レベル p の 2 次ジーゲルカスプ形式の具体的構成について

児玉浩尚*

近畿大学大学院総合理工学研究科理学専攻

1 緒言

1 変数のモジュラー形式の場合において、アイゼンシュタイン級数のウエイトをうまく取り、その p 進極限を考えると、レベル p の合同部分群 $\Gamma_0(p)$ に対するアイゼンシュタイン級数になり、また、レベル p の合同部分群 $\Gamma_0(p)$ に対するモジュラー形式は $SL(2,\mathbb{Z})$ のあるモジュラー形式の列の p 進極限になることが Serre によって知られている ([13]).

この結果を多変数モジュラー形式に拡張したものの研究も行われている．例えばジーゲルアイゼンシュタイン級数の p 進極限がレベル p のジーゲルモジュラー形式になっていることが，水野氏，長岡氏などによりよく研究されている ([1],[7],[8],[9]).

アイゼンシュタイン級数についてはある程度知られているが，カスプ形式についても p 進極限がレベル p のガンマゼロ型の合同部分群に対するカスプ形式になるものが研究されている．水野氏と菊田氏によりウエイトが 4 より大きい場合カスプ形式の p 進極限はカスプ形式にならないことが知られている ([3]).

論文 [11] において，長岡-中村は 2 次の全ジーゲルモジュラー群に関するカスプ形式の一つの具体的構成法を与えた。ここでいう「具体的構成」とは，T が与えられたとき，フーリエ係数 $a(T)$ が具体的に計算可能であることを意味する。このカスプ形式のフーリエ係数は，エルミートアイゼンシュタイン級数のジーゲル上半空間への制限とジーゲルアイゼンシュタイン級数の差として構成されるが，このカスプ形式の p 進極限をとれば，レベル p のガンマゼロ型の合同部分群に対する 0 にならないカスプ形式が得られることをこの報告集で紹介する．

2 2 次のジーゲルモジュラー形式

次数 2 のジーゲル上半空間 $\mathbb{H}_2$ は $\mathbb{H}_2 := \{Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{C}) \mid Y > 0(\text{正定値})\}$ で定義される領域で，次数 2 のジーゲルモジュラー群 $\Gamma^{(2)} := Sp_2(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}_2$ 上に不連続に作用する．合同部分群 $\Gamma' \subset \Gamma^{(2)}$ に対して，ウエイト k のジーゲルモジュラー形式 (resp. カスプ形式) の集合を $M_k(\Gamma')$ (resp. $S_k(\Gamma')$) と表す.

以下では，Γ' は $\Gamma^{(2)}$ であるか，またはその合同部分群

$$\Gamma_0^{(2)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^{(2)} \mid C \equiv O \pmod N \right\}$$

のいずれかであるとする．このとき $F \in M_k(\Gamma')$ は次の形のフーリエ展開を持つ.

$$F(Z) = \sum_{O \leq T \in \Lambda_2} a(T;F) \exp[2\pi i \mathrm{tr}(TZ)]$$

ここで Λ_2 は

$$\Lambda_2 := \{T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Q}) \mid t_{11}, t_{22}, 2t_{12} \in \mathbb{Z}\}$$

*kodama@math.kindai.ac.jp

で定義される $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ 内の格子である．

3 コーエンの関数とクリークの関数

この節では，ジーゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数やエルミートアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の本質的部分を表示するコーエンの関数とクリークの関数を導入する．

コーエンの関数$H(r,N)$

$(-1)^r N = Df^2$ となる $r, N \in \mathbb{N}$ を考える．ここで D は基本判別式で，$f \in \mathbb{N}$ とする．これらに対して

$$H(r,N) := L(1-r,\chi_D) \sum_{0<d|f} \mu(d)\chi_D(d)d^{r-1}\sigma_{2r-1}(f/d)$$

と定義される関数 $H(r,N)$ をコーエンの関数と呼ぶ．ここで $L(s,\chi)$ はディリクレの L-関数，μ はメービウス関数である．コーエンの関数は，より一般的な (r,N) に対して定義されるが，我々の必要とするのは上記の場合である（[2],p.272）．

クリークの関数$G(s,N)$)

χ_{-4} をガウス数体 $\mathbb{Q}(i)$ のクロネッカー指標とする．$s, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，ガウス数体上のクリークの関数 $G(s,N)$ は次で定義されるものである．

$$G(s,N) := \begin{cases} \frac{1}{1+|\chi_{-4}(N)|}(\sigma_{s,\chi_{-4}}(N) - \tilde{\sigma}_{s,\chi_{-4}}(N)) & N > 0, \\ -\frac{B_{s+1,\chi_{-4}}}{2(s+1)} & N = 0 \end{cases}$$

ここで $B_{m,\chi}$ は一般ベルヌーイ数で $\sigma_{s,\chi-4}(N)$ と $\tilde{\sigma}_{s,\chi_{-4}}(N)$ は次の様に定義される関数である．

$$\sigma_{s,\chi-4}(N) := \sum_{0<d|N} \chi_{-4}(d)d^s,\ \tilde{\sigma}_{s,\chi_{-4}}(N) := \sum_{0<d|N} \chi_{-4}(N/d)d^s.$$

4 2次のジーゲルカスプ形式の具体的構成

ここで，今回紹介する構成の基礎となる論文 [11] の主結果を述べておく．

定理 4.1. [11]

ジーゲルカスプ形式 $f_k \in S_k(\Gamma^{(2)})$ で，そのフーリエ係数 $a(T; f_k)$ が

$$a(T; f_k) = \sum_{0<d|\varepsilon(T)} d^{k-1}\alpha_k(4\det(T)/d^2),$$

で与えられるものが存在する．ここで

$$\alpha_k(N) := H(k-1,N) - \frac{B_{2k-2}}{B_{k-1,\chi_{-4}}} \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s^2 \leq N}} G(k-2, N-s^2),$$

であり，B_m は m 番目のベルヌーイ数，$H(r,N)$，$G(s,N)$ はそれぞれ前節で定義されたコーエンの関数，クリークの関数，$\varepsilon(T) := \max\{l \in \mathbb{N} \mid l^{-1}T \in \Lambda_2\}$ は T の content である．

5　カスプ形式の p 進極限

前節で構成された全ジーゲルモジュラー群に対するカスプ形式から，p 進極限を取れば，$\Gamma_0^{(2)}(p)$ のカスプ形式が得られる．これを紹介するために，コーエンの関数とクリークの関数の p 進極限として得られる二つの関数 $H_p^*(N)$，$G_p^*(N)$ を定義する．

コーエンの関数の p 進極限

以前の様に $N \equiv 0$ *or* $3 \pmod 4$ なる $N \in \mathbb{N}$ に対して $N = -D\dot{f}^2$ なる分解を考える．このとき

$$H_p^*(N) := -(1-\chi_D(p))B_{1,\chi_D} \sum_{\substack{0<d|f \\ (d,p)=1}} \mu(d)\chi_D(d)\sigma_1^*(f/d), \tag{5.1}$$

ここで

$$\sigma_1^*(m) = \sum_{\substack{0<d|m \\ (d,p)=1}} d.$$

補題 5.1.

$$\lim_{m\to\infty} H(1+(p-1)p^{m-1}, N) = H_p^*(N)$$

クリークの関数の p 進極限

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$G_p^*(N) := \begin{cases} \frac{1-(-1)^{\mathrm{ord}_p(N)}}{1+|\chi_{-4}(N)|}\sigma_{0,\chi_{-4}}^*(N) & \text{if } N > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{if } N = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

ここで

$$\sigma_{0,\chi_{-4}}^*(N) = \sum_{\substack{0<d|f \\ (d,p)=1}} \chi_{-4}(d).$$

補題 5.2.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{B_{2+2(p-1)p^{m-1}}}{B_{1+(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}} \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s^2\leq N}} G((p-1)p^{m-1}, N-s^2) = \frac{p-1}{6} \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s^2\leq N}} G_p^*(N-s^2)$$

ここで $G_p^*(N) = 0$ if $p \nmid N$ が成り立つことに注意しておく．

定理 5.3. p を $p \equiv 3 \pmod 4$ である素数とする．このときジーゲルカスプ形式 $f_p^* \in S_2(\Gamma_0^{(2)}(p))$ で，そのフーリエ係数 $a(T; f_p^*)$ が

$$a(T; f_p^*) = \sum_{\substack{0<d|\varepsilon(T) \\ (d,p)=1}} d\alpha_p^*(4\det(T)/d^2)$$

で与えられるものが存在する．ここで

$$\alpha_p^*(N) := H_p^*(N) - \frac{p-1}{6} \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s^2\leq N}} G_p^*(N-s^2) \tag{5.3}$$

であり，H_p^* と G_p^* は上記 (5.1)，(5.2) で定義されたものである．

系 5.4. 素数 p を $p \equiv 3 \pmod 4$ かつ $p > 7$ なるものとする．すると f_p^* は非自明なカスプ形式である．

注意 5.5. 定理ならびに系では，素数 p に $p \equiv 3 \pmod 4$ なる条件を課しているが，$p \equiv 1 \pmod 4$ の場合は，f_p^* は恒等的に零となる．

6 証明

証明. (補題 5.1)

$N=-D\dot{f}^2$ の関係式から

$$H(1+(p-1)p^{m-1},N)=-\frac{B_{1+(p-1)p^{m-1},\chi_D}}{1+(p-1)p^{m-1}}\sum_{0<d|f}\mu(d)\chi_D(d)d^{(p-1)p^{m-1}}\sigma_{1+2(p-1)p^{m-1}}(f/d)$$

と書ける．クンマーの合同式を用いて $\lim_{m\to\infty}\frac{B_{1+(p-1)p^{m-1},\chi_D}}{1+(p-1)p^{m-1}}=(1-\chi_D(p))B_{1,\chi_D}$
となる．他方,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{0<d|f}\mu(d)\chi_D(d)d^{(p-1)p^{m-1}}\sigma_{1+2(p-1)p^{m-1}}(f/d)=\sum_{\substack{0<d|f\\(d,p)=1}}\mu(d)\chi_D(d)\sigma_1^*(f/d)$$

□

証明. (補題 5.2)

クンマーの合同式から

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{B_{2+2(p-1)p^{m-1}}}{B_{1+(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}}&=2\lim_{m\to\infty}\frac{B_{2+2(p-1)p^{m-1}}}{2+2(p-1)p^{m-1}}\frac{1+(p-1)p^{m-1}}{B_{1+(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}}\\&=2(1-p)\frac{B_2}{2}\frac{1}{(1-\chi_{-4}(p))B_{1,\chi_{-4}}}\\&=\frac{p-1}{6}\end{aligned}$$

ここで $\chi_{-4}(p)=-1$ と $B_{1,\chi_{-4}}=-\frac{1}{2}$ という事実を用いた．
次に

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\s^2\le N}}G((p-1)p^{m-1},N-s^2)$$

の計算を考える．
$N'=N-s^2>0$ のとき

$$G(((p-1)p^{m-1},N')=\frac{1}{1+\mid\chi_{-4}(N')\mid}(\sigma_{(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}(N')-\tilde{\sigma}_{(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}(N')).$$

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}(\sigma_{(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}(N')-\tilde{\sigma}_{(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}(N'))&=(1-(\chi_{-4}(p))^{\mathrm{ord}_p(N')})\sum_{\substack{0<d|N'\\(d,p)=1}}\chi_{-4}(d)\\&=(1-(-1)^{\mathrm{ord}_p(N')})\sigma^*_{0,\chi_{-4}}(N')\end{aligned}$$

である．
$N'=N-s^2=0$ のとき

$$G((p-1)p^{m-1},0)=-\frac{B_{1+(p-1)p^{m-1},\chi_{-4}}}{2(1+(p-1)p^{m-1})}$$

これから

$$G((p-1)p^{m-1},0)=-\frac{1}{2}(1-\chi_{-4}(p))B_{1,\chi_{-4}}=\frac{1}{2}$$

を得る．

以上から

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s^2\le N}} G((p-1)p^{m-1}, N-s^2) = \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s^2\le N}} G_p^*(N-s^2)$$

より補題は証明される． □

証明. (定理 5.3)

定理 4.1 のジーゲルカスプ形式 $f_k \in S_k(\Gamma^{(2)})$ において，ウエイト k を $2+(p-1)p^{m-1}$ としたものの p 進極限について補題 5.1 と補題 5.2 を適用することにより定理が得られる。

□

証明. (系 5.4)

定理 5.3 から

$$a(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; f_p^*) = \alpha_p^*(4) = H_p^*(4) - \frac{p-1}{6}(G_p^*(4)+2G_p^*(3)+2G_p^*(0))$$

ここで $p\equiv 3 \pmod 4$ のとき

$$H_p^*(4) = -(1-\chi_{-4}(p))B_{1,\chi_{-4}} = 1$$

であり，また

$$\frac{p-1}{6}(G_p^*(4)+2G_p^*(3)+2G_p^*(0)) = \frac{p-1}{6}$$

である．

したがって $p>7$ のとき

$$a(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; f_p^*) = \alpha_p^*(4) = 1-\frac{p-1}{6} = \frac{7-p}{6} < 0$$

が得られる．

□

参考文献

[1] S. Böcherer, S. Nagaoka,*On mod p properties of Siegel modular forms.*Math.Ann.**338**(2007),421-433.

[2] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters.* Math.Ann.**217**(1975),271-285.

[3] T. Kikuta, Y. Mizuno, *On p-adic Hermitian Eisenstein series and p-adic Siegel cusp forms.* Journal of Number Theory **132**(2012).1,pp.1949-1961.

[4] T. Kikuta,S. Nagaoka,*On a correspondence between p-adic Siegel-Eisenstein series and genus theta series.*Acta Arithmetica **134**(2008),111-126.

[5] H. Kodama, S. Nagaoka, Y. Nakamura ,*On level p Siegel cusp forms of degree two,*preprint, 2012.

[6] A. Krieg,*The Maass space on the Hermitian half-space of degree 2.*Math.Ann.**289**(1991),663-681.

[7] Y. Mizuno,*A p-adic limit of Siegel-Eisenstein series of prime level q*.Int. J.Number Theory,Vol.**4**,No.5(2008),1-12.

[8] Y. Mizuno,*On p-adic Siegel-Eisenstein series of weight k,*Acta Arith.**131**(2008)193-199.

[9] Y. Mizuno,S. Nagaoka,*Some congruence for Saito-Kurokawa lifts,*Abh.Math.Semin.Univ.Hambg.**80**,No.1(2010),9-23.

[10] S. Nagaoka,*On p-adic Hermitian Eisenstein series.*Proc.Amer.Math.Soc.**134**(2006),2533-2540.

[11] S. Nagaoka,Y. Nakamura,*On the restriction of the Hermitian Eisenstein series and its applications.*Proc.Amer.Math.Soc.**139**(2010),1291-1298.

[12] C. Poor,D.S. Yuen,*Dimensions of forms for $\Gamma_0(p)$ in degree two and small weights.*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **77**(2007).59-80.

[13] J. -P. Serre,*Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques, Modular Functions of One Variable III,*Lecture Notes in Math.**350**(1973), Springer-Verlag,191-268