代数系のべき等既約分解

東北大学大学院理学研究科数学専攻　井澤昇平

今回は城崎新人セミナーにてポスター発表をさせて頂きました。自分の発表時間には他の参加者から様々な質問を受け、中には自分では気付かなかった今後の研究の方向性を提示してくれる方もいらっしゃいました。その全ての方、特に高橋祐人君に感謝致します。また他の方の講演、休憩時間や親睦会の中では非常に幅広い事柄についての議論ができ、大変充実した五日間でした。運営委員の方をはじめこの合宿に関わった全ての方に感謝致します。

1　発表の概要

今回の私の発表は Universal Algebra（普遍代数学、一般代数系などと訳される）の中の [1] により導入された枠組み（定着した名称はないようである。本稿では仮に被覆理論と呼ぶことにする。他にも英名で relational structure theory などと呼ばれることもある）に関連するものである。

一般代数系は代数系（集合に演算の構造を付加したもの）の一般的な性質を研究する数学の一分野である。他の数学の諸分野と同様に、一般代数系でも研究対象である代数系を「何らかの分かりやすい形に分類を行なう」ということは重要な目標の一つであり、今回は「被覆理論の枠組みにより有限代数系の分類を目指す試み」という主題で発表を行なった。

被覆理論とは

・べき等演算により代数系 A をより小さな代数系 $U_1, \cdots, U_n$ に " 分解 " する

・代数系の族 $\mathcal{U}$ が与えられたときに分解が $\mathcal{U}$ に一致する代数系にどのようなものがあるか考察する

というように分解とその逆操作の様子を記述する理論の枠組みの総称である。考察の範囲を台集合が有限な代数系に限ればこれらはある程度具体的な記述が可能であると思われ、有限代数系の一つの分類与えることや代数系の様々な性質を何らかのきれいな形で記述することが期待される。

2　被覆理論による代数系の分類の枠組み

代数系とは集合（台集合という）とその上のいくつかの演算との対のことであるが、一般論を展開する上では代数系の定義中にある演算と、それらの演算を組み合わせて書ける演算とは区別しない方が本質的である場合がある。

例 2.1. $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ をブール束とする。このとき

$$\begin{aligned} a+b &:= (\neg(a \wedge b)) \wedge (a \vee b) \\ a \cdot b &:= a \wedge b \\ -a &:= a \end{aligned}$$

とおくと $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ は $x^2 = x$ をみたす可換環（ブール環）になる。逆に $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ をブール環とするとき、

$$\begin{aligned} a \vee b &:= a+b+(a \cdot b) \\ a \wedge b &:= a \cdot b \\ \neg a &:= 1+a \end{aligned}$$

とおくと $(R, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ はブール束となる。

この対応はブール束とブール環は本質的には同じものと見て良いことを意味していると言って良いであろう。このようなものを統一的に同一視しようとするなら、その代表系としては " 演算の合成 " に閉じたものをとるのが自然なように思われる。そのような考えに基づき本稿では「代数系」を次のように定義する。

定義 2.2. 代数系 とは集合 A と A 上の演算の集合 $\mathrm{Clo}(A)$ の対 $(A, \mathrm{Clo}(A))$ で次をみたすもののことをいう：

1. $\mathrm{Clo}(A)$ は全ての射影演算 $\pi_{n,i} : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$ を含む。
2. $\mathrm{Clo}(A)$ は合成に閉じている。すなわち任意の $f, g_1, \cdots, g_n \in \mathrm{Clo}(A)$, $f : A^n \to A, g_i : A^m \to A$ に対し $[(x_j) \mapsto f(g_i(x_j)_j)_i] \in \mathrm{Clo}(A)$ が成り立つ。

$\mathrm{Clo}(A)$ の元を A の演算という。以下では特に必要がない場合には簡単のため台集合を表す文字のみで代数系を表し、$\mathrm{Clo}_n(A)$ で代数系 A の n 項演算全体の集合を、$\mathrm{Clo}(A)$ で A の全ての項数の演算の全体の集合を表すことにする。

次に天下り的であるが被覆理論における基本的な用語を列挙しよう。

定義 2.3. A を代数系とする。

- $e \in \mathrm{Clo}_1(A)$ が べき等的 であるとは $e(e(x)) = e(x)$ が全ての $x \in A$ に対して成り立つことをいう。
- e が A のべき等演算のとき $e(A)$ を e による べき等縮約 という。ただし

$$\mathrm{Clo}_m(e(A)) := \{f \mid f \in \mathrm{Clo}_m(A), f(A^m) \subset e(A)\}$$

  とする。
- A のべき等縮約の集合 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ が A を 被覆する とは $l \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \mathrm{Clo}_l(A)$, $f_1, \cdots, f_l \in \mathrm{Clo}_1(A)$ で以下をみたすものが存在することをいう：
  - 各 $j = 1, \ldots, l$ 毎に $f_j(A) \subset U_i$ となる $i = 1, \ldots, n$ が存在する。
  - $\lambda(f_1(x), \ldots, f_l(x)) = x$ が全ての $x \in A$ に対して成り立つ。
- A のべき等縮約 $U_1, \cdots, U_l$ に対し、以下で定義される代数系を 行列積 という：台集合は直積集合 $\prod_{j \leq l} U_j$. m 項演算は l 個の A の lm 項演算 t_k によって $((x_{ij})_{j \leq l})_{i \leq m} \mapsto (t_k(x_{ij})_{i,j})_k$ と書けるもの全体。
- どんな A の被覆も恒等写像 id_A を含むとき A は 既約 であるという。
- $\mathcal{U}_1$ と $\mathcal{U}_2$ を A の被覆とする。$\mathcal{U}_1$ が $\mathcal{U}_2$ の細分であるとは任意の $U_1 \in \mathcal{U}_1$ に対し $U_2 \supset U_1$ となる $U_2 \in \mathcal{U}_2$ が存在することをいう。
- A の被覆 $\mathcal{U}$ が極小であるとは、$\mathcal{U}$ の真部分集合は A を被覆せず、$\mathcal{U}$ の任意の細分 $\mathcal{U}'$ に対し、$\mathcal{U}$ が $\mathcal{U}'$ の細分になっていることをいう。

文献 [1], [2] の表現を借りると、被覆するということはそこに属するべき等縮約から「行列積をとる操作によって元の代数系が復元できる」ということを意味している。しかしべき等縮約、行列積、被覆関係の最も明確な意味づけは代数系のクラスの圏構造との関連を通じてなされるものだと筆者は考える。それについては最後の節にて説明することにする。

これらの定義に関して以下のことが成り立つ。

定理 2.4. A を有限代数系とする。このとき次が成り立つ。

1. A の極小被覆は存在し、そこに属する全てのべき等縮約は既約である。
2. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ および $\mathcal{U}' = \{U'_1, \ldots, U'_m\}$ を A の極小被覆とすると $n = m$ であり、$\{1, \ldots, n\}$ 上の置換 σ を適当にとると $U_i \simeq U'_{\sigma(i)}$ が全ての i について成り立つ。さらに $U_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U_n \simeq U'_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U'_n$ が成り立つ。

有限代数系 A の極小被覆 $\{U_1, \ldots, U_n\}$ の行列積 $U_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U_n$ の構造を A の標準部分と言い、$\mathrm{Ess}(A)$ と書くことにする。このとき次が成り立つ。

定理 2.5. 有限代数系 A に対し、$\mathrm{Ess}(B) \simeq A$ となる有限代数系 B が存在するならば $A \simeq \mathrm{Ess}(A)$ が成り立つ。特に全ての有限代数系に対して $\mathrm{Ess}(\mathrm{Ess}(A)) \simeq \mathrm{Ess}(A)$ が成り立つ。

$A \simeq \mathrm{Ess}(A)$ となる有限代数系を標準代数系と呼ぶことにするなら、上記の事実群により以下の 3 つのパートによって有限代数系の一つの分類を与えることができることがわかる。

1. 既約代数系を分類する。
2. 既約代数系の族に対し、極小被覆がそれと同型になる標準代数系を分類する。
3. 標準代数系に対し、標準部分がそれと同型になる代数系を分類する。

3 各段階についての考察

前節で述べた三つのパートにより有限代数系の一つの分類が可能である。とはいえ実際にこれらの各段階を充分見やすい形で実行することは容易ではないと思われる。本節では各パートについて現在分かっていることを紹介する。

3.1 既約代数系の分類

私の知る限りでは [2] に、ある種の代数系については分類がなされているのみである。一つは具体的な代数系として群の場合についての次の結果である。

命題 3.1 ([2] Theorem 4.4.3.)**.** 有限群が既約である条件は位数が素数のべきであることである。

また台集合を固定すると既約な clone の全体は包含関係に関して下に閉じており、また帰納的（したがって任意の既約 clone に対してそれを含む極大な既約 clone が存在する）ことが分かる。その意味では一般論としては極大な clone の分類ができればそれなりに意味のあることであると思われる。

[2] ではこの発想に基づいて（いると断言するのは難しいかもしれないが、何はともあれ）subalgebra primal という代数系について次のような結果を出している。

定義 3.2. A を集合、S を A^m の部分集合とする。このとき $\mathrm{Pol}_n(S)$ で次の条件をみたす $f : A^n \to A$ の全体を表す：

$$\begin{aligned} & (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in S \ (\forall j = 1, \ldots, n) \\ \Rightarrow \quad & (f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{m1}, \ldots, a_{mn})) \in S. \end{aligned}$$

また A^m の部分集合族 $\mathcal{S}$ に対して $\mathrm{Pol}_n(\mathcal{S}) = \cap_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{Pol}_n(S)$ とおき、$\mathrm{Pol}(\mathcal{S}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Pol}_n(\mathcal{S})$ とおく。

このとき $(A, \mathrm{Pol}(\mathcal{S}))$ は定義 2.2 の意味で代数系になっていることが容易にわかる。また $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ であることは clone の間に逆の包含関係 $\mathrm{Pol}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{Pol}(\mathcal{S})$ が成り立つことと同値であるので clone の極大性は関係の集合の極小性に対応する。

定義 3.3. 上記定義で $m = 1$ の場合、すなわち $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$ によって $(A, \mathrm{Pol}(\mathcal{S}))$ と書けるとき代数系は subalgebra primal であるという。

定理 3.4 ([2] Corollary 4.6.23)**.** A を有限集合、$\mathcal{S}$ を A の部分集合族とする。$(A, \mathrm{Pol}(\mathcal{S}))$ が既約である条件は $\mathcal{S}$ が次のどちらかの形をしていることである：

1. 次の条件をみたす $a \in A$ と $S \subset A$ が存在する：
$$a \notin S, \quad \{S, S \cup \{a\}\} \cup \{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a\}\} \subset \mathcal{S}.$$
2. 次の条件をみたす A の異なる 2 元 a, b が存在する：
$$\{\{a, b\}\} \cup \{\{x\} \mid x \in A \setminus \{a, b\}\} \in \mathcal{S}.$$

なお [3] にはこの定理の別証が与えられている。

3.2 標準代数系の分類

分類ができるという段階には全く至っていない。現在分かっているのは、次に述べる標準代数系が存在するような既約代数系の族の特徴付けのみと言っても差し支えない。

定理の主張を述べる前に定義と補助命題を述べる。

定義 3.5. A を有限代数系とする。A のべき等縮約 U は U のべき等縮約が U 自身に限るとき 極小べき等縮約 であるという。

命題 3.6. A を有限代数系、U, V を A の極小べき等縮約とする。このとき U と V とは同型である。

以上の準備のもので標準代数系の存在条件は次のように特徴付けられる。

定理 3.7. $n \geq 2$ を自然数、$U_1, \cdots, U_n$ を既約代数系とする。このとき次は同値である。

1. 有限代数系 A と A の極小被覆 $\{\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_n\}$ で各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $\tilde{U}_i$ が U_i と同型となるものが存在する。
2. 各 i に対して U_i の極小べき等縮約 V_i は U_i の真部分集合であり、かつ V_i の構造は i に依らず全て同型である。

3.3 与えられた標準部分を持つ代数系の分類

これも一般にはほとんど何も分からないと言える段階である。次のことがわかっているほとんど唯一のことと言ってもよいように思う：標準代数系は既約な成分がちょうど一つずつしかないような代数系であるから、素朴には同値類の中で最も “ 小さい ” ものであるように感じられる。しかし実際には標準代数系より小さい代数系が存在する場合があるのである。

例 3.8. G を有限群とし、濃度が $|G| = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ と素因数分解されるとき G の極小被覆は $\{U_1, \cdots, U_n\}$, $U_i = \{x \in G \mid x^{p_i^{m_i}} = 1\}$ となる。そして $\mathrm{Ess}(G) = U_1 \boxtimes \cdots \boxtimes U_n$ が成り立ち、G は $\mathrm{Ess}(G)$ のべき等縮約となる。また $G = \mathrm{Ess}(G)$ であるための必要十分条件は G がべき零群であることである。

また元の個数という意味では標準代数系の対数サイズの代数系すら存在する場合がある。具体的な構成法は省略するが次のことが成り立つ。

命題 3.9. $n \geq 1$ とする。このとき $|A| = n,\ |\mathrm{Ess}(A)| = 2^{n-1}$ となる代数系 A が存在する。

4 被覆理論と代数系のクラスの圏構造

一つの代数系に対してその演算の集合の他の集合への作用を考えると、その全体には準同型の概念が定義され、自然に圏の構造が入る。べき等縮約や行列積をとる操作はその圏の間の関手を導く。本節ではそのような演算の言葉で記述される関手の言葉を用いることで、被覆理論のいくつかの概念が圏論的な言葉で述べ直すことができることを説明する。

まず始めに演算の集合の他の集合への作用を定式化しよう。

定義 4.1. $(A, \mathrm{Clo}(A))$ を代数系、X を集合とする。$\mathrm{Clo}(A)$ の X への 作用 とは $\tau = (\tau_n : \mathrm{Clo}_n(A) \to X^{X^n})_n$ で以下をみたすもののことをいう。

1. $\tau(\pi_{n,i}) = [(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i]$.
2. $\tau(f \circ (g_i)) = [(x_j)_{j \leq m} \mapsto \tau(f)(\tau(g_i)(x_j))]$.

(X, τ) を $\mathrm{Clo}(A)$ 代数系（または誤解がない場合 A 代数系）という。$\mathrm{Clo}(A)$ 代数系を対象とし、その間の準同型を射とする圏を $\mathcal{V}(A)$ と書く。

以下では混同の恐れがない限り (X, τ) は単に X と書き $\tau(f)$ は f と略記する。

次の事実はべき等縮約やその行列積を取る操作が関手になることを意味する。

命題 4.2. $(A, \mathrm{Clo}(A))$ を代数系とし $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{Clo}_1(A)$ をべき等演算、$X \in \mathcal{V}(A)$ とする。このとき次が成り立つ。

- e_i の X への作用はべき等的、すなわち $e_i(e_i(x)) = e_i(x)$ が全ての $x \in X$ に対して成り立つ。
- 直積集合 $e_1(X) \times \cdots \times e_n(X)$ には自然に $e_1(A) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(A)$ 代数系の構造が入る。（これを $e_1(X) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(X)$と書き $e_i(X)$ たちの行列積ということにする。）
- $\varphi : X \to Y$ が A 代数系の射のとき、次の写像写像 $\varphi' : e_1(X) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(X) \to e_1(Y) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(Y)$

  $$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$$

  は $e_1(A) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(A)$ 代数系の準同型となる。
- 上述の対応 $X \mapsto e_1(X) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(X)$ と $\varphi \mapsto \varphi'$ は $\mathcal{V}(A)$ から $\mathcal{V}(e_1(A) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(A))$ への関手となる。

この関手を用いると被覆関係は次のように圏同値性により特徴付けることができる。

命題 4.3. A を有限代数系、$e_1, \ldots, e_n$ を A のべき等演算とする。このとき $\{e_1(A), \ldots, e_n(A)\}$ が A の被覆である必要十分条件は上述の関手 $\mathcal{V}(A) \to \mathcal{V}(e_1(A) \boxtimes \cdots \boxtimes e_n(A))$ が圏同値であることである。

参考文献

[1] Keith A. Kearnes. Tame Congruence Theory is a localization theory, Lecture Notes from “A Course in Tame Congruence Theory” Workshop, Budapest, 2001.

[2] Mike Behrisch. Relational Tame Congruence Theory and subalgebra primal algebras. Master’s thesis, Dresden University of Technology, 2009.

[3] Mike Behrisch. Irreducible Subalgebra Primal Algebras, Order (2011)

[4] K. Denecke, O. Lüders. Categorical equivalence of varieties and invariant relations, Algebra Universalis 46(2001) 105-118

[5] Ralph McKenzie. An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories, Logic and Algebra vol.180.

[6] Dietlinde Lau. Function Algebras on Finite Sets, Springer 2006

[7] Jiri Adamek. On Quasivarieties and Varieties as Categories, Studia Logica 78(2004) 7-33