遠方で増大する非局所的非線型 Schrödinger 方程式について

眞崎 聡*

学習院大学理学部

1 序

本稿では, 非線型シュレディンガー方程式 (以下 *NLS* **方程式**)

$$\begin{cases} iu_t + \dfrac{1}{2}\Delta u = N(u)u, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{NLS}$$

を考察する. 但し N は非線型項をあらわす. 本稿では特に, 非線型項 N が非局所的なもの, つまり, 相互作用ポテンシャルと呼ばれる $\mathbb{R}_+$ 上の実数値関数 V を用いて

$$N(u)(x) = N_V(u)(x) := (V(|\cdot|) * |u|^2)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} V(|x-y|)|u(y)|^2 dy. \tag{1.1}$$

と与えられているものを考える. 特に, V が遠方における増大条件

$$|V(r)| \to \infty \text{ as } r \to \infty. \tag{1.2}$$

を満たすようなものを考えたい. ここで念頭にあるのは log 型ポテンシャル

$$V(r) = \pm \log r \tag{1.3}$$

か正べき乗型ポテンシャル

$$V(r) = \pm r^\gamma, \qquad \gamma > 0 \tag{1.4}$$

のどちらかである. このような非線型項は半導体のモデル方程式である Schrödinger-Poisson 方程式系の低次元版として現れる. 詳しくは [7] を参照されたい. 非線型項の "−" 符号は相互作用が **排斥的** に働く場合を表し一方 "+" 符号は**集約的**に働く場合を表している. N_V が意味を持つために, 初期値 u_0 に関して

$$\int_{\mathbb{R}^d} |V(|y|)||u_0(y)|^2 dy < \infty$$

という条件を課す. 以後, この条件を $u_0 \in \sqrt{|V|}^{-1} L^2$ などと表わす.

NLS 方程式において最も典型的な非線型項でありよく研究されているのは, べき乗型非線型項 $\pm|u|^{p-1}u$ である. $1 < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ ($d = 1, 2$ のときは $p > 1$) ならば, H^1 で局所適切であることが知られている. 詳しく述べると H^1 に属する任意の初期値に関して, (i) H^1 関数として時間について連続な解が局所的に存在し; (ii) その解は一意であり; (iii) その解は適切な位相で初期値に連続に依存しており; (iv) 保存則をもつ. NLS 方程式が持つ保存量は L^2 **ノルム**[1] $\|u(t)\|_{L^2}$ と**エネルギー**

$$\frac{1}{4}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \pm \frac{1}{p+1}\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

*masaki@math.gakushuin.ac.jp

[1] もしくは, 質量 $\|u(t)\|_{L^2}^2$.

である. これらの保存量から, 排斥的な場合 (非線型項の符号が “+”) と, $p > 1 + 4/d$ である場合には全ての初期値に対して解が大域的になることが知られている ([1] を参照). それ以外の場合には解が有限時間で爆発することもある.

非局所的な非線型項の典型例である Hartree 型非線型項 $\pm(|x|^{-\gamma} * |u|^2)u$ に対しても, $0 < \gamma < \min(4, d)$ ならば H^1 で局所適切であることがことが知られており, 非線型項が排斥的であるか $\gamma > 2$ ならば解は大域的である. 今回扱おうとしている方程式は, Hartree 方程式で考えるならば $\gamma < 0$ に相当し, 上で挙げた場合には当てはまらない場合になっている. 特に, 増大条件 (1.2) があることで, 非線型ポテンシャル N_V の振る舞いが通常と大きく異なっているため, それが今までとは別種の非線型効果を生み出す.

2 節では, 我々が扱おうとしている非線型項がどのような特徴を持ち, それを扱うためにはどうすればよいかを解説したい. そして, この方程式について知られている時間大域適切性の結果を紹介する. 3 節では, 解の挙動に関する今後の問題点を述べる.

2 方程式の定式化と適切性

2.1 定式化における問題点

一般的に方程式 (NLS) の解析においては積分方程式

$$u(t) = e^{\frac{it\Delta}{2}} u_0 - i \int_0^t e^{\frac{i(t-s)\Delta}{2}} (N(u)u)(s)ds \tag{2.1}$$

との同値性 (デュアメルの原理) が利用されることが多い[2]. この積分方程式が $u = \Phi(u)$ の形とみて, 解を写像 Φ の不動点ととらえるのである. これは常微分方程式の解の存在証明に用いられる Picard 近似と同じ発想である. 考える時間区間を十分小さいものにするなどして, (2.1) の右辺第 2 項が適当な意味で小さくできるならば, $u_{n+1} = \Phi(u_n)$, $u_0 = 0$ として定義した関数列 $\{u_n\}$ の極限として不動点 u が与えられる. (2.1) の右辺第 2 項が小さいとは, $u \sim e^{\frac{it\Delta}{2}} u_0$ を意味していて, これは非線型項の影響が小さく解が自由 Schrödinger 方程式 $iu_t + (1/2)\Delta u = 0$ に近いことも示唆している.

しかし, 増大条件 (1.2) を満たすような相互作用ポテンシャル V によって非局所的な非線型項 N_V が与えられた場合には, 広く知られているべき乗型非線型項 $\pm|u|^{p-1}u$ や Hartree 型非線型項 $\pm(|x|^{-\gamma} * |u|^2)u$ の持つものとは種類の異なる影響が現れ (2.1) の定式化は破綻してしまう. より詳しく述べると, 増大条件 (1.2) 下においては, どんなに u の空間減衰が速くても (たとえ u がコンパクト台を持っていても) 非線型ポテンシャル N_V が遠方でオーダー $O(|V(x)|)$ で発散する. このことから, 積分方程式

$$u(t) = e^{\frac{it\Delta}{2}} u_0 - i \int_0^t e^{\frac{i(t-s)\Delta}{2}} (N_V(u)u)(s)ds \tag{2.1'}$$

に書き直したときに次のような問題が起こる:

> (2.1') の右辺を Φ とおく. Φ が不動点を持つためには, 少なくとも Φ の値域が定義域に含まれるような関数空間を選ぶ必要がある. そのためには, u に N_V を乗ずることによって失われた空間方向の減衰を Schrödinger 発展作用素 $e^{\frac{i(t-s)\Delta}{2}}$ の作用 (と時間積分) によって回復する必要がある. Schrödinger 発展作用素については積分表示なども含めて詳しい性質が調べられており, このような減衰に関する非常に強い性質を引き出すことは期待できない.

このような理由で (2.1') の定式化が良くないということが結論付けられる.

[2] もちろん, 方程式を解くためにこの定式化が必要というわけではない. このように積分方程式を介さない解法も例えば [5] で紹介されている. ただ, (2.1) の形は解 u の振る舞いに関して多くの情報が得られるのでこのような形で定式化することは有用である.

2.2 非線型項の分解と劣 1 次条件

前節で考察した問題点を解決し, “良い” 定式化を導くために重要となるのが次の分解である:

$$\begin{aligned} N_V(u) = & \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|) + \int_{\mathbb{R}^d} (V(|x-y|) - V(|x|))|u(y)|^2 dy \\ =: & \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|) + \tilde{N}_V(u) \end{aligned}$$

ただし, ここで NLS 方程式固有の性質である L^2 ノルムの保存則 $\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2$ を仮定した. この性質は N が実数値であれば成り立つことが期待できるも[3]. ここで注意するのは, 右辺の第 1 項は方程式を解く前の段階で既にその時間的な挙動が完全に決定できていることである. そこでこの部分を**線型ポテンシャル**[4] とみなして Schrödinger 方程式の線型部に取り込む. こうすると, 線型ポテンシャルを加えた新しい線型部を $A = -\frac{1}{2}\Delta + \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|)$ として, (2.1’) とは異なる

$$u(t) = e^{-itA}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)A}(\tilde{N}_V(u)u)(s)ds, \tag{2.2}$$

という定式化が得られる. もし, V が

$$\text{任意の } y \in \mathbb{R}^d \text{に対して, } V(|x-y|) - V(|x|) \text{ は遠方で有界} \tag{2.3}$$

という条件を満たすなら, 新しい非線型項 $\tilde{N}_V$ はもはやこれまで問題となっていた遠方での発散を起こさないので, 扱いは難しくない. 実際に不動点定理に基づく通常の議論で解くことが可能になる. この条件を**劣 *1* 次条件**と呼ぶことにする. ここで注意したいのは, (2.2) が不動点を持つということは, 解が線型ポテンシャル付き自由 Schrödinger 方程式 $iu_t - Au = 0$ に近いことも意味している. このことから, この分解は本質的であることが伺える.

まとめると, N_V は遠方で発散しているが, (2.3) という条件下では, N_V 主部は時間に依存せずそれを線型ポテンシャルとして抜き出すことで上手くいく. 実際に, log 型ポテンシャル (1.3) はこの方法で取り扱うことができる ([6] を参照). 正べき型ポテンシャル (1.4) の場合でも劣 1 次にあたる $\gamma \leqslant 1$ の場合なら状況は同じである ([3, 10, 6, 7] を参照).

2.3 ガリレイ変換と劣 2 次条件

さて, ここまでの議論は相互作用ポテンシャルが劣 1 次条件 (2.3) を満たさない場合 (例えば, 正べき型ポテンシャル (1.4) で $\gamma > 1$ の場合) には適用できない. 今までの議論を拡張し, より広いクラスを扱いたい. そのため, (2.3) を次のように変更する:

> ある $\mathbb{R}^d$ 値関数 W がとれて, 任意に止めた $y \in \mathbb{R}^d$ に対して $V(|x-y|) - V(|x|) - W(x) \cdot y$ が $|x| \to \infty$ のときに有界であるようにできる.

ただし, $\cdot$ は $\mathbb{R}^d$ における通常の内積を表す. 以後, この条件を **劣 *2* 次条件**と呼ぶことにする. 劣 1 次条件 (2.3) は劣 2 次条件において $W = 0$ と選べる場合と解釈することができることに注意したい. 正べき型非線型項 (1.4) では, $\gamma \leqslant 2$ ならば W を $W(x) = \mp\gamma|x|^{\gamma-2}x$ととることによって劣 2 次条件が満たされることが分かる.

いま,

$$\tilde{\tilde{N}}_V(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (V(|x-y|) - V(|x|) - W(x)\cdot y)|u(y)|^2 dy,$$

[3]形式的には, 方程式 (NLS) に $\overline{u}$ を掛け, その虚部を積分することで得られる.

[4]厳密に言うと, $V(|x|)$ は原点に特異性を含みうる. その場合には, $\|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|)$ を, 適当な cut-off 関数 χ をとって $\|u_0\|_{L^2}^2 \chi(|x|)V(|x|)$ などで置き換えればよい. ここでの問題点は空間遠方だけで生じているのでどちらをとっても本質的には何も変わらない.

を導入する. これは劣 2 次条件下では扱いが易しいものである. そして, 上の分解は次のように修正される:

$$N_V(u) = \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|) + \tilde{\tilde{N}}_V(u) + W(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} y|u(y)|^2 dy.$$

右辺の第 3 項が新しい部分で, 第 1 項と第 2 項は問題ないことが既に分かっているものである.

第 3 項の扱いについて考察しよう. ベクトル $\int_{\mathbb{R}^d} y|u(y)|^2 dy$ は **質量中心** とでも呼ぶべきもので, 量子力学で考えると粒子が存在する位置の期待値を表すものである. ここでのアイデアは**質量中心座標**を導入することで, 質量中心が (見かけ上) 原点に固定されるようにすることである. より詳しく述べる. 先ほどの L^2 保存法則と同様に, (NLS) で N が実数値ならば,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} y|u(y)|^2 dy = \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u(y)} \nabla u(y) dy$$

が成り立つことが, 少なくとも形式的には分かる. 同様に, 今考えている (NLS) は線型ポテンシャルや磁場などの外力を含まないものであるので, モーメント保存則と呼ばれる

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u(y)} \nabla u(y) dy = 0$$

が成り立つ[5]. これらから $\int_{\mathbb{R}^d} y|u(y)|^2 dy$ は実は $\mathbb{R}^d$ 内の直線

$$\int_{\mathbb{R}^d} y|u(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^d} y|u_0|^2 dy + t\, \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u_0} \nabla u_0 dy \tag{2.4}$$

であることが分かる. つまり, 外力がないので, 物体は等速直線運動をするのである. 今, 実際に (2.4) が成り立つと仮定しよう.

ここで, 次の**ガリレイ変換**を導入する: もし $u(t,x)$ が (NLS) の解であるならば, 任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$u_{a,b}(t,x) := e^{-\frac{i}{2} a \cdot (at+b)} e^{ix \cdot a} u(t, x - at - b)$$

も再び解になる. これは初期時刻において物理空間で b だけ, フーリエ空間 (運動量空間に対応) で a だけ平行移動させることに対応する. このとき, L^2 ノルム保存則から

$$\int_{\mathbb{R}^d} y|u_{a,b}(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^d} y|u(y)|^2 dy + \|u_0\|_{L^2}^2 (at + b) \tag{2.5}$$

となる. したがって (NLS) の解 u が与えられたとき,

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{\|u_0\|_{L^2}^2} \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u_0} \nabla u_0 dy, \\ b_0 &= -\frac{1}{\|u_0\|_{L^2}^2} \int_{\mathbb{R}^d} y|u_0|^2 dy, \end{aligned}$$

と選んでおけば, u_{a_0,b_0} は (NLS) の解であって, $\int_{\mathbb{R}^d} y|u_{a_0,b_0}(y)|^2 \equiv 0$ を満たす. このような u_{a_0,b_0} に対して, 上で導入した非線型項の分解を適用すると問題だった項は消えてしまい,

$$N_V(u_{a_0,b_0}) = \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|) + \tilde{\tilde{N}}_V(u_{a_0,b_0})$$

になる. 以上により, u_{a_0,b_0} は

$$u_{a_0,b_0}(t) = e^{-itA} u_{a_0,b_0}(0) - i \int_0^t e^{-i(t-s)A} (\tilde{\tilde{N}}_V(u_{a_0,b_0}) u_{a_0,b_0})(s) ds, \tag{2.6}$$

を解く. ここで $A = -\frac{1}{2}\Delta + \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|)$ である. この方程式は通常の手法が適用できる形になっている[6]. こうして, 方程式 (2.6) の解 u_{a_0,b_0} が得られ, それが L^2 ノルム保存則とモーメント保存則を満たすならば, 逆のガリレイ変換に変換によって u が与えられる.

[5]これは運動の第一法則 “外力を受けない限り物体はその速度を変えずに運動する” を述べている.

[6]可解性の鍵になるのは発展作用素 e^{-itA} に対する Strichartz 評価である. このためには $\partial^\alpha V \in L^\infty$ が $|\alpha| \geqslant 2$ に対して成りたてば良いことが知られている. この条件は上の劣 2 次条件と本質的に同じものになっている.

2.4 適切性

以上の議論によって定式化した方程式 (2.2) や (2.6) には通常の摂動論が適用でき, 次を得る:

定理 2.1 ([6, 7])**.** 相互作用ポテンシャル $V(x)$ が劣 2 次条件を満たすとき初期値問題 (NLS) は $H^1 \cap \sqrt{|V|}^{-1} L^2$ で時間大域適切. 特に, $\pm \log r$ か $\pm r^\gamma$ で $0 < \gamma \leqslant 2$ を満たす場合には大域適切性が成り立つ.

3 解の時間大域的挙動

解の存在が分かったので, 次の自然な問いはその解の挙動についてである. 特に時刻無限大での挙動を考えてみよう. 典型的な挙動の例として, 非線型性が弱くなり線型方程式の解のように振舞う**散乱解**と, 非線型性と線型の分散効果が釣り合うことにより特定の波形が長時間保たれる**定在波解**の二つがある. これ以外にも, より非線型性が強い場合の例として有限時間で爆発するというパターンもあるのだが, 今回考えているモデルでは爆発は起こらない.

3.1 散乱解について

V が負で相互作用が排斥的である場合, 散乱現象が起こることが一般には期待される. しかし, この場合には具体的なことはほとんど何も分かっていない状態である. まず, 通常の散乱のように自由 Schrödinger 方程式 $i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0$ の解に近づくことは考えにくい. 特に, 非線型項が線型ポテンシャルを作り出していることから方程式の線型部分が $i\partial_t - (-\frac{1}{2}\Delta + \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|))$ へと変わっていて, 実際にこの線型部をもつ解へと漸近することが予想される. しかし, この予想を確かめるのはなかなか難しいと思われる. 一番の障害になっているのは線型方程式 $(i\partial_t - (-\frac{1}{2}\Delta + \|u_0\|_{L^2}^2 V(|x|)))u_{\mathrm{lin}} = 0$ の解析が進んでいないことで, これまで, いくつかの例外的な場合を除いて, 線型ポテンシャルが遠方で増大する場合における線型 Schrödinger 方程式の解の大域的な (漸近的な) 振る舞いや, 分散型評価・Strichartz 評価に関して何も知られていない.

一方, その例外にあたる $V(r) = -r^2$ の場合は非常に詳細に調べることが可能で, ポテンシャル付きの線型 Schrödinger 方程式だけでなく非線型の (NLS) の方程式に対してもその解を具体的に書き下すことが可能である ([7, 8] 参照). その解の表示からは, 非線型方程式の解は, 線型ポテンシャル付きの線型解 u_{lin} に位相の修正 (cf. 長距離散乱) とガリレイ変換を施したものであることが読み取れる. このことから, 一般の場合にも位相の修正と線型ポテンシャルの影響は現れること, また劣 1 次でないときにはガリレイ変換を考慮に入れる必要があることは想像できる. しかし, 完全な理解からは程遠いのが現状である.

3.2 定在波解について

V が正の場合には, 相互作用が集約的な力を生み出すため定在波が存在することが予想される. 今回のモデルは相互作用が非常に強力に空間遠方への分散を束縛するため, 定在波解の存在は比較的容易に示すことができる. 実際に, log 型ポテンシャル $V(r) = \log r$ や 1 次ポテンシャル $V(r) = r^\gamma$ $(0 < \gamma \leqslant 2)$ の場合には基底状態解の存在が示されている ([2, 4, 11, 9]). 今後, それらの定在波の安定性が明らかにされることが期待される. また [8] では, 調和振動子にあたる $V(r) = r^2$ の場合を考えて具体的に書き下すことのできる基底状態解と励起状態解を与えた. これらに関してはその軌道安定性も調べることが可能である.

参考文献

[1] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.

[2] P. Choquard and J. Stubbe, *The one-dimensional Schrödinger-Newton equations*, Lett. Math. Phys. **81** (2007), no. 2, 177–184.

[3] M. De Leo and D. Rial, *Well posedness and smoothing effect of Schrödinger-Poisson equation*, J. Math. Phys. **48** (2007), no. 9, 093509, 15.

[4] M. De Leo, *On the existence of ground states for nonlinear Schrödinger-Poisson equation*, Nonlinear Anal. **73** (2010), no. 4, 979–986.

[5] S. Masaki, *Local existence and WKB approximation of solutions to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 12, 2253–2278.

[6] S. Masaki, *Energy solution to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space*, SIAM J. Math. Anal. **43** (2011), no. 6, 2719–2731.

[7] S. Masaki, *Analysis of Hartree equation with an interaction growing at the spatial infinity*, archived as `arXiv:1103.3083`, 2011.

[8] M. Maeda and S. Masaki, *An example of stable excited state on nonlinear Schrödinger equation with nonlocal nonlinearity*, to appear in Differential Integral Equations, archived as `arXiv:1109.2653`, 2011.

[9] M. Maeda and S. Masaki, *A survey on nonlinear Schrödinger equation with growing nonlocal nonlinearity*, preprint.

[10] H. P. Stimming, *The IVP for the Schrödinger-Poisson-Xα equation in one dimension*, Math. Models Methods Appl. Sci. **15** (2005), no. 8, 1169–1180.

[11] J. Stubbe, *Bound state for two-dimensional Schrödinger-Newton equations*, archived as `arXiv:0807.4059`, 2008.