようにして定義する.

定義 1.4 (Gromov 境界)**.**

$$\partial_G X := \{\ (x_i)\ ;\ \textit{Gromov sequence}\ \} / \sim_G .$$

Gromov 境界には一般に自然な距離が誘導されるわけではないので, 新たに定めなくてはならない. その方法はいくつかあるが, ここでは X に **Gromov 双曲性**を仮定して次のように距離を定義し, 距離空間として Gromov 境界に位相を定める. まず X を δ 双曲的な距離空間であると仮定する. ここで距離空間 X が δ 双曲的であるとは,

$$(x \,|\, z)_p \geq (x \,|\, y)_p \wedge (y \,|\, z)_p - \delta$$

が全ての $x,\ y,\ z,\ p \in X$ で成り立つことを言う. 次に ϵ を $\delta \cdot \epsilon \leq 1/5$ であるようにとる. これらに対して,$d_\epsilon,\ \rho_\epsilon : \partial_G X \times \partial_G X \longrightarrow [0, \infty)$ を次で定める.

$$\rho_\epsilon(a, b) = exp(-\epsilon\,(a \,|\, b)_o), \quad a, b \in \partial_G X$$
$$d_\epsilon(a, b) = \inf \sum_{j=1}^{n} \rho_\epsilon(a_{j-1}, a_j), \quad a, b \in \partial_G X$$

但し, 下限は $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ $(n \in \mathbb{N})$ なる $\partial_G X$ の点列である. この最後の式で定義された d_ϵ が Gromov 境界上の距離になる.

1.3 理想境界

今 X を測地線が必ず存在する空間と仮定していたことを思い出しておく. 点列によって定義された上記二つの境界に対し, 理想境界は片方の端点を固定した無限に長い測地線の同値類として定義される. これも基点の取り方には全く依存しない. 基点 $o \in X$ を出発点とし無限に伸びる測地線全体を $GR(X, o)$ としよう. このとき $\gamma_1,\ \gamma_2 \in GR(X, o)$ が同値：$\gamma_1 \sim_I \gamma_2$ であるとは,

$$\max \left\{ \sup_{x \in \gamma_1} \inf_{y \in \gamma_2} l(x, y), \quad \sup_{y \in \gamma_2} \inf_{x \in \gamma_1} l(x, y) \right\} < \infty$$

を充たすときをいう. この同値類による類別を理想境界という.

定義 1.5.

$$\partial_I X = GR(X, o) / \sim_I .$$

理想境界を含めた $X \cup \partial_I X$ 上に新たな位相 τ_C を定めよう. これは**錐位相（cone topology）**と呼ばれる. X を完備な CAT(0) 空間と仮定する. ここで CAT(0) 空間とは, 辺が全て測地線であるような任意の三角形が右図のように内側に "ひしゃげて" いるような空間で, 曲率 0 以下であることを意味する. このような空間の重要な性質の 1 つとして, 任意の 2 点に対して測地線が必ず唯一存在することが挙げられる.

o を中心とする半径 $r > 0$ の閉球を $B(o, r)$, 球面を $S(o, r)$ と書くことにして,$X_r := \partial_I X \cup (X \setminus B(o, r))$ とする. 射影

$$p_r : X_r \longrightarrow S(o, r)$$

を $x \in X_r$ に対して x を通る測地線と球面 $S(o, r)$ の交点を対応させるものとして定める.

$a \in X$ に対して $l(p_r(x), p_r(a)) < s$ であるような $x \in X \cup \partial_I X$ の集合を $U(a, r, s),\ r, s > 0$ とおく. τ_C はこれら $U(a, r, s)$ 全体が a の開近傍系をなすような位相として定められる（図 1 参照）. この位相 τ_C は l によって定まる元の位相と X 上では一致し, 全体でコンパクトである.

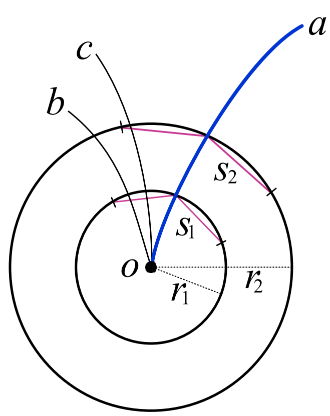

図 1: 錐位相のイメージ. 測地線 a の近傍 S_1 と S_2 を表している. $c \in S_1 \cap S_2$ であり, $b \in S_1 \setminus S_2$ である.

2 同型定理

双曲空間においては以上で定義した 3 つの無限遠境界に対して次の同型定理が成立する. これらの定理は弱 Floyd 関数の選び方には依存しない. なお, 距離空間が**固有**であるとは任意の閉球がコンパクトであるときを言う.

定理 2.1. $\delta \cdot \epsilon \leq 1/5$ を充たす定数 $\delta \geq 0, \epsilon > 0$ に対して, 距離空間 X は δ 双曲的で, 固有であると仮定する. このとき,$\partial_G X \neq \varnothing$ かつ, 自然な写像

$$J_1 : (\partial_G X, d_\epsilon) \longrightarrow (\partial_\sigma X, \sigma)$$

は位相同型である.

ここで "自然な" という言葉を用いたが, これは J_1 がほとんど恒等的な写像であることを意味する. 証明のあらましを述べると以下のようになる. まず, σ を定義する関数 f は次を充たすものであったことを思い出しておく.

i. 十分小さな ϵ_0 と定数 $K > 0$ に対して

$$f(t) \geq K \exp(-\epsilon_0 t).$$

ii. （弱 Floyd 関数を定める）定数 C に対して,

$$f(t) \leq Cf(s) \qquad (t \leq s).$$

これらの条件を用いて次のように示される.

1. J を X 上で恒等的な写像とする. すなわち任意の Gromov 列が σ-Cauchy 列であることを示す. Gromov 列は無限遠方に発散していくので, 任意の o を中心とする球の外に必ず点をもつ. これは σ-Cauchy 列であることを意味する. さらに条件 ii より, 同値関係も保たれることがわかるので J は well-defind であることがわかる.

2. X の固有性から, $\partial_G X \neq \varnothing$ であることと, J の全射性がわかる.

3. 双曲性と条件 i より, J^{-1} の well-defindness とその連続性, さらに元の写像 J の連続性がわかる. 従って 2 つの境界は位相同型である.

理想境界と Gromov 境界に関する次の結果はよく知られている.

定理 2.2. $\delta \cdot \epsilon \leq 1/5$ を充たす定数 $\delta \geq 0, \epsilon > 0$ に対して, 距離空間 X は完備 δ 双曲的, かつ CAT(0) で測地的であると仮定する. このとき $\partial_I X \neq \varnothing$ で自然な写像

$$J_2 : (\partial_I X, \tau_C) \longrightarrow (\partial_G X, d_\epsilon)$$

は位相同型である.

こちらの "自然な" という言葉は, 各測地線上の発散していく点列をとれば, その部分列として Gromov 列がとれることを指している. "自然な" という部分はいずれも定義からほとんど明らかである. 従って, それぞれの証明において逆の対応をいかにして与えるかということがポイントになる. 実は任意の発散する点列から部分列を取ることによって,σ 距離での Cauchy 列,Gromov 列を作ることができ, さらに固有性を仮定すると, 測地線をも作れるのである.

さて, X が全ての仮定を充たすとき, 3 つの無限遠境界は位相同型になる. 模式的に見ると次のようになる.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Gromov 境界} \arrow[dl, "J_1"'] & \\
\text{Floyd 境界} & & \text{理想境界} \arrow[ul, "J_2"'] \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

これらの定理にある X に対する仮定は非常に強いもののように見えるが, 主張が成り立つためには全て必要なものである. 実際, 仮定をどれか無くしてしまうと同型でない例が存在する. 詳しくは Buckley と Kokkendorff の論文 [BK] を参照のこと.

参考文献

[BK] Stephen M. Buckley and Simon L. Kokkendorff, *Comparing The Floyd and Ideal Boundaries of A Metric Space*, Trans. Amer. Math. Soc. 361(2001), no. 2, 715-734.