A 型及び D 型道代数における傾斜の辺の数え上げ

加瀬　遼一[*]

大阪大学情報科学研究科

1　はじめに

この度は城崎新人セミナーに参加させていただき, ありがとうございました. この場をお借りして運営委員の方々, 参加者の皆様に御礼申し上げます.

2　準備

本稿では k は代数閉体とし, k 上の有限次元代数 A にたいして mod-A で有限次元右 A 加群のなす圏, ind-A で直既約 A 加群からなる部分圏とする. この時, 次の定理は基本的である.

定理 2.1. (Krull-Schmidt). 任意の $M \in \text{mod-}A$ は直規約分解

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots M_r$$

を持つ. さらにこの分解は一意的である.

2.1　道代数, クイバーの表現

以下 Q を非輪状な有限クイバー とし Q_0, Q_1 でそれぞれ頂点集合, 辺集合を表すことにする. また辺 $\alpha : x \to y$ に対して $s(\alpha) := x, t(\alpha) := y$ とする. この時 $w = (\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \alpha_r)$ $(t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}) \forall i)$ を長さ r の道 (path) と呼ぶ. また頂点を長さ 0 の道とする.

定義 2.2. Q の道代数 kQ が以下で定まる.
(a):k-ベクトル空間としての基底は Q 上の道,
(b):$w = (\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \alpha_r), w^{'} = (\beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \beta_{r'})$ に対して積

$$w \cdot w^{'} := \begin{cases} (\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \alpha_r \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \cdots \beta_{r'}) & t(\alpha_r) = s(\beta_1), \\ \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

この時, mod-kQ は次に定める Q の表現の圏 rep$Q$ と圏同値になる.

定義 2.3. 圏 rep$Q$ が以下で定まる.
対象:$((V_a)_{a \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$. ここで各 V_a は有限次元ベクトル空間で $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ は線形写像.
射:$V = ((V_a)_{a \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1}), V^{'} = ((V^{'}_a)_{a \in Q_0}, (f^{'}_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ に対して射の集合

$$\text{Hom}(V, V^{'}) := \{(\phi_a : V_a \to V^{'}_a)_{a \in Q_0} \mid \phi_{t(\alpha)} \circ f_\alpha = f^{'}_\alpha \circ \phi_{s(\alpha)}\}.$$

[*]r-kase@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

例 2.4. $Q = \circ \to \circ$ に対して rep$Q$ の対象は以下のようなものである.

$$0 \to k,\ k \xrightarrow{1} k,\ k \to 0.$$

以下 mod- kQ の対象と rep$Q$ の対象を区別しない事にする.

定義 2.5. $V \in \mathrm{rep}Q$ に対して

$$(\underline{\dim} V) := (\dim V_a)_{a \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$$

と定め, これを V の次元ベクトルと呼ぶ.

定理 2.6. (Gabriel) Q を Dynkin 型のクイバーとする.
(1)mod- kQ の直既約加群は同型を除き有限個,
(2) 次元ベクトルにより次の 1 対 1 対応得られる,

$$\{\text{ 直既約加群 }\}/\simeq \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{ 対応する } root \text{ 系の正 } root\}.$$

3 傾加群, 傾箙

この節では傾加群と傾箙の定義を与える.

定義 3.1. $T \in$ mod-kQ が条件 (a),(b) を満たすとき T を傾加群と呼ぶ,
(a)$\mathrm{Ext}^1(T,T) = 0$,
(b)T の直既約因子の個数が（同型を除いて）Q_0 の元の個数と一致.

そこで $Tilt(Q)$ で kQ 上の基本的傾加群（の同型類）全体のなす集合を表すことにする.

定義 3.2. kQ における傾箙 $\vec{\mathcal{K}}(Q) = (\vec{\mathcal{K}}(Q)_0, \vec{\mathcal{K}}(Q)_1)$ を以下で定める,
(a):$\vec{\mathcal{K}}(Q)_0 = \mathrm{Tilt}(Q)$,
(b):$T = M \oplus X, T^{'} = M \oplus Y \in \mathrm{Tilt}(Q)(X, Y \in \text{ind-}Q)$ に対して, ある分裂しない完全列,

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

であって $\widetilde{M} \in \mathrm{add}\ M$ となるものが存在するとき, T から $T^{'}$ へ矢を引く.
ここで add $M = \{X \in \text{mod-}Q \mid$ ある正整数 r が存在して $X \mid M^r\}$ である.

定義 (b) で与えられる操作は変異と呼ばれており, 上の場合 $T^{'}$ は T の左変異, 同様にして T は $T^{'}$ の右変異と呼ばれる.
傾箙には別の実現の仕方がありそれを紹介する, まず準備として Tilt(Q) に半順序を定義する.

命題 3.3. Tilt(Q) 上に関係 $\leq$ を次で定める；

$$T \leq T^{'} \Longleftrightarrow \mathrm{Ext}(T^{'}, T) = 0.$$

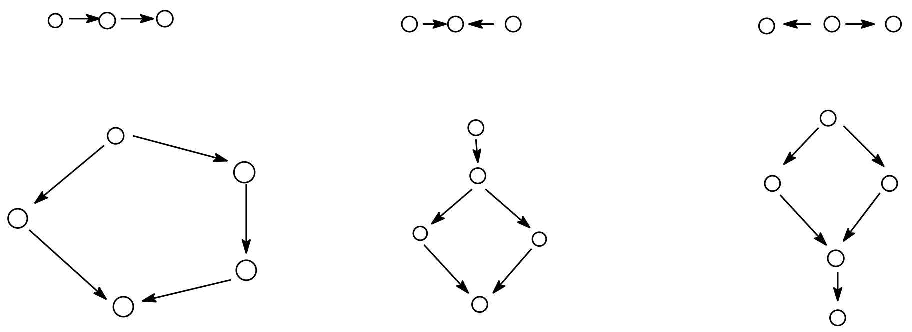
この時、$\leq$ は Tilt(Q) 上の半順序となる.

定理 3.4. 傾箙 $\vec{\mathcal{K}}(Q)$ は半順序集合 $(\mathrm{Tilt}(Q), \leq)$ の Hasse-図となる.

例 3.5. Q が A_3 型の時, 傾箙は次の様になる.

Q

$\vec{\mathcal{K}}(Q)$



次に傾箙に関するいくつかの事実を紹介する.

命題 3.6. ([5, cor2.2]) 傾箙 $\vec{\mathcal{K}}(Q)$ が有限連結成分 $\mathcal{C}$ を持てば $\mathcal{C}$ は傾箙 $\vec{\mathcal{K}}(Q)$ と一致する. 特に $\#Tilt(Q) < \infty$ ならば $\vec{\mathcal{K}}(Q)$ は連結である.

今 $T \in Tilt(Q)$ に関して非負整数 $s(T), e(T), \delta(T)$ を以下で定める:

$$\begin{aligned} s(T) &= \#\{T' \in Tilt(A) \mid T \to T' \text{ in } \vec{\mathcal{K}}(Q)\} \\ e(T) &= \#\{T' \in Tilt(A) \mid T' \to T \text{ in } \vec{\mathcal{K}}(Q)\} \\ \delta(T) &= s(T) + e(T) \end{aligned}$$

この時, $\delta(T)$ に関して次が成り立つ.

命題 3.7. ($cf.$[7, $prop$3.2]) $T \in Tilt(Q)$ とする. この時,

$$\delta(T) = \#Q_0 - \#\{a \in Q_0 \mid (\underline{\dim}T)_a = 1\} = \#\{a \in Q_0 \mid (\underline{\dim}T)_a > 1\}$$

が成り立つ. ここで $(\underline{\dim}T)_a$ は T の a における次元ベクトルである.

4 Ladkani の定理

この節では傾箙に関する [8] の結果の紹介をする.

定義 4.1. $(X, \leq_X), (Y, \leq_Y)$ を poset, $f : X \to Y$ を順序写像とする. この時, $X \sqcup Y$ における半順序 $\leq_f^+$ 及び $\leq_f^-$ をそれぞれ以下で定める.

$$a \leq_+^f b \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leq_X b & \text{if } a, b \in X, \\ a \leq_Y b & \text{if } a, b \in Y, \\ f(a) \leq_Y b & \text{if } a \in X \text{ and } b \in Y. \end{cases}$$

$$a \leq_-^f b \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leq_X b & \text{if } a, b \in X, \\ a \leq_Y b & \text{if } a, b \in Y, \\ a \leq_Y f(b) & \text{if } a \in Y \text{ and } b \in X. \end{cases}$$

今 $x \in Q_0$ を Q の source とし ($i.e.\{\alpha \in Q_1 \mid \mathrm{t}(\alpha) = x\} = \emptyset$), $S(x) \in \text{mod-}Q$ を対応する単純入射加群,

$$Tilt(Q)^x := \{T \in Tilt(Q) \mid S(x) \mid T\}$$

とおく。また Q' を Q において, x からでる矢の向きを逆にすることにより得られる箙, $S'(x) \in \mathrm{mod}Q'$ を x に対応する単純射影加群,

$$Tilt(Q')^x := \{T \in Tilt(Q') \mid S'(x) \mid T\}$$

とおく.

さらに写像 $j_*:\mathrm{rep}(Q\setminus\{x\})\to\mathrm{rep}Q$ を

$$(j_*N)_a=\begin{cases} N_a & (a\neq x)\\ \oplus_{x\to y}N(y) & (a=x)\end{cases},\quad (j_*N)_{a\to b}=\begin{cases} N_{a\to b} & (a\neq x)\\ (j_*N)_x\overset{projection}{\longrightarrow}N_b & (a=x)\end{cases}.$$

で定め, 同様に写像 $j_*^{'}:\mathrm{rep}(Q\setminus\{x\})\to\mathrm{rep}Q^{'}$ を

$$(j_*^{'}N)_a=\begin{cases} N_a & (a\neq x)\\ \oplus_{y\to x}N(y) & (a=x)\end{cases},\quad (j_*^{'}N)_{a\to b}=\begin{cases} N_{a\to b} & (b\neq x)\\ (j_*^{'}N)_a\overset{injection}{\longrightarrow}N_x & (b=x)\end{cases}.$$

で定める.

定理 4.2. 写像

$$\iota_x:T\mapsto S(x)\oplus j_*T$$

及び

$$\iota_x^{'}:T^{'}\mapsto S^{'}(x)\oplus j_*^{'}T^{'}$$

はそれぞれ順序写像

$$(Tilt(Q\setminus\{x\}),\leq)\to(Tilt(Q),\leq).$$

及び

$$(Tilt(Q\setminus\{x\}),\leq)\to(Tilt(Q^{'}),\leq).$$

を誘導する. さらに poset の間の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & Tilt(Q)\setminus Tilt(Q)^x \arrow[rr, "\rho_x", "\sim"'] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\pi_x"] & & Tilt(Q^{'})\setminus Tilt(Q^{'})^x \arrow[dl, "\pi_x^{'}"'] \arrow[dr, "f^{'}"] & \\
Tilt(Q)^x & & Tilt(Q\setminus\{x\}) \arrow[ll, "\iota_x"', "\sim"] \arrow[rr, "\iota_x^{'}", "\sim"'] & & Tilt(Q^{'})^x
\end{tikzcd}$$

が存在し

$$Tilt(Q)\simeq(Tilt(Q)\setminus Tilt(Q)^x\sqcup Tilt(Q)^x,\leq_-^f).$$

及び

$$Tilt(Q^{'})^x\simeq(Tilt(Q^{'})\setminus Tilt(Q^{'})^x\sqcup Tilt(Q^{'})^x,\leq_+^{f^{'}}).$$

が成り立つ.

5　主結果

与えられたグラフに対して, その頂点の個数と辺の個数は基本的な情報である. 今, 傾箙の頂点の個数については以下の結果が知られている.

定理 5.1. ([4, *prop*.3.9])

$$\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_0=\begin{cases}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} & Q:A_n\text{型 Dynkin クイバー},\\[2ex] \frac{3n-4}{2n}\binom{2(n-1)}{n-1} & Q:D_n\text{型 Dynkin クイバー}.\end{cases}$$

一方, 傾箙の辺の個数に関して以下の結果を得た.

定理 5.2. (1) : Q を Dynkin 型のクイバーとする。この時 $\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1$ は orientation によらない.
(2) :

$$\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1 = \begin{cases} \binom{2n-1}{n+1} & Q : A_n\text{型 Dynkin クイバー}, \\ \\ (3n-4)\binom{2(n-2)}{n-3} & Q : D_n\text{型 Dynkin クイバー}. \end{cases}$$

6 証明の概略

補題 6.1. x を sink とする, この時

$$\{\alpha \in \vec{\mathcal{K}}(Q)_1 \mid s(\alpha) \in Tilt(Q)^x, t(\alpha) \in Tilt(Q) \setminus Tilt(Q)^x\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} Tilt(Q)^x$$

が成り立つ.

また x を source とする, この時

$$\{\alpha \in \vec{\mathcal{K}}(Q)_1 \mid t(\alpha) \in Tilt(Q)^x, s(\alpha) \in Tilt(Q) \setminus Tilt(Q)^x\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} Tilt(Q)^x$$

が成り立つ.

系 6.2. 今 x を source または sink とする. この時,

$$\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1 = \#\vec{\mathcal{K}}(\sigma_x Q)_1$$

が成り立つ. 特に Q を Dynkin 型とすれば $\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1$ は orientation によらない.

証明. 4.2 及び 6.1 より等式,

$$\begin{aligned} \#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1 &= \#\vec{\mathcal{K}}(Q \setminus \{x\})_1 + \#\vec{\mathcal{K}}(Tilt(Q) \setminus Tilt(Q)^x)_1 + \#Tilt(Q)^x \\ &= \#\vec{\mathcal{K}}(\sigma_x Q)_1 \end{aligned}$$

が成立する. □

6.1 case A

ここでは, Q として次を考える.

$$Q = \overset{1}{\circ} \to \overset{2}{\circ} \to \cdots \to \overset{n}{\circ}.$$

Gabriel の定理から, ind-$Q = \{L(i,j) \mid 0 \le i < j \le n\}$ ここで

$$L(i,j) = \begin{cases} k & (i < a \le j), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \quad L(i,j)_{a \to b} = \begin{cases} 1 & (i < a, b \le j), \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

定義 6.3. 区間の組 $([i,j],[i',j'])$ が *compatible* とは

$$[i,j] \cap [i',j'] = \emptyset \text{ or } [i,j] \subset [i',j'] \text{ or } [i',j'] \subset [i,j]$$

の時に言う.

補題 6.4. $\mathrm{Ext}(L(i,j), L(i',j')) = 0 = \mathrm{Ext}(L(i',j'), L(i,j))$ である必要十分条件は $([i,j],[i',j'])$ が compatible である事である.

補題 6.5. $T \in Tilt(Q)$ に対して

$$\delta(T) = n - 1$$

が成り立つ.

系 6.6.

$$\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1 = \frac{n-1}{2(n+1)}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-2}.$$

6.2 case D

この節では Q として次のクイバーを考える：

$$Q = Q_n = \begin{tikzcd}[row sep=small] & & & & & \overset{n^+}{\circ} \\ \overset{1}{\circ} \arrow[r] & \overset{2}{\circ} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \overset{n-1}{\circ} \arrow[urr] \arrow[drr] & & \\ & & & & & \underset{n^-}{\circ} \end{tikzcd}$$

この時 ind-$Q = \{L(a,b) \mid 0 \leq a < b \leq n-1\}$
$\cup \{L^{\pm}(a,n) \mid 0 \leq a \leq n-1\} \cup \{M(a,b) \mid 0 \leq a < b \leq n-1\}$ である。

ここで

$$L(a,b)_i = \begin{cases} k & \text{if } a < i \leq b, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$L(a,b)_{i \to j} = \begin{cases} 1 & \text{if } a < i < b, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$L(a,n)^{\pm}_i = \begin{cases} k & \text{if } a < i \leq n-1 \ \mathit{or}\ i = n^{\pm}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$L(a,n)^{\pm}_{i \to j} = \begin{cases} 1 & \text{if } a < i < n-1 \ \mathit{or}\ i = n-1, j = n^{\pm}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$M(a,b)_i = \begin{cases} k & \text{if } a < i \leq b \text{ or } i = n^{\pm}, \\ k^2 & \text{if } b < i \leq n-1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$M(a,b)_{i \to j} = \begin{cases} 1 & \text{if } a < i < b, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{if } i = b, \\ (1,0) & \text{if } i = n-1, j = n^+, \\ (0,1) & \text{if } i = n-1, j = n^-, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{if } b < i < n-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

である.

また,Ext $=0$ 条件は次で与えられる.

補題 6.7. (1)$\mathrm{Ext}(L(a,b),L(a^{'},b^{'}))=0=\mathrm{Ext}(L(a^{'},b^{'}),L(a,b))\Longleftrightarrow([a,b],[a^{'},b^{'}])$: compatible.
(2)$\mathrm{Ext}(L(a,b),L^{\pm}(a^{'},n))=0=\mathrm{Ext}(L^{\pm}(a^{'},n),L(a,b))\Longleftrightarrow([a,b],[a^{'},n])$: compatible.
(3)$\mathrm{Ext}(L(a,b),M(a^{'},b^{'}))=0=\mathrm{Ext}(M(a^{'},b^{'}),L(a,b))\Longleftrightarrow([a,b],[a^{'},n]),([a,b],[b^{'},n])$: compatible.
(4)$\mathrm{Ext}(M(a,b),L^{\pm}(a^{'},n))=0=\mathrm{Ext}(L^{\pm}(a^{'},n),M(a,b))\Longleftrightarrow a\leq a^{'}\leq b$.
(5)$\mathrm{Ext}(L^{\pm}(a,n),L^{\pm}(a^{'},n))=0=\mathrm{Ext}(L^{\pm}(a^{'},n),L^{\pm}(a,n))$ for all $a,a^{'}$.
(6)$\mathrm{Ext}(L^{+}(a,n),L^{-}(a^{'},n))=0=\mathrm{Ext}(L^{-}(a^{'},n),L^{+}(a,n))\Longleftrightarrow a=a^{'}$.
(7)$\mathrm{Ext}(M(a,b),M(a^{'},b^{'}))=0=\mathrm{Ext}(M(a^{'},b^{'}),M(a,b))\Longleftrightarrow[a,b]\subset[a^{'},b^{'}]$ *or* $[a^{'},b^{'}]\subset[a,b]$.

補題 6.8. $T\in Tilt(Q)$ とする, この時 $\delta(T)\geq n-1$ が成り立ち等号成立は $L^{\pm}(0,n)\mid T$ かつ残りの直既約因子が $L(a,b)(0\leq a<b\leq n-1)$ の形の時に限る. 特に

$$\#\{T\in Tilt(Q)\mid\delta(T)=n-1\}=\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}=\frac{1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2}$$

である.

注意 6.9. 上の補題の最後の主張は $L(a,b)$ の形をした直既約加群同士の Ext $=0$ 条件が A 型のものと同じであることから従う.

そこで $Tilt(Q)$ を以下のように分割する.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_0 &:= \{T\in Tilt(Q)\mid\delta(T)=n+1\},\\ \mathcal{T}_1 &:= \{T\in Tilt(Q)\mid\delta(T)=n\},\\ \mathcal{T}_2 &:= \{T\in Tilt(Q)\mid\delta(T)=n-1\}.\end{aligned}$$

ここで

$$\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1=\frac{1}{2}\{(n+1)\#\mathcal{T}_0+n\#\mathcal{T}_1+(n-1)\#\mathcal{T}_2\}$$

であることから $\#\mathcal{T}_0,\#\mathcal{T}_1,\#\mathcal{T}_2$ がわかればよいが、今6.8より $\#\mathcal{T}_2=\frac{1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2}$ であり全体の個数 $\#Tilt(Q)$ はわかっている. したがってあとは $\#\mathcal{T}_1$ がわかればよい. そこで $\mathcal{T}_1$ をさらに次のように分割する

$$\mathcal{A}(i):=\{T\in\mathcal{T}_1\mid(\underline{\dim}T)_i=1\}$$

この時, 次が成り立つ.

定理 6.10. (1)

$$\mathcal{A}(n^{\pm})\overset{1:1}{\longleftrightarrow}Tilt(\circ\to\cdots\to\overset{n}{\circ})\setminus\{T^{'}\in Tilt(\circ\to\cdots\to\overset{n}{\circ})\mid L(0,n-1)\mid T^{'}\},$$

したがって

$$\#\mathcal{A}(n^{\pm})=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}-\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

(2) $i<n$ に対して,

$$\mathcal{A}(i)\overset{1:1}{\longleftrightarrow}Tilt(\circ\to\circ\to\cdots\to\overset{i-1}{\circ})\times Tilt(Q_{n-i})$$

したがって,

$$\#\mathcal{A}(i)=\frac{3(n-i)-1}{2i(n-i+1)}\binom{2(i-1)}{i-1}\binom{2(n-i)}{n-i}.$$

系 6.11.

$$\#\mathcal{T}_1=3\binom{2(n-1)}{n-2}.$$

系 6.12.

$$\#\mathcal{T}_0 = \frac{3(n-1)}{n+1}\binom{2(n-1)}{n-2}.$$

定理 6.13.

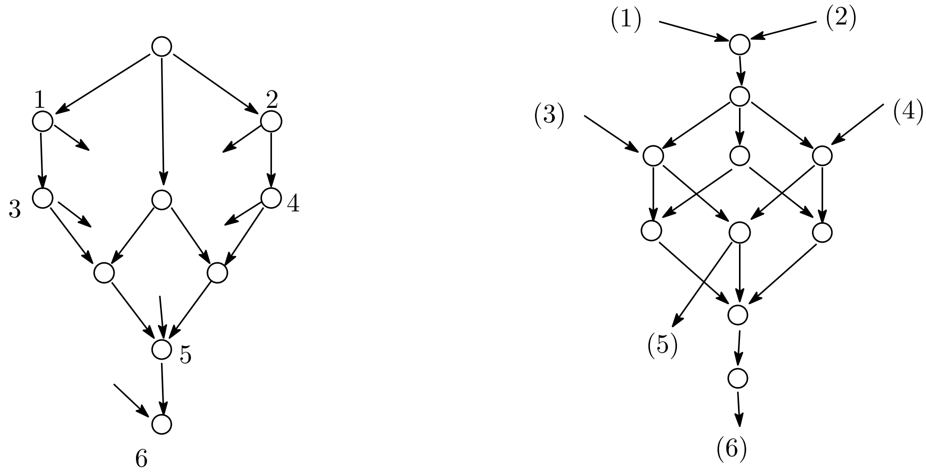
$$\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1 = (3n-1)\binom{2(n-1)}{n-2}.$$

証明. 実際 $\#\vec{\mathcal{K}}(Q)_1$ は次で与えられる:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{n-1}{n-1}\binom{2(n-1)}{n-2} + 3n\binom{2(n-1)}{n-2} + 3(n-1)\binom{2(n-1)}{n-2}\right\} = (3n-1)\binom{2(n-1)}{n-2}.$$

□

例 6.14. (n=3)



参考文献

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation theory of artin algebras, Cambridge University Press, 1995.

[2] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras Vol. **1**, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge University Press, 2006.

[3] F. Coelho, D. Happel and L. Unger, Complements to partial tilting modules, J. Algebra **170** (1994), no.3, 184-205.

[4] S. Fomin and A. Zelevinsky, Y-systems and generalized associahedra, Ann. of Math. (2) **158**, (2003), no.3, 977-1018.

[5] D. Happel and L. Unger, On a partial order of tilting modules, Algebr. Represent. Theory **8** (2005), no.2, 147-156.

[6] D. Happel and L. Unger, On the quiver of tilting modules, J. Algebra **284** (2005), no.2, 857-868.

[7] D. Happel and L. Unger, Reconstruction of path algebras from their posets of tilting modules, Trans. Amer . Math. Soc **361** (2009), no.7, 3633-3660.

[8] S. Ladkani, Universal derived equivalences of posets of tilting modules, arXiv:0708.1287v1.