有理数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大における K 群の位数について

北島 孝浩*

慶應義塾大学大学院理工学研究科、2012 年 2 月 17 日

歴史ある城崎で, 参加者の皆と各々の研究内容について議論を交わし, おいしい食事と素晴らしい温泉を堪能しながら多くの方々と交流し, 非常に濃厚な 5 日間を過ごさせていただきました. 今回の城崎新人セミナーに参加させてくださった運営委員の皆様に感謝します. また, 講演及びポスター発表を通して議論を交わしてくれた参加者の皆にも感謝します.

1 序

本稿は筆者の第 9 回城崎新人セミナーにおける講演に沿っている. 講演では, 専門外の人にもわかるように, という城崎新人セミナーの趣旨にあわせて, 整数論の基本的な事実の紹介に多くの時間をあて, K 群の位数に関する主結果などについては軽く触れる程度にとどめた.

2 節は記号 $\mathbb{Z}_p$ を使う人全員に一読してほしい. 講演を聞いていて, 皆が注意しておくべきだと思われたことの一つとして, $\mathbb{Z}_p$ の意味についてまとめている.

3 節は整数論の研究では何を調べているのかを紹介する目的で書かれている. この節では, イデアル類群と K 群について基本的なことをまとめている. イデアル類群は整数論系の研究室に所属した人は必ず学習するものの一つである. K 群は必ず学習するものとは言えないが, ゼータ関数と関係している対象であり, 本稿における主な考察対象でもある.

4 節は問題設定のための準備として $\mathbb{Z}_p$ 拡大の定義と例を挙げている. 岩澤理論の紹介も兼ねており, 岩澤類数公式, 岩澤 μ 不変量, 岩澤 λ 不変量を紹介する.

5 節および 6 節では問題の定式化と主結果について, 講演の際には省略した部分も詳細を述べる.

2 $\mathbb{Z}_p$ について

素数 p に対し, 記号「$\mathbb{Z}_p$」は二つの異なる意味で使われる. ひとつは, 位数 p の巡回群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の略記として. もうひとつは, "p 進整数環" として. 何人かの講演では $\mathbb{Z}_p$ は前者の意味で使われていたが, 整数論においては $\mathbb{Z}_p$ は後者の意味で使われる. 本稿では"p 進整数環" を $\mathbb{Z}_p$ と書くことにする. "p 進整数環" は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ではないので, この節で"p 進整数環" の定義を述べ, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ との違いを明確にする.

2.1 p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$

p 進整数環の定義は何通りもあるが, どの定義でも位相環として同型 (すなわち環同型かつ同相) である. 本稿では, そのうちの二通りの方法 (射影極限を用いる方法と, 完備化を用いる方法) で定義する.

*grenzwert@a6.keio.jp

2.1.1 射影極限としての $\mathbb{Z}_p$

$\mathbb{Z}_p$ を射影極限として以下のように定義する．射影系および一般の射影極限の定義は, 例えば参考文献 [N] を参照のこと．

任意の正整数 n に対する自然な環準同型 $\phi_{n+1,n} : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を全てまとめて, 次のように一列に書くことにする:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi_{n+1,n}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi_{2,1}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

定義 2.1. 上の列は射影系をなしており, p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ を次のように定義する:

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ := \left\{ (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \ ; \ \phi_{n+1,n}(x_{n+1}) = x_n \right\}.$$

$\mathbb{Z}_p$ に加法と乗法をそれぞれ, 成分毎の加法と乗法で定義する．これにより, $\mathbb{Z}_p$ は $\prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の部分環である．さらに, 各 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に離散位相を入れ, $\prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に直積位相, $\mathbb{Z}_p$ に誘導位相を入れる．これにより, $\mathbb{Z}_p$ はコンパクトである．実際, コンパクト位相空間の直積はコンパクトであり (Tychonoff の定理), $\mathbb{Z}_p$ は $\prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の中で閉集合であることから従う．感覚的な表現ではあるが, $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は列 (2.1) で”左の方向の極限を取ったもの”と解釈することができる．

例 2.2. 任意の整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対し, $(\ldots, a, a, \ldots, a) \in \mathbb{Z}_p$ を対応させる環準同型 (対角射) は単射である．この単射により, $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$ の部分環とみなす．

$n \geq 1$ に対し, $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} p^i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と置き, $x = (\ldots, x_{n+1}, x_n, \ldots, x_1)$ と置くと, $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ である．

2.1.2 距離空間の完備化としての $\mathbb{Z}_p$

整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, x と y の p 進距離 $d_p(x, y)$ を次のように定義する:

(i) $x \neq y$ のとき．$x - y = p^n a$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$ と書いて,

$$d_p(x, y) := e^{-n}$$

とする．

(ii) $x = y$ のとき．$d_p(x, x) := 0$ とする．

このとき, $(\mathbb{Z}, d_p)$ は距離空間であることは容易に確かめられる．

定義 2.3. 距離 d_p による $\mathbb{Z}$ の完備化を $\mathbb{Z}_p$ と書く．すなわち, 完備距離空間 X で, 単射 $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow X$ の像が X 内で稠密であるような X が存在し, この X を $\mathbb{Z}_p$ と書く．

例 2.4. $p = 3$ とする．整数列 $\{3^n\}$ を取る．3 進距離 d_3 により, $d_3(3^n, 0) = e^{-n}$ なので,

$$\lim_{n \to \infty} 3^n = 0$$

である．数列 $\{\sum_{m=0}^{n-1} 3^m\}_{n \geq 1}$ は $\mathbb{Z}_3$ における Cauchy 列なので,

$$\mathbb{Z}_3 \ni 1 + 3 + 3^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} 3^m = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$$

であり, $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_3$ である．

注意 2.5. 前の小節で定義した射影極限 $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の位相は p 進距離から定まる位相と一致している．$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ はコンパクトなので完備．さらに, $\mathbb{Z}$ が $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の中で稠密であることから, 射影極限により定義されたものと完備化により定義されたものは同一の位相環である．

2.2 $\mathbb{Z}_p$ の性質

p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の基本的性質を幾つか列挙する. (参考文献 [Ka], [KKS1], [S1] 等参照).

1. $\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Z}$ を含み, 特に無限集合である. (この時点で, $\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と全く別物であるといえる.)
2. $(\mathbb{Z}_p, p\mathbb{Z}_p)$ は局所環.
3. ($\mathbb{Z}_p^\times$ の構造)
$$\mathbb{Z}_p^\times \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p & (p : \text{奇素数}) \\ (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_2 & (p = 2). \end{cases}$$
4. $\mathbb{Z}_p$ を加法群とみるとき,
$$\{\mathbb{Z}_p\text{の開部分群}\} = \{\mathbb{Z}_p\text{の閉部分群}\} = \{p^n\mathbb{Z}_p | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$
5. $\mathbb{Z}_p$ の開集合は閉集合である. (一般に, 位相群において, 開集合は閉集合である.)
6. $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_p$ の中で開集合でも閉集合でもない. 実際, $\mathbb{Z}_p$ における $\mathbb{Z}$ の閉包と開核は次のようになる:
$$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p, \quad \mathbb{Z}^\circ = \emptyset.$$

3 主な研究対象

この節では, 整数論で重要な研究対象のうち, イデアル類群, 類数, 代数的 K 群の定義を述べる.

イデアル類群は, 19 世紀後半に Kummer が Fermat の大定理を解く過程で誕生した概念である. 類数はイデアル類群の位数のことで, 代数体の整数環が単項イデアル整域とどの程度違うのかを表す量である. イデアル類群と類数は, ゼータ関数の特殊値, 類体論などの対象とも深く関連していることが知られている.

代数的 K 群は 1950 年代に Grothendieck が代数幾何の文脈で導入したものである. 1970 年代に Quillen によって一般の非負整数 m に対して m 次 K 群 K_m が定義され, Milnor によっても Milnor K 群 K_m^M が定義された. 代数的 K 群は整数論の中においても, ゼータ関数との間の関係を記述する Quillen-Lichtenbaum 予想, 非可換岩澤理論など, 様々な場所に現れることが知られている.

3.1 イデアル類群と類数

L を代数体, すなわち $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体とする. $\mathcal{O}_L$ を, L の元であり, $\mathbb{Z}$ 上整なもの全体とする. このとき, $\mathcal{O}_L$ は環であり, L の整数環と呼ばれている:
$$\mathcal{O}_L = \{x \in L | \text{ある monic 多項式 } f(X) \in \mathbb{Z}[X] \text{ に対し } f(x) = 0\}.$$

例 3.1 (代数体とその整数環)**.**
$$\begin{cases} L = \mathbb{Q} \\ \mathcal{O}_L = \mathbb{Z} \end{cases}, \quad \begin{cases} L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \\ \mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \end{cases}, \quad \begin{cases} L = \mathbb{Q}(\zeta_d) \\ \mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta_d] \end{cases}, \quad \begin{cases} L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \\ \mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \end{cases}.$$
ただし, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し ζ_d は 1 の原子 d 乗根とする.

与えられた代数体に対して, その整数環を上記のように書き下す事は一般には容易ではない.

代数体 L に対し, L のイデアル類群の定義を述べる.

$$I(L) := \{\mathcal{O}_L \text{のイデアル} \neq (0)\}$$

により半群 $I(L)$ を定める. $I(L)$ の元 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して, $\gamma \in L^\times$ で $\mathfrak{a} = \gamma\mathfrak{b}$ となるものが存在するときに $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ として, 同値関係 $\sim$ を定める.

定義 3.2 (イデアル類群)**.** イデアル類群 $Cl(L)$ を, この同値関係による商集合

$$Cl(L) := I(L)/\sim$$

に自然に積の構造を入れたものとして定義する.

$Cl(L)$ はアーベル群である. 定義より, $Cl(L)$ が自明群であることと整数環 $\mathcal{O}_L$ が単項イデアル整域であることが同値であることがわかる. さらに, イデアル類群は位数有限であることが知られている. イデアル類群の位数 $h(L) = \#Cl(L)$ を L の**類数**と呼ぶ. 与えられた代数体の類数を具体的に計算することも一般には容易ではない.

3.2 代数的 K 群

$K_m(\mathcal{O}_L)$ を Quillen の m 次 K 群とする. Quillen による一般の m に対する m 次 K 群の構成法は"+ - construction"による定義と"Q - construction"による定義があるが, $m \leq 2$ の場合には古典的な定義があり, どれも同じ群である. 本稿では $m = 2$ の場合を主な考察対象とするので, $m = 2$ の場合のみの古典的な定義を述べることにする. ただし, 後の議論でこの定義まで戻ることは無いので, 定義 3.4 まで読み飛ばしてもよい.

R を環とする. $GL_n(R) := \{A \in M_n(R) \mid \exists B \in M_n(R),\ AB = BA = E(\text{単位行列})\}$ とする. $a \in R$, $i \neq j$ に対して, (i,j)-成分が a の基本行列を $e_{ij}(a)$ と書く:

$$e_{ij}(a) = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{第} \\ j \\ \text{列} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & 1 & a & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \end{array} \in GL_n(R)$$

$e_{ij}(a)$ の定め方から, 直ちに

$$e_{ij}(a)e_{ij}(b) = e_{ij}(a+b)$$

がわかる. $GL_n(R)$ の中で, $e_{ij}(a)$ により生成される部分群を $E_n(R)$ とする. 自然な準同型による $E_n(R)$ の帰納極限 $\varinjlim E_n(R)$ を $E(R)$ とおく.

基本行列の基本的な性質として, 2 つの基本行列 $e_{ij}(a)$, $e_{ij}(b)$ の交換子は次のようになる:

$$[e_{ij}(a),\ e_{kl}(b)] = e_{ij}(a)e_{kl}(b)e_{ij}(a)^{-1}e_{kl}(b)^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ j \neq k,\ i \neq l \\ e_{il}(ab) & \text{if } \ j = k,\ i \neq l \\ e_{kj}(-ba) & \text{if } \ j \neq k,\ i = l. \end{cases}$$

R. Steinberg により導入された基本行列の振る舞いを模倣した抽象的な群の定義を述べる.

定義 3.3 (Steinberg 群)**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする. Steinberg **群** $St_n(R)$ は, $x_{ij}(a)$ $(1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j,\ a \in R)$ で生成され, 次の関係式を満たすものとして定義する:
(i) $x_{ij}(a) \cdot x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b)$,

(ii) $[x_{ij}(a), x_{jl}(b)] = x_{il}(ab) \quad (i \neq l)$,

(iii) $[x_{ij}(a), x_{kl}(b)] = 1 \quad (j \neq k,\ i \neq l)$.

さらに, $St(R) := \varinjlim St_n(R)$ とおく.

自然な写像

$$St_n(R) \longrightarrow E_n(R) \quad (x_{ij}(a) \mapsto e_{ij}(a))$$

は群の準同型になる.

定義 3.4 (K_2 の定義)**.**

$$\begin{aligned} K_2(R) := \mathrm{Ker}[\phi : St(R) &\longrightarrow E(R)] \\ x_{ij}(a) &\longmapsto e_{ij}(a) \end{aligned}$$

とおく.

これで K_2 が定義されたが, 重要と思われることは, 次の例により, 高次の K 群がイデアル類群や単数群の高次元版とみなせることである.

例 3.5 (低次の K 群)**.** 代数体 L の整数環 $\mathcal{O}_L$ に対し, 0 次 K 群と 1 次 K 群は
- $K_0(\mathcal{O}_L) \cong Cl(L) \oplus \mathbb{Z}$
- $K_1(\mathcal{O}_L) \cong \mathcal{O}_L^\times$ (単数群)

となっている.

注意 3.6. 我々の興味はイデアル類群, つまり, ねじれ部分 $K_0(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}}$ にある. ゆえに, 我々は非負整数 m に対してねじれ部分 $K_m(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}}$ の構造, 特にその位数に興味がある.

注意 3.7. $K_2(\mathcal{O}_L)$ は有限アーベル群であることが知られている (参考文献 [G] 参照). したがって, $K_2(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}} = K_2(\mathcal{O}_L)$ である. 6 節において, $K_2(\mathcal{O}_L)$ の位数の挙動について得られた結果を述べる.

4　$\mathbb{Z}_p$ 拡大の岩澤理論

F を代数体とし, p を素数とする. 岩澤理論は, p を固定したときの F の $\mathbb{Z}_p$ 拡大におけるイデアル類群の p-part と p 進ゼータ関数との間の関係を記述している. 岩澤理論の研究により, $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中でのイデアル類群の p-part については様々な結果が得られている.

まずは, $\mathbb{Z}_p$ 拡大と n-th layer の定義を述べる.

定義 4.1 ($\mathbb{Z}_p$ 拡大, n-th layer)**.** 体の拡大 $F_{p,\infty}/F$ が Galois 拡大で, その Galois 群 $\mathrm{Gal}(F_{p,\infty}/F)$ が位相群として加法群 $\mathbb{Z}_p$ と同型であるとき, 拡大 $F_{p,\infty}/F$ を $\mathbb{Z}_p$ 拡大という.

また, このとき, 任意の非負整数 n に対して, 代数体 $F_{p,n}$ で $\mathrm{Gal}(F_{p,n}/F) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ なる $F_{p,\infty}/F$ の中間体が唯一つ存在する. (実際, 無限次 Galois 理論と, 加法群 $\mathbb{Z}_p$ の閉部分群が $p^n\mathbb{Z}_p$ の形であることから分かる.) この $F_{p,n}$ を $\mathbb{Z}_p$ 拡大の n-th layer という.

$\mathbb{Z}_p$ 拡大を与えることは, 次のような体の拡大列を与えることと同じである:

$$F = F_{p,0} \subset F_{p,1} \subset \cdots \subset F_{p,n} \subset \cdots \subset \bigcup_{n\geq 0} F_n = F_{p,\infty}, \quad \mathrm{Gal}(F_{p,n}/F) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

重要な $\mathbb{Z}_p$ 拡大の例を挙げる.

例 4.2. 正整数 $d \geq 1$ に対し, $\mu_d := \{\zeta \in \mathbb{C} | \zeta^d = 1\}$ とする. p が 2 のときと奇素数のときをまとめて記述するために, $q \in \mathbb{Z}$ を

$$q = \begin{cases} 4 & (p = 2) \\ p & (p > 3) \end{cases}$$

により定める. $\mu_{p^\infty} := \bigcup_{n\geq 0} \mu_{p^n}$ とおく.

(i) $F = \mathbb{Q}$ とする. 自然な同型

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{qp^n})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/qp^n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

に注意して, 右辺の第一成分 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ を Δ と書き,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{p,n} &:= \mathbb{Q}(\mu_{qp^n})^\Delta \ (\subset \mathbb{R}), \\ \mathbb{B}_{p,\infty} &:= \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{B}_{p,n} \end{aligned}$$

と置く. (有限次)Galois 理論により, $\mathbb{B}_{p,n}$ は $[\mathbb{B}_{p,n} : \mathbb{Q}] = p^n$ なる $\mathbb{Q}(\mu_{qp^n})$ の唯一の部分体であることに注意する. このとき, 次の体の列が与えられる:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{B}_{p,0} \subset \mathbb{B}_{p,1} \subset \cdots \subset \mathbb{B}_{p,n} \subset \cdots \subset \mathbb{B}_{p,\infty}, \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{B}_{p,n}/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

これにより, $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $\mathbb{B}_{p,\infty}/\mathbb{Q}$ を得る.

(ii) F を一般の代数体とする.

$$F_{p,\infty} := F\mathbb{B}_{p,\infty}$$

とおく. $\mathbb{B}_{p,e} = F \cap \mathbb{B}_{p,\infty}$ となる整数 $e \geq 0$ が存在して, Galois の推進定理から

$$\mathrm{Gal}(F_{p,\infty}/F) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{B}_{p,\infty}/F \cap \mathbb{B}_{p,\infty}) \cong p^e\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$$

となり, $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $\mathbb{F}_{p,\infty}/F$ を得る.

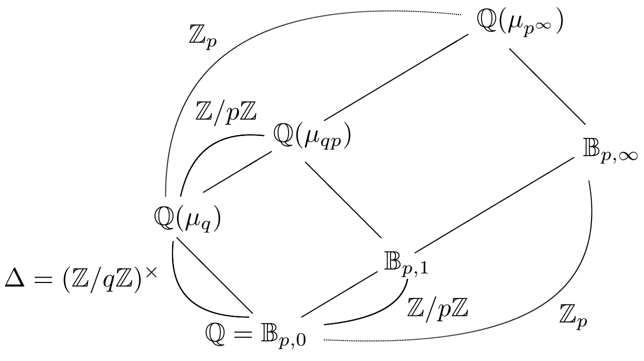

図 1: $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}(\mu_q)$ 上の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大

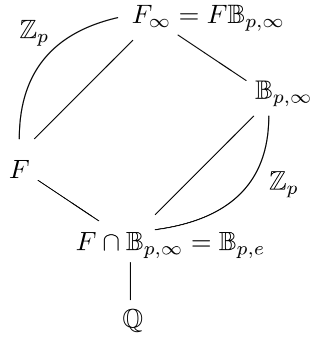

図 2: 一般の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大

定義 4.3 (円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大)**.** 上の例で構成した $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $\mathbb{B}_{p,\infty}/\mathbb{Q}$ と $F_{p,\infty}/F$ を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大という.

$\mathbb{Z}_p$ 拡大におけるイデアル類群の挙動について, 次の定理がある.

定理 4.4 (岩澤類数公式)**.** 素数 p を任意に取り, 固定する. $F_{p,\infty}/F$ を (円分とは限らない)$\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $F_{p,n}$ をその n-th layer とする. 非負整数 $e_{p,n} \in \mathbb{Z}$ をイデアル類群の p-Sylow 部分群の位数の p の指数とする; $\#(Cl(F_{p,n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) = p^{e_{p,n}}$.

このとき, ある正整数 $\lambda_p = \lambda_p(F), \mu_p = \mu_p(F) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と, 整数 $\nu_p = \nu_p(F) \in \mathbb{Z}$ で,

$$e_{p,n} = \mu_p p^n + \lambda_p n + \nu_p$$

が十分大きな全ての整数 n に対して成立するものが存在する.

注意 4.5.
1. この μ_p, λ_p はそれぞれ岩澤 μ 不変量, 岩澤 λ 不変量と呼ばれるものである.
2. F がアーベル体の場合は, $\mu_p = 0$ であることが知られている. $\mu_p = 0$ かどうか, もしくは $\lambda_p = 0$ かどうか, は岩澤理論で重要な研究テーマである.
3. $\mu_p = 0$ かつ $\lambda_p = 0$ が成立するということは, $\{\#(Cl(F_{p,n} \otimes \mathbb{Z}_p))|n \geq 1\}$ が有界であることを意味する.

5 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 拡大の問題

ここでは, 一つの素数を固定せずに, すべての素数 p を渡る直積 $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ に注目し, $\widehat{\mathbb{Z}}$ 拡大, すなわち Galois 群が加法群 $\widehat{\mathbb{Z}}$ と位相群として同型な Galois 拡大, を考察する. $\widehat{\mathbb{Z}}$ 拡大の中でのイデアル類群は殆ど研究されていない.

代数体 F に対し, F_∞ を, すべての素数 p を走らせるときの, すべての円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の合併体とする. このとき, F_∞/F は加法群 $\widehat{\mathbb{Z}}$ と位相群として同型である.

$\widehat{\mathbb{Z}}$ 拡大の問題の中でも, 2010 年に J. Coates 氏が提起した次の問題に着目する.

Coates **問題** : F を総実体, すなわち F から $\mathbb{C}$ への任意の体準同型の像が $\mathbb{R}$ に含まれている, とする. この時,

$$\{h(L)|L/F : \text{有限次}, L \subset F_\infty\}$$

は有界か ? ただし, $h(L)$ は L の類数とする.

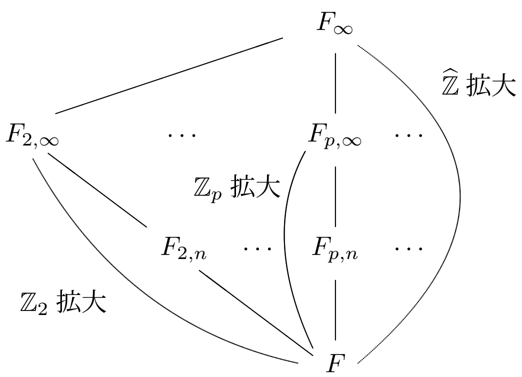

図 3: $\mathbb{Z}_p$ 拡大と $\widehat{\mathbb{Z}}$ 拡大

注意 5.1. F_∞ も L も総実体である. 実の体のイデアル類群は, 虚の体のそれに比べて調べるのが難しい. 例えば, $\mathbb{Q}$ 上の二次拡大体について, 類数が 1 である虚二次体はすべて (有限個) 判明しているが, 類数が 1 である実二次体は有限個なのか無数に存在するのかも判明していない.

注意 5.2. この問題は, $\mathbb{Z}_p$ 拡大の時の岩澤類数公式の言葉で表すと, 「"μ" = "ν" = 0 だろうか」というもの. F が総実体でさらにアーベル体であるならば, 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中でイデアル類群の p-part は有界である, つまり $\mu_p = \nu_p = 0$ であることは証明されている. F が一般の総実体の場合は, Greenberg 予想と呼ばれ, 未解決の予想である.

注意 5.3. F が (総) 虚アーベル体の場合は false. 実際, 類数は $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中で既に非有界である. (参考文献 [Wa2] 参照)

6 K 群の位数について

前節の Coates 問題はイデアル類群 $Cl(L)$, すなわち $K_0(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}}$ に関する問題であった (例 3.5 参照). この問題を, K 群のねじれ部分に関する問題 (一般化 Coates 問題) として, 次のように定式化する:

問題 (一般化 Coates 問題) : $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. F を総実体とする. このとき,

$$\{\#K_m(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}} | L/F : \text{有限次}, L \subset F_\infty\}$$

は有界か？

$m = 1$ の場合は, 例 3.5 より,

$$K_1(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}} \cong (\mathcal{O}_L^\times)_{\mathrm{tors}} = \mu(L) := \{L \text{ 内の } 1 \text{ の冪根 }\}$$

である. よって, 一般化 Coates 問題の $m = 1$ の場合の答えとして, 次のことが自明に成立する.

命題 6.1. F が総実体のとき, $\{\#K_1(\mathcal{O}_L)_{\mathrm{tors}} | L/F : \text{有限次}, F \subset F_\infty\}$ は有界.

$m = 2$ の場合は, 注 3.7 で述べたように, $K_2(\mathcal{O}_L)$ は有限アーベル群なので, $\#K_2(\mathcal{O}_L)$ 自身の挙動が問題となる.

一般化 Coates 問題の $m = 2$ の場合には, 任意の素数 p に対する円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中で既に非有界となる例が存在する. 実際, 総実体 F が一番単純な $\mathbb{Q}$ の場合で, $K_2(\mathcal{O}_{\mathbb{B}_{p,n}})$ の位数に関して, 次の結果が得られた.

定理 6.2 (主結果)**.** p を素数とする. $\mathbb{B}_{p,\infty}/\mathbb{Q}$ を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, その n-th layer を $\mathbb{B}_{p,n}$ とする. $\#K_2(\mathcal{O}_{\mathbb{B}_{p,n}})$ を簡単に k_n と書くことにする. このとき,
(i) $k_n/k_{n-1} \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$ が成立. したがって, $\{k_n | n \geq 0\}$ は有界でない.
(ii) $\{\ell : \text{素数} \,|\, \exists n \text{ s.t. } \ell | k_n\} = \infty$, i.e. k_n たちのどれかを割る素数は無数に存在する.

注意 6.3. F が $\mathbb{Q}$ ではなく一般の総実体の場合でも, 同様に「有界でない」ということが, この定理から導かれる.

証明には, 次の Wiles の公式を利用する.

定理 6.4 (Wiles,[Wi])**.** L を総実体, $\mathcal{O}_L$ を L の整数環とすると,

$$\#K_2(\mathcal{O}_L) = \pm\zeta_L(-1) \cdot \#H^0(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

が成立する. ここで, $\zeta_L(s)$ は Dedekind ゼータ関数, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \varinjlim(\mu_n \otimes \mu_n) = \bigcup_{n\geq 1}(\mu_n \otimes \mu_n)$ は L の絶対 Galois 群 $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ が自然に作用する G_L-加群. $H^0(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ は 0 次 Galois コホモロジー群である.

アーベル体の Dedekind ゼータ関数の特殊値は次のように, 一般 Bernoulli 数で記述できる.

定理 6.5. アーベル体 L に対し,

$$\zeta_L(-1) = \prod_{\psi \in X} -\frac{B_{2,\psi}}{2}$$

が成立する. ここで, X はアーベル体 L に対応する Dirichlet 指標群, $B_{2,\psi}$ は ψ に付随する (2 次) 一般 Bernoulli 数.

注意 6.6. $m \geq 1$ に対する $\zeta_L(1-m)$ も同様に一般 Bernoulli 数で記述できる.

n-th layer $\mathbb{B}_{p,n}$ はアーベル体であり, 対応する Dirichlet 指標群は位数 p^n の巡回群である. この Dirichlet 指標群の生成元を ψ_n と書く.

最後に, 主定理の証明のカギである二つの命題を述べる.

命題 6.7 (一般 Bernoulli 数の複素絶対値の評価)**.** $f_n = \mathrm{cond}(\psi_n) = qp^n$ とすると, 任意の正整数 n に対して

$$\frac{2}{3}\frac{2!}{(2\pi)^2} f_n\sqrt{f_n} < |B_{2,\psi_n}| < \frac{10}{3}\frac{2!}{(2\pi)^2} f_n\sqrt{f_n}.$$

命題 6.8 (K 群の位数の ℓ 進付値の評価, $p=2$ の場合)**.** ℓ を素数とする. v_ℓ を ℓ 進付値とする. $v_\ell(\ell)=1$ として正規化する. このとき, 次が成立する.

(i) $\ell \neq 2$ のとき, 十分大きな全ての n に対して,

$$v_\ell\left(\frac{k_n}{k_{n-1}}\right) = 0.$$

(ii) $\ell = 2$ のとき, 十分大きな全ての n に対して,

$$v_2\left(\frac{k_n}{k_{n-1}}\right) < 1 + \varphi(2^n).$$

注意 6.9. 主定理の前半の主張は, Wiles の公式 (定理 6.4) と, 命題 6.7 から従う. 命題 6.7 は後半の主張を示すときにも必要になる.

注意 6.10. 命題 6.8 (i) は, 「素数 ℓ を固定するごとに, 十分大きな全ての n に対して, k_n/k_{n-1} が ℓ で割れない」, ということを意味している. p が奇素数の場合でも, この命題と類似の主張が成立する.

注意 6.11. k_n/k_{n-1} について, 命題 6.7 による複素絶対値の評価と, 命題 6.8 により各素数毎の加除性に関する評価を組み合わせると, 主定理の後半の主張が従う.

参考文献

[G] H. Garland, A finiteness theorem for K_2 of a number field, Ann. of Math. (2)**94**(1971), 534–538.

[I] Kennichi Iwasawa, *Lectures on p-adic L-functions*, Annals of Mathematics Studies no. 74, Princeton University Press, 1972.

[Ka] 河田敬義, 数論 — 古典論から類体論へ, 岩波書店, 1992.

[KKS1] 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅, 数論 I — Fermat の夢と類体論, 岩波書店, 2005.

[KKS2] 加藤和也, 栗原将人, 斎藤毅, 数論 II — 岩澤理論と保型形式, 岩波書店, 2005.

[Ki] T. Kitajima, On the orders of K_2 of ring of integers in the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions of $\mathbb{Q}$, preprint.

[Ku] 久保田富雄, 整数論入門, 朝倉書店, 2004(復刊).

[L] S. Lichtenbaum, Values of zeta-functions, etale cohomology, and algebraic K-theory. Algebr. K-Theory II, Proc. Conf. Battele Inst. 1972, Lect. Notes Math. **342** (1973), 489-501

[M] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Annals of Mathematics Studies no. 72, Princeton University Press, 1971.

[N] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[NSW] J.Neukirch, A.Schmidt, K.Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer-Verlag, 2008.

[S1] J.P.Serre, *A Course in Arithmetic*, GTM7, Springer-Verlag, 1973.

[S2] J.P.Serre, *Local Fields*, GTM67, Springer-Verlag, 1979.

[S3] J.P.Serre, *Galois Cohomology*, Springer Monographs in Math, Springer-Verlag, 1997.

[Wa1] L.C.Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields (Second Edition)*, GTM83, Springer-Verlag, 1997.

[Wa2] L.C.Washington, Class Numbers and $\mathbb{Z}_p$-Extensions, Math. Ann. **214**(1975), 177–193

[Wa3] L.C.Washington, The Non-p-Part of the Class Number in a Cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-Extension, Invent. Math. **49**(1978), 87–97.

[Wi] A.Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. **131**(1990), 493–540.