絶対値p乗の非線形項を持つシュレディンガー方程式の小さな初期値に対する解の爆発について

池田　正弘*

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 (日本学術振興会特別研究員)，6 月 3 日

1　イントロダクション

本報告集は若杉勇太氏との共同研究に基づく内容である．絶対値 p 乗の非線形項を持つシュレディンガー方程式に対する大域解の存在及び非存在を考察する:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda \left|u\right|^p, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{NLS}$$

ここで，$T > 0$, $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $u = u(t,x) \in \mathbf{C}$: 未知関数, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1,2)$, $f = f(x) = f_1(x) + if_2(x) \in \mathbf{C}$, $f_i(x) \in \mathbf{R}$ $(i = 1,2)$: 与えられた初期関数とする．

指数 $p = 1 + 2/n$ は藤田臨界指数として熱方程式や消散型波動方程式等で「小さな初期値に対する大域解の存在」と「解の有限時間内での爆発」とを分ける閾値として良く知られている (文献 [6])．一方, NLS に対して，これと同種の結果が得られるかは現在のところ良く分かっていなかった．$|u|^{p-1}u$ のゲージ不変性のある非線形項を持つ NLS に対しては長距離散乱と短距離散乱との境であることも良く知られている事実である (文献 [1] 等)．一方同じ次数でも $u^3 + \bar{u}^2 u + \bar{u}^3$ $(n = 1)$, $u^2 + \bar{u}^2$ $(n = 2)$ の複素共役の位置の異なる非線形項を持つ NLS に対しては波動作用素の存在 (漸近自由解の存在) が示されている (文献 [3])．しかし, $|u|^p$ はゲージ不変性もなく，振動効果も上手く利用できないため，これらに対応した肯定的結果はない．上記と空間次元と次数が等しい場合になんらかの肯定的結果が得られると期待したくなる気持ちはある．$(n,p) = (2,2)$ に対しては，通常の波動作用素の非存在が示されている (文献 [4] 等)．それでも尚 $|u|^p$ の非線形項を持つ NLS に対してはそれほど多くのことが分かっていない．そこで最近 $p = 1 + 2/n$ 以下の場合には，どんなにデータを小さくしてもある形状の条件を満たせば，解が有限時間で爆発するという否定的結果が得られた. 本報告集ではその内容の 1 部を紹介する．詳しくは文献 [2] を参照して頂きたい．

大域解の存在を議論する前に，まず NLS に対する積分方程式

$$u(t) = \varepsilon U(t) f - i\lambda \int_0^t U(t-s) \left|u\right|^p ds \tag{I.E.}$$

に対する局所 $\mathbf{L}^2$ 解の存在は良く知られている (文献 [5] 等).

Proposition 1.1 *$1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ とする．このとき $f \in \mathbf{L}^2$ に対し、適当な正の時刻 $T > 0$ と一意解 $u \in \mathbf{C}\left([0,T);\mathbf{L}^2\right) \cap \mathbf{L}_t^r\left([0,T);\mathbf{L}_x^\rho\right)$ to (I.E.) が存在する．ここで (ρ, r) は $\rho = p+1$ と $\frac{2}{r} = \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho}$ で与えられる.*

さて, そこで次の関心は, 「NLS の大域解は存在するのか?」すなわち次の「局所解の最大存在時間

$$T_m = \sup\left\{T \in [0,\infty);\ \exists! u : \text{sol to (I.E.) s.t. } u \in \mathbf{C}\left([0,T);\mathbf{L}^2\right) \cap \mathbf{L}_t^r\left([0,T);\mathbf{L}_x^\rho\right)\right\}$$

の評価である?」である．

*m-ikeda@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2 主結果

係数 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ の符号に応じて, データの形状を次のように選ぶ:

$\lambda_1 \backslash \lambda_2$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_2 < 0$
$\lambda_1 = 0$	$\times$	$\int f_1 dx > 0$	$\int f_1 dx < 0$
$\lambda_1 > 0$	$\int f_2 dx < 0$	$\int f_1 dx > 0$ or $\int f_2 dx < 0$	$\int f_1 dx < 0$ or $\int f_2 dx < 0$
$\lambda_1 < 0$	$\int f_2 dx > 0$	$\int f_1 dx > 0$ or $\int f_2 dx > 0$	$\int f_1 dx < 0$ or $\int f_2 dx > 0$

(1)

かつ, この表中に現れる関数は $\mathbf{L}^1$ に属する (例えば $\lambda_2 = 0$ の場合 $f_2 \in \mathbf{L}^1$ を仮定) とする. このとき先の積分方程式 NLS の大域的 $\mathbf{L}^2$ 解の非存在が従う:

Theorem 2.1 $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$, $f \in \mathbf{L}^2$. さらにデータが形状条件 *(1)* を満たすとする. このとき $T_m < \infty$ かつ

$$\liminf_{t \to T_m - 0} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} = +\infty. \tag{2}$$

この定理は「NLS のある大域的弱解は存在しない (Thm 2.3) と大域的 $\mathbf{L}^2$ 解は大域的弱解になる (Prop 2.4)」の 2 つから従う. そこで弱解の正確な定義を用意する:

Definition 2.2 u が *NLS* の "局所的"弱解とは, 適当な正数 $T > 0$ が存在して次を満たす: $u \in \mathbf{L}^p_{loc}([0,T) \times \mathbf{R}^n)$ かつ, 任意の $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty([0,T) \times \mathbf{R}^n)$ に対して

$$\int_{[0,T)\times\mathbf{R}^n} u \left(-i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta\psi \right) dxdt = i \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\psi(0,x)\,dx + \lambda \int_{[0,T)\times\mathbf{R}^n} |u|^p \psi dxdt.$$

$T > 0$ が任意の正数と取れるとき, u を "大域的"弱解 という.

次の定理は適当な初期データに対しては上記の大域的弱解の非存在を意味する.

Theorem 2.3 $1 < p \leq 1 + \frac{2}{n}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$ に対して, データ $f = f_1 + if_2 \in \mathbf{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ が形状条件 *(1)* を満たすように選ぶ. このとき u を *NLS* の大域的弱解とすると $u(t,x) \equiv 0$ *a.e* $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^n$.

上記の定理 2.3 のは, Qi S. Zhang [6] によるテスト関数の方法の応用から従う. もっともその方法は非線形項の正値性を必要とするため係数 $\lambda \in \mathbf{C}$ に対しては若干の修正が必要になることに注意する.
次の Prop は $\mathbf{L}^2$-解は上の意味の弱解になることを意味する.

Proposition 2.4 積分方程式 *(I.E.)* の $\mathbf{L}^2$-解 $u \in \mathbf{C}\left([0,T);\mathbf{L}^2\right)$ は *Definition 2.2* の意味の弱解になる.

この証明の困難な点は p が 1 に近い場合, $|u|^p$ が 2 階微分できないところにある.

3 Proof of Theorem 2.3

このセクションでは，メインパートである定理 2.3 の証明を与える．
まず，2 つのテスト関数 $\eta = \eta(t) \in \mathbf{C}_0^\infty([0,\infty))$ と $\phi = \phi(x) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ で，次を満たすものを取ってくる．$0 \leq \eta, \phi \leq 1$,

$$\eta(t) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{if } t \geq 1 \end{cases} \quad \phi(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

次に，$R > 0$ を十分に大きな正の定数とする．上のカット・オフ関数を R 用いてスケール変換する:

$$\eta_R(t) \equiv \eta\left(\frac{t}{R^2}\right), \quad \text{for } t \in \mathbf{R}, \ \phi_R(x) \equiv \phi\left(\frac{x}{R}\right), \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n$$

また，時間と空間についてのテスト関数を次で導入する:

$$\psi_R(t,x)=\eta_R(t)\,\phi_R(x)\,,\quad \text{for }\ (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbf{R}^n.$$

簡単のため，$\mathbf{I}_R\equiv\left[0,R^2\right]$ を時間区間，$\mathbf{B}_R\equiv\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|\le R\}$ を中心原点，半径 R の閉球とする．さらに，これらの閉集合を用いて，時空間の集合 $\mathbf{Q}_R\equiv\mathbf{I}_R\times\mathbf{B}_R$を定義する. 今，$m\ge\left[\frac{2p}{p-1}\right]+1$ なる自然数で定義する．これらを用いて，$R>0$ の非負値関数を次で導入する:

$$I_R\equiv\int_{\mathbf{Q}_R}|u|^p\,\psi_R^m dxdt<\infty \tag{3}$$

以下，簡単のため $\lambda_1>0$ の場合のみを考える．他の場合もほとんど同様の方法で扱うことができる．この場合，仮定 (1) によって，$f_2\in\mathbf{L}^1$ かつ $\int_{\mathbf{R}^n}f_2(x)\,dx<0$ と仮定して良いことになる．今，u が (NLS) の大域的弱解であるので，(see Definition 2.2), 弱形式の等式を $T=R^2+1$ として用い，さらに $\psi_R\left(R^2,x\right)=\eta(1)\,\phi_R(x)=0$ for all $x\in\mathbf{R}^n$ に注意すると，次を得る．

$$\begin{aligned} I_R &= \Bigg(\frac{1}{\lambda_1}\int_{\mathbf{B}_R}f_2(x)\,\phi_R^q(x)\,dx+q\int_{\mathbf{Q}_R}(\operatorname{Im}u)\,\psi_R^{m-1}\partial_t(\psi_R)\,dxdt\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}_R}(\Re u)\,\Delta\left(\psi_R^m\right)dxdt\Bigg). \end{aligned}\tag{4}$$

仮定 (1) によって, (4) の第一項は十分大きな正の数 $R>0$ に対しては負の数となる．実際，$\phi_R(x)=0$ $(x\notin\mathbf{B}_R)$ により，次を得る．

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbf{B}_R}f_2(x)\,\phi_R^m(x)\,dx &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbf{R}^n}f_2(x)\,\phi_R^m(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}f_2(x)\,dx<0. \end{aligned}$$

上の最後の等式では $f_2\in\mathbf{L}^1$ であることからルベーグ収束定理を用いた．よって，十分大きな正の数 $R_1>0$ が存在して，任意の $R>R_1$ に対して，

$$\int_{\mathbf{B}_R}f_2(x)\,\phi_R^q(x)\,dx<0. \tag{5}$$

従って，I_R が任意の $R>0$ に対して実数であることに注意すると，$R>R_1$ に対して次を得る．

$$\begin{aligned} I_R &< m\int_{\mathbf{Q}_R}(\operatorname{Im}u)\,\psi_R^{m-1}\left(\partial_t\psi_R\right)dxdt+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{Q}_R}(\Re u)\,\Delta\left(\psi_R^m\right)dxdt\\ &\lesssim \int_{\mathbf{Q}_R}|u|\,\psi_R^{m-1}\left|\partial_t(\psi_R)\right|dxdt+\int_{\mathbf{Q}_R}|u|\left|\Delta\left(\psi_R^m\right)\right|dxdt\\ &\equiv J_{1,R}+J_{2,R}. \end{aligned}\tag{6}$$

まず，$J_{1,R}$ を評価する．単純な計算により，

$$\partial_t\psi_R(t,x)=\frac{1}{R^2}\phi_R(x)\left(\partial_t\eta\right)\left(\frac{t}{R^2}\right).$$

等式 $(\partial_t\eta)(t)=0$ $\left(0\le t\le\frac{1}{2}\right)$, 評価 $0\le\phi(x)\le1$ for $x\in\mathbf{R}^n$, $\ |\partial_t\eta(t)|\le C$ for $t\in[0,\infty)$ とヘルダーの

不等式 ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ に注意する) によって，次を得る

$$
\begin{aligned}
J_{1,R} &= \frac{1}{R^2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R}|u|\,\psi_R^{m-1}\phi_R(x)\left|(\partial_t\eta)\left(\frac{t}{R^2}\right)\right|dxdt \\
&\lesssim \frac{1}{R^2}\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R}|u|\,\psi_R^{m-1}dxdt \\
&\lesssim \frac{1}{R^2}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R}|u|^p\,\psi_R^{m}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R}dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R}|u|^p\,\psi_R^{m}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}R^{\frac{n+2}{q}-2} \\
&\simeq I_{1,R}^{\frac{1}{p}}R^{\frac{n+2}{q}-2},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで，

$$
I_{1,R}\equiv\int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R}\lambda\,|u|^p\,\psi_R^{m}dxdt.
$$

$1<p\le 1+\frac{2}{n}$ より，$\frac{n+2}{m}-2\in(-2,0]$ に注意する．同様にして，$J_{2,R}$ を評価する．

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\psi_R^m\right) &= \frac{1}{R^2}m\,(m-1)\,\eta_R^m(t)\,\phi_R^{m-2}(x)\,|\nabla\phi|^2\left(\frac{x}{R}\right) \\
&\quad+\frac{1}{R^2}m\eta_R^m(t)\,\phi_R^{m-2}(x)\,(\Delta\phi)\left(\frac{x}{R}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

従って，等式 (8) と $|\nabla\phi|(x)=(\Delta\phi)(x)=0$ for $|x|\le\frac{1}{2}$ によって，次のように評価できる．

$$
\begin{aligned}
J_{2,R} &\lesssim \frac{1}{R^2}\int_{\mathbf{Q}_R}|u|\,\eta_R^m(t)\,\phi_R^{m-2}(x)\,|\nabla\phi|^2\left(\frac{x}{R}\right)dxdt \\
&\quad+\frac{1}{R^2}\int_{\mathbf{Q}_R}|u|\,\eta_R^m(t)\,\phi_R^{m-1}(x)\,|\Delta\phi|\left(\frac{x}{R}\right)dxdt \\
&\lesssim \frac{1}{R^2}\int_0^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R\backslash\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}}|u|\,\psi_R^{m-1}dxdt,
\end{aligned}
$$

ここで，$0\le\eta_R(t)\le 1$ for $t\in[0,\infty)$ and $|\Delta\phi|(x)\le C$ for $x\in\mathbf{R}^n$ を用いた．次に $m\ge\frac{2p}{p-1}$ に注意して，(7) の証明と同様にして，次を得る:

$$
\begin{aligned}
J_{2,R} &\lesssim \frac{1}{R^2}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R\backslash\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}}|u|^p\,\psi_R^{m}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R\backslash\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}}dxdt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_0^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R\backslash\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}}|u|^p\,\psi_R^{m}dxdt\right)^{\frac{1}{p}}R^{\frac{n+2}{q}-2}\simeq I_{2,R}^{\frac{1}{p}}R^{\frac{n+2}{q}-2},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで，

$$
I_{2,R}\equiv\int_0^{R^2}\int_{\mathbf{B}_R\backslash\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}}|u|^p\,\psi_R^{m}dxdt.
$$

以上 (6), (7), (9) を組み合わせると，次を得る:

$$
I_R\lesssim\left(I_{1,R}^{\frac{1}{p}}+I_{2,R}^{\frac{1}{p}}\right)R^{\frac{n+2}{q}-2},
\tag{10}
$$

for $R>R_1$. 包含関係 $\mathbf{I}_R\backslash\mathbf{I}_{\frac{R}{\sqrt{2}}}\times\mathbf{B}_R,\ \mathbf{I}_R\times\mathbf{B}_R\backslash\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}\subset\mathbf{Q}_R$ に注意すると，任意の $R>0$ に対して，

$$
I_{i,R}\le I_R,\quad\text{for } i=1,2.
\tag{11}
$$

従って，評価 (10)-(11) によって，

$$I_R \lesssim R^{n+2-2q} \lesssim C, \tag{12}$$

for $R > R_1$, これは $n+2-2q \le 0$ から従う．C は $R > 0$ とは無関係であることに注意する．また，臨界冪 $p = 1 + \frac{2}{n}$ には，等式

$$n + 2 - 2q = 0$$

が成立することに注意しておく． 一方，等式 $\psi_R(t,x) = 1$ for $(t,x) \in \left[0, \frac{R^2}{2}\right] \times \mathbf{B}_{\frac{R}{2}}$，不等式 (12) によって，次を得る:

$$\int_0^{\frac{R^2}{2}} \int_{\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}} |u|^p \, dxdt = \int_0^{\frac{R^2}{2}} \int_{\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}} |u|^p \, \psi_R^m dxdt \le I_R \lesssim C, \tag{13}$$

for any $R > R_1$. 任意のコンパクト集合 $\Omega \subset [0,\infty) \times \mathbf{R}^n$ に対して，十分大きな正の数 $R_2 > 0$ が存在して，$\Omega \subset \left[0, \frac{R_2^2}{2}\right] \times \mathbf{B}_{R_2}$. 以上から，任意の $R > \max(R_1, R_2)$ に対して，次を得る:

$$\int_\Omega |u|^p \, dtdx \le \int_0^{\frac{R_2^2}{2}} \int_{\mathbf{B}_{\frac{R_2}{2}}} |u|^p \, dxdt \le \int_0^{\frac{R^2}{2}} \int_{\mathbf{B}_{\frac{R}{2}}} |u|^p \, dxdt \lesssim C,$$

これは，$u \in \mathbf{L}^p([0,\infty) \times \mathbf{R}^n)$. を意味する:

$$\int_{[0,\infty)\times\mathbf{R}^n} |u|^p \, dtdx < \infty. \tag{14}$$

一方，包含関係 $\mathbf{B}_R \subset \mathbf{R}^n$,$\mathbf{I}_R \subset [0,\infty)$ と $0 \le \psi \le 1$ から，$R > 0$ の関数 $I_{i,R}$ $(i = 1,2)$ は次の評価を満たす:

$$0 \le I_{1,R} \le \int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2} \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \, \psi_R^m dxdt \le \int_{\frac{R^2}{2}}^{R^2} \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \, dxdt \tag{15}$$

$$0 \le I_{2,R} \le \int_0^\infty \int_{\mathbf{B}_R \setminus \mathbf{B}_{\frac{R}{2}}} |u|^p \, \psi_R^m dxdt \le \int_0^\infty \int_{\mathbf{B}_R \setminus \mathbf{B}_{\frac{R}{2}}} |u|^p \, dxdt. \tag{16}$$

従って，これらの不等式と (14) とから次を得る．

$$\lim_{R \to +\infty} I_{i,R} = 0, \quad \text{for } i = 1, 2. \tag{17}$$

以上より，不等式 (10) と (17) によって，$R \to +\infty$ とすると，次を得る．

$$\lim_{R \to +\infty} I_R = 0. \tag{18}$$

最終的に，評価 (13) と不等式 (18) により，$R \to +\infty$ とすると，次を得る:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \, dxdt = 0,$$

これは $u \equiv 0$ for a.e. $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^n$ を意味する．

参考文献

[1] N. Hayashi and P.I. Naumkin, Commun. Math. Phys. **267** (2006), pp477-492.

[2] M. Ikeda and Y. Wakasugi, arXiv:1111.0178.

[3] K. Moriyama, S. Tonegawa, and Y. Tsutsumi, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), 983-996.

[4] A. Shimomura and Y. Tsutsumi, Differential Integral Equations, **19** (2006), 1047-1060.

[5] Y. Tsutsumi, Funkcialaj Ekvacioj, **30** (1987), 115-125.

[6] Qi S. Zhang, Duke Math. J., **97** (1999) 515-539.