リーマンゼータ関数の新たな漸近公式とその応用について

松岡謙晶*

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科、6/30

この度は、第 9 回城崎新人セミナーに参加させていただき、講演の機会を与えていただきありがとうございます。運営委員の皆様には御礼を申し上げます。

1 Riemann ゼータ関数の定義

Riemann [7] は素数の個数を解析する為に Riemann ゼータ関数と呼ばれる関数を導入した。以下では慣習に従って複素数 s の実部を σ とかき s の虚部を t とかく。$\sigma > 1$ に対して Riemann ゼータ函数を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\sigma > 1) \tag{1.1}$$

と定義する。(1.1) の右辺は $\sigma > 1$ においてコンパクト一様収束しているので正則函数であることが分かる。Riemann [7] は Riemann ゼータ関数の解析接続を 2 通りの方法で示し、さらに関数等式と呼ばれる次の式を示した。

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \zeta(1-s) \Gamma(1-s) \sin(\frac{s\pi}{2}) \tag{1.2}$$

関数等式は色々な証明方法が知られている (Titchmarsh [9] の第二章参照)。ここでは Euler-Maclaurin の和公式を使った証明を紹介する。

補題 1.1. (Euler-Maclaurin の和公式) $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続微分可能な函数とする。また、$[x]$ を x を超えない最大の整数とする。このとき次が成り立つ。

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2}) f'(x) dx + (a - [a] - \frac{1}{2}) f(a) - (b - [b] - \frac{1}{2}) f(b)$$

証明は部分積分をすれば明らかである。補題より $\sigma > 0$ のとき

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$$

が成り立つ。ここで式を変形することにより

$$\zeta(s) = s \int_0^{\infty} \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \quad (-1 < \sigma < 0) \tag{1.3}$$

が分かる。Fourier 級数展開から

$$[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{\pi k}$$

であるので (1.3) に代入して計算すれば関数等式が導かれる。素因数分解の一意性から (1.1) は

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \qquad (\sigma > 1)$$

*m10041v@math.nagoya-u.ac.jp

となる。ただし p は素数全体を動くものとする。無限積に展開されていることから特に $\sigma > 1$ において Riemann ゼータ関数は零点を持たないことが分かる。また関数等式 (1.2) を用いれば $\sigma < 0$ における Riemann ゼータ関数の零点は負の偶数点、すなわち $s = -2, -4, -6, \cdots$ であることが分かる。このように領域 $0 \le \sigma \le 1$ 以外にある零点は負の偶数点だけであることが簡単に分かるが領域 $0 \le \sigma \le 1$ にある零点の解析は非常に難しいことが知られている。領域 $0 \le \sigma \le 1$ は臨界領域と呼ばれ臨界領域にある零点は非自明な零点と呼ばれる。Riemann [7] は非自明な零点を使い以下の Riemann の素数式と呼ばれる式を述べた。

定理 1.2. x を正の整数として $\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とする。x が素数でない場合は $\pi^*(x) = \pi(x)$ とし、x が素数の場合は $\pi^*(x) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{\pi(x+\epsilon)+\pi(x-\epsilon)}{2}$ とする。また $li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$ とし $\mu(n)$ を $n = 1$ の時は 1、n が相異なる k 個の素数の積になっているときは $(-1)^k$、それ以外は 0 と定義する。このとき

$$J^*(x) = li(x) - \sum_{\rho} li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

とすると

$$\pi^*(x) = \sum_{k \le \frac{\log x}{\log 2}} \frac{\mu(k)}{k} J^*(x^{\frac{1}{k}})$$

が成り立つ。ここで和は Riemann ゼータ関数の非自明な零点を動く。

Riemann は論文で Riemann の素数式を含めいくつかの定理を述べているが、Riemann ゼータ関数の解析接続と関数等式以外は厳密な証明とは言えないものであった。これらの完全な証明は後の数学者によって与えられ Riemann の素数式の証明は 1895 年 von Mangoldt [6] により与えられた。しかし「非自明な零点は全て $\sigma = 1/2$ 軸上にある」という有名な Riemann 予想だけは未解決である。Riemann 予想や Riemann の論文についての解説は例えば鹿野 [1]、Edwards [3] などに詳しく書かれている。Riemann 予想を検証する試みは色々な方向からなされている。例えば 41% 以上の非自明な零点が $\sigma = 1/2$ 軸にあることが最近 [2] で示されている。

2 Riemann ゼータ関数の近似

臨界領域における Riemann ゼータ関数の振る舞いを解析するために、Riemann ゼータ関数を近似する式が必要な場合がある。次の式は Hardy-Littlewood [4] により示された。

定理 2.1. $\sigma_1 > 0$、$x \ge 1$ とし C を 1 より大きい正定数とする。$\sigma \ge \sigma_1$ であるとき $|t| \le \frac{2\pi x}{C}$ であるならば

$$\zeta(s) = \sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$$

が成り立つ。

定理 2.1 は式が短いにも関わらず Riemann ゼータ関数をよく近似しているので、しばしば Riemann ゼータ関数の臨界領域の解析に用いられる。しかし、より精密な情報が必要な場合は定理 2.1 では不十分であり次の定理 2.2 が用いられる。この定理 2.2 も Hardy-Littlewood [5] による。

定理 2.2. $x \ge 1, y \ge 1, 0 \le \sigma \le 1, 2\pi xy = |t|$ であるとき

$$\zeta(s) = \sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \le y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1})$$

が成り立つ。ただし

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2}) \Gamma(1-s)$$

である。

Riemann ゼータ関数を近似する多くの問題において定理 2.2 で十分な場合が多いが、さらに誤差項の解析が必要な場合もある。次の定理 2.3 は Riemann-Siegel 公式と呼ばれる。これは Göttingen 大学に残されていた Riemann の遺稿から Siegel [8] が導いた式である。

定理 2.3. $0 \le \sigma \le 1$, $m = \left[\sqrt{\dfrac{t}{2\pi}}\right]$, $N < At$ とする。ただし A は十分小さいものとする。このとき

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m} n^{-s} + \chi(s)\sum_{n=1}^{m} n^{s-1} + (-1)^{m-1} e^{-i\pi(s-1)/2}(2\pi t)^{(s-1)/2} e^{-it/2-\pi i/8}$$

$$\times\Gamma(1-s)\Big(S_N + O\Big(\big(\frac{3N}{t}\big)^{N/6}\Big) + O(e^{-At})\Big)$$

が成り立つ。ただし

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\nu\le\frac{1}{2}n} \frac{n!\, i^{\nu-n}}{\nu!(n-2\nu)!2^n}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}n-\nu} a_n \Psi^{(n-2\nu)}\Big(\frac{\eta}{\pi}-2m\Big)$$

とする。ここで $\eta = \sqrt{2\pi t}$ であり

$$\Psi(a) = \frac{\cos\pi\big(\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{1}{8}\big)}{\cos\pi a}$$

とし、a_n は

$$\exp\Big((s-1)\log\big(1+\frac{z}{\sqrt{t}}\big) - iz\sqrt{t} + \frac{1}{2}iz^2\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

により定義される。

3 Riemann-Siegel 公式の誤差項の計算

Riemann-Siegel 公式には $\Psi(z)$ の高階微分が含まれているので N が大きくなるにつれて計算がとても複雑になる。この問題を解決する為にパラメーターを入れることで $\Psi(z)$ の高階微分を無くすことを考えた。結果が以下の式になる。ここで Vinogradov の記号 $\ll$ は Landau の記号 O と同じ意味とする。すなわち $f(x) \ll g(x)$ であるとは $f(x) = O(g(x))$ である。

定理 3.1. A を十分小さい正定数, $a > 1$, $b > 1$, $0 < c < 1$ を定数とする。また,$2 \le N < At, 0 < r \le \dfrac{1}{6}, M \ge 1$ とし ω_k $(k = 1, 2\cdots, N)$ は $|\omega_k| \le Mt^{-r}$ $(k = 1, 2\cdots N)$ を満たすものとする。$t^{-r}B = \min_{i\ne j}|\omega_i - \omega_j|$ とおき $Mt^{-r}b \le \dfrac{Nt^r}{aM} \le \dfrac{\sqrt{t}}{2}$ とする。また、$\dfrac{Nt^r}{M}$ は定数で下から押さえられているとする。このとき

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^s} + \chi(s)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^{1-s}} + e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)(i\eta)^{s-1}e^{-\frac{\pi i}{8}-\frac{it}{2}}(-1)^m\,(T_N + U_N)$$

が成り立つ。ただし

$$\prod_{\substack{i=1\\i\ne k}}^{N}(z - \omega_i t^r) = \sum_{j=0}^{N-1} f_{kj} z^j$$

とすると

$$c_k = \prod_{\substack{i=1\\i\ne k}}^{N}(t^r\omega_k - t^r\omega_i)^{-1}\sum_{j=0}^{N-1} t^{rj} j!\, a_j f_{kj}$$

であり

$$T_N = \sum_{k=1}^{N} c_k \Psi\left(\frac{\eta}{\pi} - 2m - \frac{i\omega_k}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{\omega_k^2}{4}i}$$

$$U_N \ll \left(\frac{400N}{et^{6r}}\right)^{\frac{N}{6}} M^N \left(\frac{M}{B}\right)^{N-1} N^{\frac{5}{6}} + e^{-At} +$$
$$+ \left(\frac{M}{B}\right)^{N-1} \left(\frac{400N^4}{e^4}\right)^{\frac{N}{6}} N^{\frac{5}{6}} b^{-N} \exp\left(-\frac{cN^2t^{2r}}{2a^2M^2} + \frac{cbN}{a} + \left(\frac{1-c}{2}\right) M^2 t^{-2r} b^2\right)$$
$$+ \left(\frac{M}{B}\right)^{N-1} \left(\frac{400N^4}{e^4}\right)^{\frac{N}{6}} N^{\frac{5}{6}} \exp\left(-\frac{cN^2t^{2r}}{2a^2M^2} + \frac{cN}{a} + \left(\frac{1-c}{2}\right) M^2 t^{-2r}\right)$$

である。

証明は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-s}} + \frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i} \Gamma(1-s) \int_C \frac{e^{-mz}}{e^z - 1} z^{s-1} dz$$

という式を使う。c を十分小さい正の定数とし η を定理 2.3 で導入したものとする。ここで積分路 C は、実軸上正方向の無限遠点から $c\eta + i\eta(1+c)$ まで直線で移動する積分路を C_1、$c\eta + i\eta(1+c)$ と $-c\eta + i\eta(1-c)$ を直線で結んだ積分路を C_2、$-c\eta + i\eta(1-c)$ と $-c\eta - (2m+1)\pi i$ を直線で結んだ積分路を C_3、$-c\eta - (2m+1)\pi i$ から実軸上正方向の無限遠点に水平に戻る積分路を C_4 とおけば $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ である。ただし、$2\pi m = \eta$ である場合は C_2 において $z = i\eta$ を上方によけるように積分路を変更するものとする。上式の積分を評価していくと

$$\int_{C_1+C_3+C_4} \frac{e^{-mz}}{e^z - 1} z^{s-1} dz \ll \eta^{\sigma-1} e^{-\frac{1}{2}\pi t} e^{-At}$$

となるので

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-s}} + \frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i} \Gamma(1-s) \Big(\int_{C_2} \frac{e^{-mz}}{e^z - 1} z^{s-1} dz + O\big(\eta^{\sigma-1} e^{-\frac{\pi}{2}t - At}\big) \Big)$$

を得る。ここで被積分関数を展開すると

$$\int_{C_2} \frac{e^{-mz} z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \sum_{k=1}^{N} c_k \int_{C_2} (i\eta)^{s-1} \frac{\exp\left(\frac{i}{4\pi}(w - i\eta)^2 + \frac{\eta}{2\pi}(w - i\eta) - mw + \omega_k \left(\frac{w - i\eta}{i\sqrt{2\pi}}\right)\right)}{e^w - 1} dw$$
$$+ \int_{C_2} (i\eta)^{s-1} \frac{\exp\left(\frac{i}{4\pi}(w - i\eta)^2 + \frac{\eta}{2\pi}(w - i\eta) - mw\right)}{e^w - 1} R_N \left(\frac{w - i\eta}{i\sqrt{2\pi}}\right) dw \tag{3.1}$$

となる。ただし

$$R_N(z) = \exp\left((s-1)\log\left(1 + \frac{z}{\sqrt{t}}\right) - iz\sqrt{t} + \frac{1}{2}iz^2\right) - \sum_{k=1}^{N} c_k e^{\omega_k z}$$

である。ここで $Mt^{-r}b \le \dfrac{Nt^r}{aM}$, $x \le \dfrac{\sqrt{2\pi t}}{2}$, $Mt^{-r}b \le \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}} \le \dfrac{Nt^r}{aM}$ として (3.1) を評価すると

$$\int_{C_2} (i\eta)^{s-1} \frac{\exp\left(\frac{i}{4\pi}(w - i\eta)^2 + \frac{\eta}{2\pi}(w - i\eta) - mw\right)}{e^w - 1} R_N \left(\frac{w - i\eta}{i\sqrt{2\pi}}\right) dw$$
$$\ll \eta^{\sigma-1} e^{-\frac{1}{2}\pi t} \int_{\frac{\eta}{2}}^{-\frac{\eta}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\pi}\right) \left| R_N \left(\frac{\lambda e^{\frac{\pi}{4}i}}{i\sqrt{2\pi}}\right) \right| d\lambda$$
$$\ll \eta^{\sigma-1} e^{-\frac{1}{2}\pi t} \left(\frac{25}{4e}\right)^{\frac{N}{6}} \left(\frac{N}{t}\right)^{\frac{N}{6}} + \eta^{\sigma-1} e^{-\frac{1}{2}\pi t} \left(\frac{400N}{et^{6r}}\right)^{\frac{N}{6}} M^N \left(\frac{M}{B}\right)^{N-1} N^{\frac{5}{6}} + \eta^{\sigma-1} e^{-\frac{1}{2}\pi t} \left(\frac{25}{4e}\right)^{\frac{N}{6}} \left(\frac{N}{t}\right)^{\frac{N}{6}} +$$
$$+ \eta^{\sigma-1} e^{-\frac{1}{2}\pi t} \left(\frac{2M}{B}\right)^{N-1} \left(\frac{5e}{2N}\right)^{\frac{N-1}{3}} N! b^{-N} \times \exp\left(-\frac{cx^2}{4\pi} + Mt^{-r} b \frac{cx}{\sqrt{2\pi}} + \left(\frac{1-c}{2}\right) M^2 t^{-2r} b^2\right) \tag{3.2}$$

となる。C_2' を C_2 を両側に延長した直線とすると

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} c_k \int_{C_2'} (i\eta)^{s-1} \frac{\exp\left(\frac{i}{4\pi}(w-i\eta)^2+\frac{\eta}{2\pi}(w-i\eta)-mw+\omega_k\left(\frac{w-i\eta}{i\sqrt{2\pi}}\right)\right)}{e^w-1}dw \\
&= -\sum_{k=1}^{N} c_k (i\eta)^{s-1} \exp\left(i(2m\pi-\eta)\left(-\frac{1}{4\pi}(2m\pi-\eta)+\frac{\eta}{2\pi}\right)+\frac{\omega_k}{\sqrt{2\pi}}(2m\pi-\eta)\right)\times \\
&\qquad \times \Psi\left(\frac{\eta}{\pi}-2m+\frac{\omega_k}{i\sqrt{2\pi}}\right) 2\pi \exp\left(\frac{i\pi}{2}\left(\frac{\eta}{\pi}-2m+\frac{\omega_k}{i\sqrt{2\pi}}\right)^2-\frac{5i\pi}{8}\right) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

である。上式は L を 0 と $2\pi i$ の間を角度 $\pi/4$ で横切る直線とした時

$$\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}w^2+aw}}{e^w-1}dw = 2\pi\Psi(a)e^{i\pi(\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{8})}$$

であることを用いた。$x \leq \dfrac{\sqrt{2\pi t}}{2}$ だったので

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} c_k \int_{C_2'-C_2} (i\eta)^{s-1} \frac{\exp\left(\frac{i}{4\pi}(w-i\eta)^2+\frac{\eta}{2\pi}(w-i\eta)-mw+\omega_k\left(\frac{w-i\eta}{i\sqrt{2\pi}}\right)\right)}{e^w-1}dw \\
&\ll \eta^{\sigma-1}e^{-\frac{1}{2}\pi t}\left(\frac{2M}{B}\right)^{N-1}\left(\frac{5e}{2N}\right)^{\frac{N-1}{3}} N! \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\pi}+Mt^{-r}\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\right)d\lambda \\
&\ll \eta^{\sigma-1}e^{-\frac{1}{2}\pi t}\left(\frac{2M}{B}\right)^{N-1}\left(\frac{5e}{2N}\right)^{\frac{N-1}{3}} N! \times \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{cx^2}{4\pi}+cMt^{-r}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}+\left(\frac{1-c}{2}\right)M^2t^{-2r}\right) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

となる。(3.1), (3.2), (3.3), (3.4) より定理を得る。

参考文献

[1] 鹿野健、リーマン予想、日本評論社、1991.

[2] H. Bui, B. Conrey and M. Young, More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line. Acta Arith. **150** (2011), no. 1, 35-64.

[3] H. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York, 1974.

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line, Math. Z. **10** (1921), 283-317.

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor problems of Dirichlet and Piltz, Proc. London Math. Soc (2), **21** (1922), 39-74.

[6] H. von Mangoldt, Zu Riemann's Abhandlung 'Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse', J. Reine Angew. Math. **114** (1895), 255-305.

[7] G. F. B. Riemann,Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin(1859), 671-680.

[8] C. L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik, Abt. B: Studien, **2** (1932), 45-80.

[9] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford: Clarendon Press.2nd. ed. revised by D. R. Heath-Brown, 1986.