Khovanov-Lauda-Rouquier 代数について

小西 正秀[*]

名古屋大学多元数理研究科 博士後期課程一年

概 要

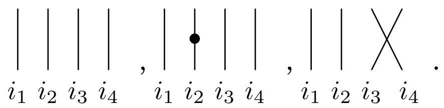
Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 (以下 KLR 代数) とは 2008 年に Khovanov-Lauda により，またそれと独立に Rouquier により定義された，新たな代数です．今回の発表では，まだ認知度の低い KLR 代数がどういうものであるかを，具体例を見ることにより知ってもらうことを目的としました．この報告書では，当日発表した内容そのものの再現を目指したため，論理的な飛躍も存在しますが，発表の流れを感じてもらえれば幸いです．

1 KLR 代数の定義らしきもの

知っている人のための注意：ここでいう代数とは，結合律を満たし，単位元を持つものを指します．

代数とは手っ取り早く言ってしまえば「うまい積が入ったベクトル空間」のことです．「ベクトル空間とみなせる環」とも言えます．なので，具体的に代数を作るとき，まずベクトル空間としての基底を取り，基底同士のうまい積を定めるという方法が良く用いられます．

さて今回，生成元 (基底ではありません) として採用するのは，例えば次のようなものです：



見て分かる通り，図です．何本かの糸を使いますが，本数は最初に固定されます．また，各糸の下に添えられてある i_n はその糸の色を表します．どの色を何度使うかも最初に固定されます．糸には黒玉が配置できます．糸同士の交点以外の場所になら，何処にでも何個でも（ただし有限個）置けます．また，糸同士が交差する際，上下は気にしません．

その他，三本以上の糸が一点で交わることはない等，細かい規則がありますが，今回は単純に上記のような図を組み合わせたものだと思ってください．また，図の間には関係が定まります．どのような関係を定めるかは箙[1] Γ によって定まりますが，後述の通り，今回は Γ として特別なもののみ考えるので，定まる関係も制限されます．

先述の通り，これらの図の間にうまい積を定めなければなりませんが，生成元 x と y に対し積 xy を定める方法は至って簡単です．x と y は図で表されているので，x を上に，y を下に置いて引っ付けてしまいます．ただし，今は糸に色がつけられているので，x の下端と，y の上端の色の並びが一致する場合のみ引っ付けます．そうでなければ 0 ということにすると，うまい積となります．

[*] m10021t@math.nagoya-u.ac.jp

[1] 知らない方は有向グラフと思って下さって結構です．

2 今回の設定と説明

一般に，KLR 代数は箙 Γ と，その頂点に対する非負整数による重み付け $\alpha = \sum_{\Gamma\text{の頂点 } i} a_i\alpha_i (a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ によって定まります．Γ は関係の場合分けを定めます．α は色が i である糸を a_i 本，合計 $\sum_{\Gamma\text{の頂点 } i} a_i$ 本の糸を用いて図を作ることを指します．

また，もう一つ Γ の頂点に対する非負整数による重み付け $\Lambda = \sum_{\Gamma\text{の頂点 } i} b_i\Lambda_i (b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ がイデアルを定め，それによる商をとったものを巡回 KLR 代数と呼びます．具体的なことは後で述べます．

今回は，箙 Γ を n 点サイクル $C_n (n > 2)$ に限ります．即ち，頂点が $\{1, 2, \cdots, n\}$ で，k から $k + 1 (k = n$ なら n から $1)$ へ矢が引かれている箙です．以下で述べる命題は $n = 2$ の場合も含めて成り立ちますが，考えるべき関係式が増えるため割愛します．

また，$\alpha = \sum_{\Gamma\text{の頂点 } i} \alpha_i$，$\Lambda = \Lambda_0$ とします．即ち，各色の糸が 1 本ずつ，合計 n 本の糸を用いた図を今回は取り扱います．

さて，生成元を指定するために次の記号を導入します．

$$\mathrm{Seq}(\alpha) = \{(i_1, i_2, \cdots, i_n) \in I^\alpha \mid \text{各 } i \in I \text{ が } a_i \text{回表れる}\}$$

これは一般的な定義であり，今回の場合は $\mathrm{Seq}(\alpha)$ の元は n 文字の順列となります．

定義 2.1. KLR 代数とは，次の生成元と，その間の関係で与えられる代数である．

- 生成元 : $\{\mathbf{e}(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in \mathrm{Seq}(\alpha)\} \cup \{y_1, \cdots, y_n\} \cup \{\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}\}$
- 関係 :
  $\mathbf{e}(\mathbf{i})\mathbf{e}(\mathbf{j}) = \delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$,
  $\sum_{\mathbf{i}\in\mathrm{Seq}(\alpha)} \mathbf{e}(\mathbf{i}) = 1$,
  $y_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \mathbf{e}(\mathbf{i})y_k$,
  $\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \mathbf{e}(\mathbf{s_k}\cdot\mathbf{i})\psi_k$,
  ($\mathbf{s_k}\cdot\mathbf{i}$ は $\mathbf{i}$ において i_k と i_{k+1} を入れ換えたもの),
  $y_ky_l = y_ly_k$,
  $\psi_ky_l = y_l\psi_k \ (l \neq k, k+1)$,
  $\psi_k\psi_l = \psi_l\psi_k \ (|k-l| > 1)$,
  $\psi_ky_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_k\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i})$,
  $y_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \psi_ky_k\mathbf{e}(\mathbf{i})$,
  $$\psi_k^2\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \begin{cases} \mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k \text{と } i_{k+1} \text{の間に矢がない}) \\ (y_{k+1} - y_k)\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k \to i_{k+1}) \\ (y_k - y_{k+1})\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k \leftarrow i_{k+1}) \end{cases},$$
  $\psi_k\psi_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i})$.

さっきまで図ばかりだったのに，急に記号だらけになったと思われたかもしれませんが，$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ が左から順に i_k で色付けされた平行な n 本の糸，y_k が k 番目に黒玉がついた平行な n 本の糸，ψ_k は平行な n 本の糸の k 番目と $k+1$ 番目を交差させたものとなっています[2]．また，y_k や ψ_k においては色の情報もつけるべきなのですが，省略して $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ との積として与えています．

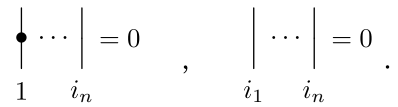
[2]発表における板書では並行して書きましたが，TeX 能力の不足により式と図を分けて書きます．

さて，$\Lambda = \Lambda_0$ に対するイデアルを定義しましょう．一般的には，$\left\{ y_1^d \mathbf{e}(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in \mathrm{Seq}(\alpha), d = b_{i_1} \right\}$ で生成されます．なので今回の場合は，$y_1\mathbf{e}(\mathbf{i})(i_1 = 1)$ と $\mathbf{e}(\mathbf{i})(i_1 \neq 1)$ で生成されます．このイデアルで先程定めた KLR 代数の商を取ったものが巡回 KLR 代数であり，今回はそれを H_n で表します．

図によるおさらいですが，今回図式に対して成り立つ関係は以下の通りです．

- イデアルによるもの．

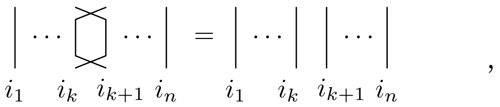
  $y_1\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0 \ (i_1 = 0)$, $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0 \ (i_1 \neq 1)$.

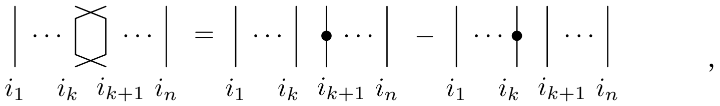


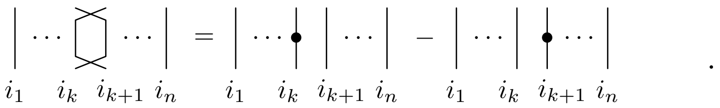
- 関係によるもの

  $\psi_k y_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_k\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i})$, $y_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \psi_k y_k\mathbf{e}(\mathbf{i})$.

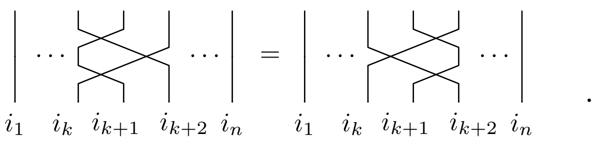
  $\psi_k^2\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \mathbf{e}(\mathbf{i})$, $\psi_k^2\mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i}) - y_k\mathbf{e}(\mathbf{i})$, $\psi_k^2\mathbf{e}(\mathbf{i}) = y_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) - y_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i})$.







  $\psi_k\psi_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = \psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i})$.



イデアルによる関係から分かる通り，今回の設定では $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ の大半は消えてしまいます．具体的には，全部で $n!$ 個ある $\mathbf{i}$ のうち，$(n-1)!$ 個に対し $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となります．更に，他にも関係があるため，$\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となる $\mathbf{i}$ がまだありそうに思えます．一体どのような $\mathbf{i}$ に対し $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となるのかを決定するのが命題 3.1 です．

また，y_k，即ち黒玉についても同様に，何個か付けると 0 になってしまいそうなので，果たして何個が限度なのかを決定するのが命題 3.2 です．

それらから，H_n の構造が n に関して規則的な変化を示すということが予想されます．そのことを具体的に求めたものが定理 3.3 です．

3 命題集

命題 3.1. H_n において，$\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$ なる $\mathbf{i} \in \mathrm{Seq}(\alpha)$ は 2^{n-2} 個存在する．更にそれらは全て原始冪等元となる．

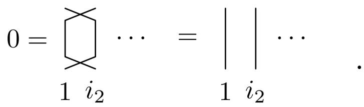
証明. n を固定し，$\mathbf{i}$ を $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ が 0 とならないように i_1 から順次定めていくことにより，高々2^{n-2} 個しか存在しないことを示す．厳密に 2^{n-2} 個存在することと，全てが原始冪等元となることについては割愛する．

始めに，イデアルによる関係から i_1 として取りうるのは 1 のみである．

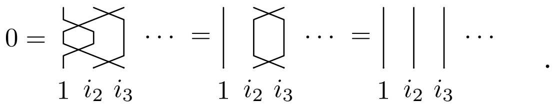
このとき i_2 としては箙において 1 に隣接している 2 か n しか取りえない．仮にそれ以外であった場合，

$$\begin{aligned}\mathbf{e}((1, i_2, \cdots)) &= \psi_1^2 \mathbf{e}((1, i_2, \cdots)) \\ &= \psi_1 \mathbf{e}((i_2, 1, \cdots))\psi_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

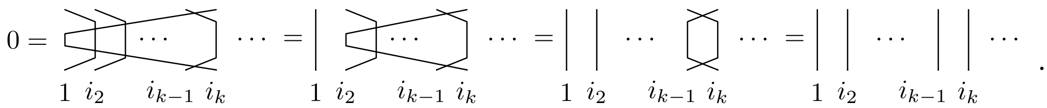
となる．これを図示すると次の通りである．



続いて i_3 を定める．i_3 として 1 と i_2 で張られる部分箙に隣接しない点を取ったとすると，次の図から $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となるので，i_3 として取りうる点は部分箙に隣接する二点の内のどちらかとなる．



同様に，$k < n$ として i_{k-1} までが決定されたとき，i_k を $0, i_2, \cdots, i_{k-1}$ で張られる部分箙に隣接しない点とすると，i_k は $0, i_2, \cdots, i_{k-1}$ のいずれとも隣接しないので，次の図から $\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となる．従って i_k として取りうる点は部分箙に隣接する二点の内のどちらかとなる．



最後に，i_{n-1} までが定まったときは，i_n として残りの一点が取れる．

以上から，$\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となることを避けて構成しうる $\mathbf{i}$ は最大で 2^{n-2} 個となる． □

命題 3.2. H_n において，$\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$ とする．このとき次が成り立つ．

(*a*) $y_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0\ (1 \leq k < n)$,

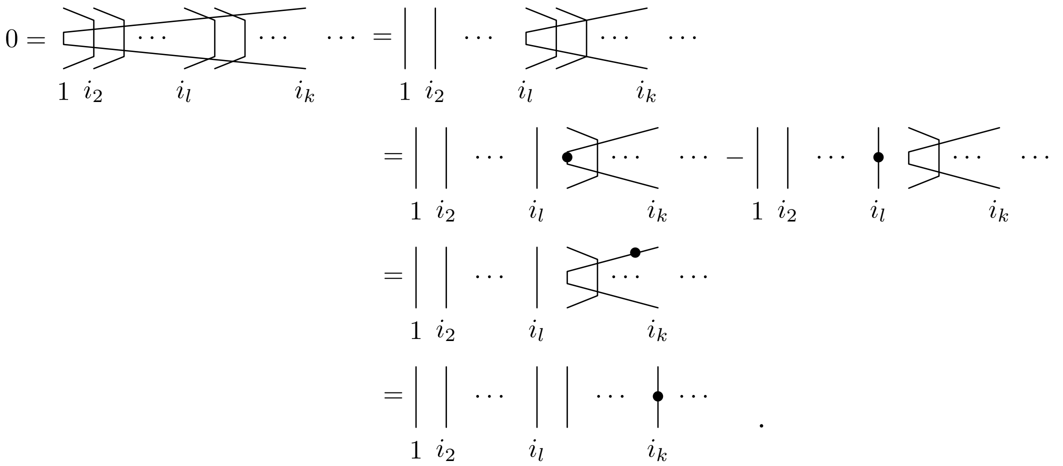
(*b*) $y_n^2\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$,

(*c*) $y_n\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$.

証明. (c) の証明は割愛する．(a) の証明には帰納法を用いる．

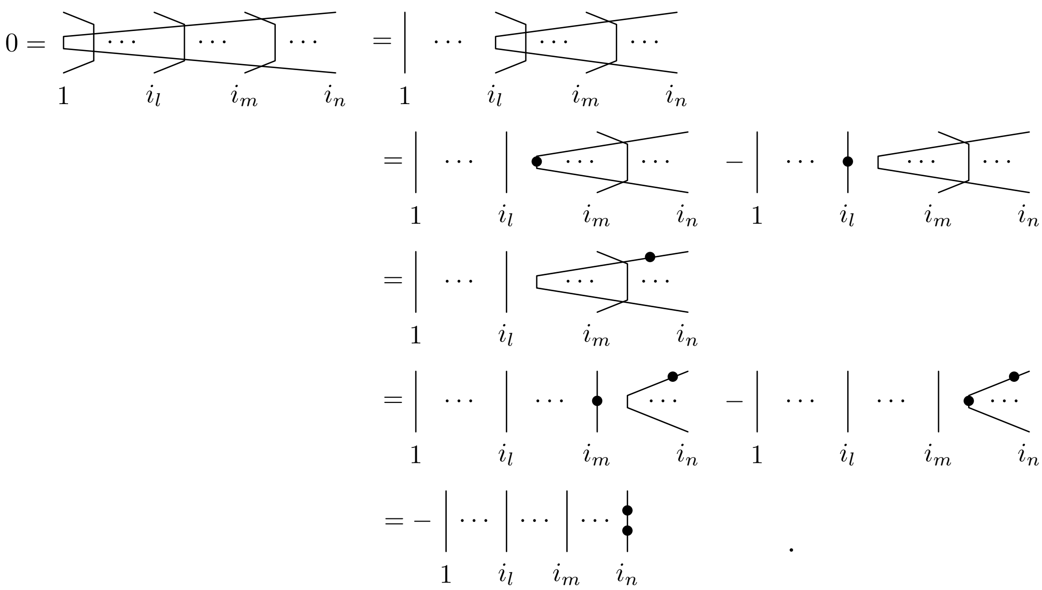
$k = 1$ に対しては，定義より $y_1\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ である．

$k < n$ なる k に対し，$m < k$ ならば $y_m\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ を仮定した上で，$y_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ を示す．命題 3.1 から，i_k と i_l が隣接する $1 \leq l < m$ がただ一つ存在する．従って，仮定より $y_l\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ であることを用いて，次の図により $y_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ が示される．



一行目から二行目の変形において $i_l \to i_k$ を仮定したが，$i_l \leftarrow i_k$ としても符号が逆転するだけである．よって (a) が示せた．

同様に，$k < n$ に対し $y_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ であることと，i_n に隣接する i_l と i_m $(1 \leq l < m < n)$ が取れることから，次の図により $y_n^2\mathbf{e}(\mathbf{i}) = 0$ となり，(b) が示される．



この変形においては $i_l \to i_n \to i_m$ を仮定したが，$i_l \leftarrow i_n \leftarrow i_m$ としても途中の符号が逆転するだけである． □

以上の命題から，冪等元が倍々に増えていくこと，そして n に依らず黒玉は右端の糸以外には一つもつけられないことから，n に対し H_n の構造が規則的に変化していくと予想され，それをある種の埋め込みによって表したものが次の定理です.

定理 3.3. H_n の冪等元 $\mathbf{e}$ を次のように定める.

$$\mathbf{e} = \sum_{\mathbf{i}:i_2=2} \mathbf{e}(\mathbf{i})$$

このとき，代数の同型

$$H_{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{e}H_n\mathbf{e}$$

が以下のようにして得られる.

$$\mathbf{e}(\mathbf{i}) \mapsto \mathbf{e}(\hat{\mathbf{i}}) \ , \ y_{n-1} \mapsto y_n \ , \ \psi_k \mapsto \psi_{k+1} \ .$$

ただし，$\mathbf{i} = (1, i_2, i_3, \cdots, i_n)$ に対し，$\hat{\mathbf{i}} = (1, 2, i_2+1, i_3+1, \cdots, i_n+1)$ と定める.

参考文献

[BK] J. Brundan, A. Kleshchev, Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras, arXiv:0808.2032.

[KL] M. Khovanov, A. D. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, arXiv:0803.4121.