写像類群から視る特異レフシェッツ束

早野　健太*

大阪大学大学院博士後期課程１年

1　序

特異レフシェッツ束（**broken Lefschetz fibration**）とは，有向 4 次元閉多様体から有向閉曲面への可微分写像で，ある２種類の特異点（レフシェッツ特異点と不定値折り目特異点）しか持たないものを指す．この写像はレフシェッツ束と呼ばれる，代数幾何や複素幾何で古くから研究されている対象を一般化したものであり，near-symplectic 構造に適合するファイバー構造として近年導入されたものであるが，その後，実特異点論との相性の良さや，near-symplectic 構造を持つ 4 次元多様体の，サイバーグ・ウィッテン不変量の幾何学的な解釈の有力な候補を与えることなどがわかり，現在盛んに研究されている．

特異レフシェッツ束の中でも扱いやすいクラスとして，**単純特異レフシェッツ束**（**simplified broken Lefschetz fibration**）というものがある．これは球面上の特異レフシェッツ束であり，特異点の様子やファイバーの形にある制限を加えたものであるが，このような制限があるにも関わらず，近年**全ての有向 4 次元閉多様体が単純特異レフシェッツ束を許容する**ということが示された (この結果は [2]，[10]，[16] の結果を合わせることにより示される)．しかしながらこのファイバー構造の研究の歴史は非常に浅く，その性質は未だ漠として掴めていない．

単純特異レフシェッツ束が与えられると，ファイバー構造が持つ特異点の消滅サイクルを視ることにより，閉曲面上の単純閉曲線の列を得ることができる．一般ファイバーの種数がある程度大きければ（2 以上であれば），単純特異レフシェッツ束の全空間（の微分同相類）はこの列から一意に定まることが知られている．従って，この列は単純特異レフシェッツ束の，曲面上の曲線による組み合わせ的記述を与えるが，逆に閉曲面上の単純閉曲線の列をある条件を満たすようにとると，その列を消滅サイクルとして持つような単純特異レフシェッツ束が得られるので，このような記述は単純特異レフシェッツ束の具体例を構成する手段としても有用である．本稿では，単純特異レフシェッツ束，および上述の組み合わせ的な記述について説明し，それにより得られる結果を紹介することを目的とする．

2　種々の用語の定義

この章では，本稿で用いる用語の定義を説明していく．

定義 2.1. M^4，B^2 を，向きづけられた可微分閉多様体とする（指数の添え字は次元を表す）．可微分写像 $f: M \to B$ が次の条件を満たすとき，f を**特異レフシェッツ束**（**broken Lefschetz fibration**）という：

(1) f は以下の２つの特異点しか持たない：

- $(z_1, z_2) \mapsto \xi = z_1 z_2$,
  ただし，(z_1, z_2)(resp. ξ) は，M(resp. B) の向きに適合する複素座標；

*k-hayano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

- $(t, x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2) = (t, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$,
  ただし，(t, x_1, x_2, x_3)(resp. (y_1, y_2)) は，M(resp. B) の実座標；

(2) $f|_{Z \cup \mathcal{C}}$ ：単射,

ここで，Z (resp.$\mathcal{C}$) は f の不定値折り目特異点 (resp. Lefschetz 特異点) 全体である．

(1) における 2 種類の特異点をそれぞれ **Lefschetz 特異点** (**Lefschetz singularity**)，**不定値折り目特異点** (**indefinite fold singularity**) という．また，不定値折り目特異点を持たないような特異レフシェッツ束を単に**レフシェッツ束**（**Lefschetz fibration**）という．

特異レフシェッツ束に現れる 2 種類の特異点の様子，および臨界値の近くでのファイバーの変化の様子を見ておく．

まずレフシェッツ特異点は M 内の有限個の点からなり，その像である臨界値も有限集合となる．臨界値の十分近くにある正則値と，臨界値を結ぶ道 α を，片側の端点以外に f の臨界値を含まないようにとる（図 1 左参照）．図 1 左のように，この道に沿って f の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけたとき（厳密には，f を正則点全体に制限したものの水平分布 $\mathcal{H}$ を適当にとり，道 α の速度ベクトル場を $\mathcal{H}$ で持ち上げ，その積分曲線を用いて正則ファイバーを特異ファイバーに近づける），正則ファイバー上のある単純閉曲線 c が，特異ファイバーに近づくにつれて小さくなり，特異ファイバーに到達したとき図 1 左のように 1 点に潰れる．このとき現れる単純閉曲線 c を，**レフシェッツ特異点の消滅サイクル**（**vanishing cycle of Lefschetz singularity**）という．消滅サイクルは正則値と臨界値を結ぶ道 α の取り方に依存するが，道を一つ固定すると，消滅サイクルのアイソトピー類は正則ファイバーの近づけ方（つまり水平分布の取り方）に依らない．

不定値折り目特異点全体は M の 1 次元部分多様体となり，その像も B の 1 次元部分多様体となる．臨界値全体からなる 1 次元部分多様体の両側にある 2 つの正則値を結び，臨界値全体と横断的に交わる道 α を一つとる（図 1 右参照）．レフシェッツ特異点の場合と同様に，正則ファイバーを道 α に沿って特異ファイバーに近づけると，正則ファイバー上のある単純閉曲線 c が，特異ファイバーに近づくにつれて小さくなり，特異ファイバーで 1 点に潰れ，その後特異ファイバーを通過すると消滅する．このとき現れる単純閉曲線 c を，**不定値折り目特異点の消滅サイクル**（**vanishing cycle of indefinite fold singularity**）という．不定値折り目特異点の消滅サイクルのアイソトピー類も，道 α を一つ固定すれば正則ファイバーの近づけ方に依らないことに注意する．

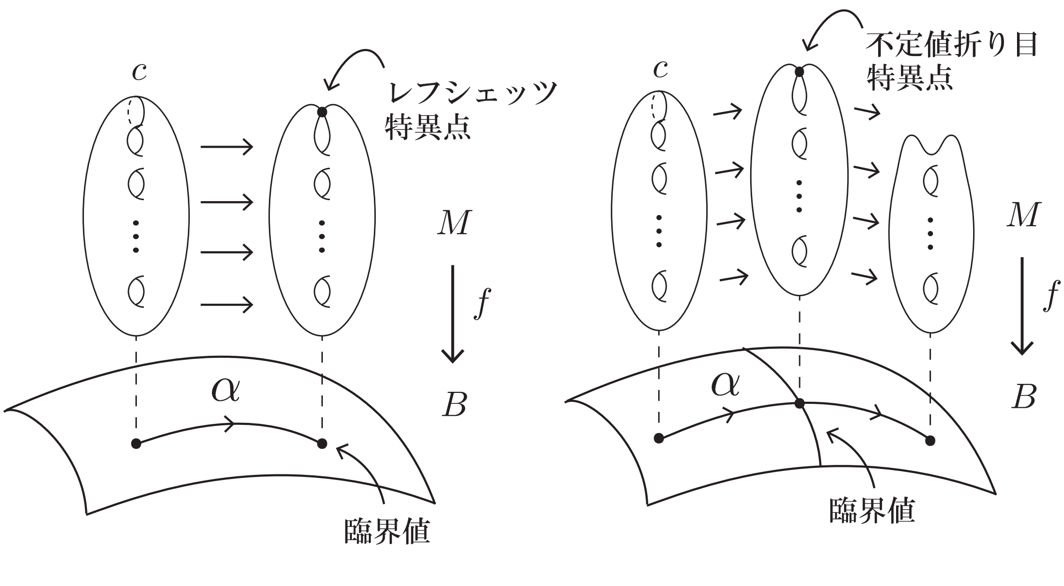

図 1: 左：レフシェッツ特異点のまわりのファイバーの様子．右：不定値折り目のまわりのファイバーの様子．

$f: M \to S^2$ を球面上の特異レフシェッツ束とし，以下を仮定する．

(a) f の不定値折り目特異点全体は連結,

(b) f のファイバーは全て連結.

このとき図 2 のように，不定値折り目特異点の像は球面を 2 つの円板 D_l と D_h に分割し，一方のファイバーの種数は他方のファイバーの種数より 1 大きくなる．種数の大きいファイバーを持つ円板の逆像 $f^{-1}(D_h)$ を f の **higher side** といい，もう一方の円板の逆像 $f^{-1}(D_l)$ を f の **lower side** という．

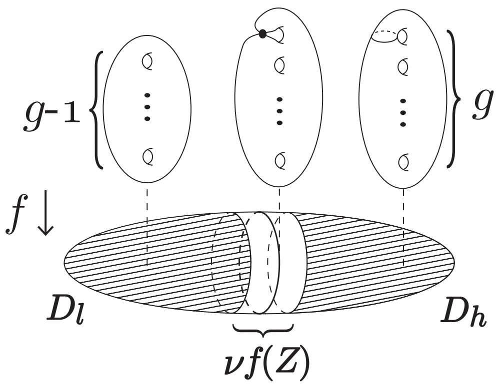

図 2: 球面上の特異レフシェッツ束のファイバーの様子

定義 2.2. 以下の条件を満たす球面上の特異レフシェッツ束 $f: M \to S^2$ を**単純特異レフシェッツ束**（**simplified broken Lefschetz fibration**）という：

(1) 上述の (a)，(b) の条件を満たす．すなわち f の不定値折り目特異点全体は連結で，f のファイバーは全て連結；

(2) f のレフシェッツ特異点は全て f の higher side に含まれる．

また，higher side に含まれるファイバーの種数を，f の**種数**という．

3 単純特異レフシェッツ束の組み合わせ的記述

この章では，単純特異レフシェッツ束を組み合わせ的な情報により理解するための結果を紹介する．

$f: M \to S^2$ を，不定値折り目を持つ種数 g の単純特異レフシェッツ束とする．f の higher side の像に含まれる正則値 $p_0 \in S^2$ と，p_0 と 2 種類の特異点の像を結ぶ道 γ，$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \subset S^2$ をそれぞれ図 3 のようにとる．

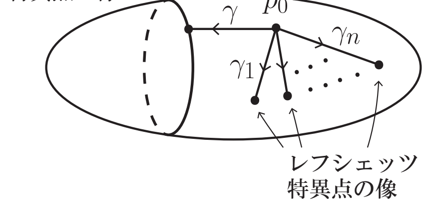

図 3: 道 γ，γ_i の様子

2 章で述べたように，これらの道は一般ファイバー $f^{-1}(p_0)$ に消滅サイクルを与える．γ によって定まる不定値折り目の消滅サイクルを $c \subset f^{-1}(p_0)$ とし，γ_i によって定まるレフシェッツ特異点の消滅サイクルを $c_i \subset f^{-1}(p_0)$ とする．f の種数に関する条件から，$f^{-1}(p_0)$ は種数 g の閉曲面 Σ_g と微分同相である．この 2 つの同一視 $f^{-1}(p_0) \cong \Sigma_g$ を一つ固定し，$c, c_i \subset \Sigma_g$ とみなす.

定理 3.1 (Auroux-Donaldson-Katzarkov [1])**.**

$$t_{c_1} \cdot \cdots \cdot t_{c_n} \in \mathrm{Ker}(\Phi_c : \mathrm{MCG}\,(\Sigma_g)(c) \to \mathrm{MCG}\,(\Sigma_{g-1})),$$

ただし，$\mathrm{MCG}\,(\Sigma)$ は Σ の微分同相のアイソトピー類全体からなる群（これを Σ の**写像類群**（**mapping class group**）という）であり，$\mathrm{MCG}\,(\Sigma_g)(c)$ は c を保つ微分同相で代表される $\mathrm{MCG}\,(\Sigma_g)$ の部分群，すなわち，

$$\mathrm{MCG}\,(\Sigma_g)(c) = \big\{[T] \in \mathrm{MCG}\,(\Sigma_g) \mid T(c) = c\big\} \subset \mathrm{MCG}\,(\Sigma_g),$$

$\Phi_c : \mathrm{MCG}\,(\Sigma_g)(c) \to \mathrm{MCG}\,(\Sigma_{g-1})$ は c に沿って曲面を手術することにより得られる準同型である（図 4 参照）.

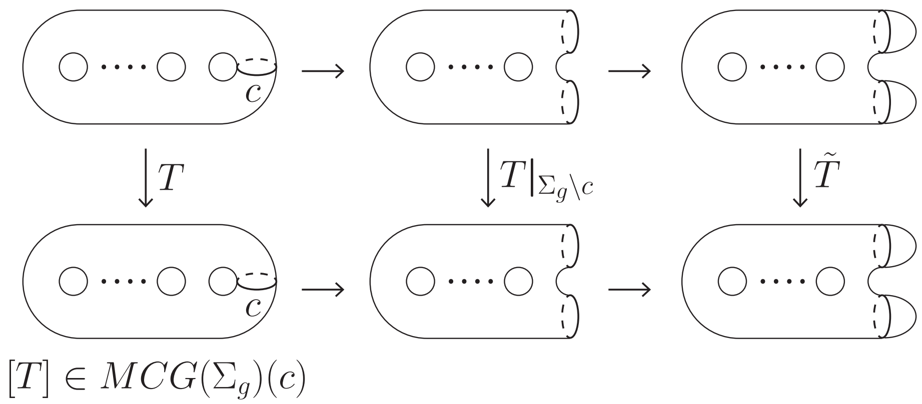

図 4: Φ_c の定義．$\Phi_c([T]) = [\tilde{T}]$ と定義する.

上述の定理は単純特異レフシェッツ束の消滅サイクルから得られる曲線の列が，群の言葉で記述されるある条件を満たすことを意味するが，次の定理はこの条件が（ある意味で）単純特異レフシェッツ束の消滅サイクルになるための十分条件である，ということを意味する.

定理 3.2 (Baykur [2])**.** Σ_g 上の単純閉曲線 $c, c_1, \ldots, c_n$ が,

$$t_{c_1} \cdot \cdots \cdot t_{c_n} \in \mathrm{Ker}(\Phi_c : \mathrm{MCG}\,(\Sigma_g)(c) \to \mathrm{MCG}\,(\Sigma_{g-1}))$$

を満たすとする．このとき，種数 g の不定値折り目を持つ単純特異レフシェッツ束 $f : M \to S^2$ で，$c, c_1, \ldots, c_n$ を消滅サイクルにもつようなものが存在する.

注意 3.3. 定理 3.2 で得られる f は $c, c_1, \ldots, c_n \subset \Sigma_g$ から一意に定まるとは限らない．しかし，その ambiguity は（大雑把に言うと）高々以下の群の分しか現れないということが知られている：

$$\pi_1(\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g-1}), \mathrm{id}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (g = 1), \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (g = 2), \\ 1 & (g \geq 3). \end{cases}$$

特に，種数が 3 以上であれば f は単純閉曲線から一意的に決まる.

以上2つの定理（と，その後の注意）から次のことが言える：

「単純特異レフシェッツ束と，ある代数的な条件を満たす曲線の列は，“おおよそ” 対応する.」

特に，**単純特異レフシェッツ束の分類や構成に関する問題は，全てある条件を満たす曲線の分類や構成の問題に置き換えることができる.** 次の章で紹介する，分類や具体例の構成に関する結果は，いずれもこの考え方に基づくものである.

4 得られた結果

この章では，3章でみた単純特異レフシェッツ束の組み合わせ的な解釈を用いることにより，これまでに得られた結果をいくつか紹介する．なお証明については前の章で述べた通り，単純特異レフシェッツ束に関する問題を曲面上の曲線に置き換えるだけなので，ここでは省略する（証明について詳しくは引用されている論文を参照）.

4.1 種数1の単純特異レフシェッツ束の分類

種数1のレフシェッツ束の分類については次の結果が知られている.

定理 4.1 (Kas [9]，Moishezon [12])**.** $f : M \to S^2$ を種数1のレフシェッツ束とし，f はレフシェッツ特異点を持つとする．このとき，ある整数 $n \geq 1$ が存在し，M は楕円曲面 $E(n)$ を有限回ブローアップしたものと微分同相である.

この結果の，単純特異レフシェッツ束への一般化として，次の結果を得ることができた.

定理 4.2 ([5]，[6])**.**

1. 以下の多様体は，不定値折り目を持ち，レフシェッツ特異点を r 個持つ種数1の単純特異レフシェッツ束を許容する：
   - $\#k\mathbb{CP}^2\#(r-k)\overline{\mathbb{CP}}^2$，ただし $0 \geq k \geq r-1$,
   - $\#\dfrac{r}{2}(S^2 \times S^2)$，ただしこの多様体は r が偶数のときのみ現れる,
   - $L\#r\overline{\mathbb{CP}^2}$，ただし，$L$ は Pao [13] によって定義された多様体 L_n または L'_n,
   - $S\#(S^1 \times S^3)\#r\overline{\mathbb{CP}^2}$，ただし，$S$ は S^2 上の S^2 束.
2. さらに $r \leq 5$ のとき，上述のような単純特異レフシェッツ束を持つ多様体は上で挙げたものに限る.
3. $f : M \to S^2$ を不定値折り目とレフシェッツ特異点を両方もつ種数1の単純特異レフシェッツ束とし，M はスピン構造を持つと仮定する．このとき，M は $\#l(S^2 \times S^2)$ と微分同相である.

注意 4.3. 本研究とは独立に，Baykur-鎌田 [3] においても種数1の単純特異レフシェッツ束が研究されており，定理 4.2 の一部（1. と 2. の $r=0$ の場合）は彼らによっても証明されている．また彼らは，種数1の単純特異レフシェッツ束の，ブローアップによるある種の安定性も示している.

4.2 単純特異レフシェッツ束の切断の性質

単純特異レフシェッツ束 $f : M \to S^2$ に対して，可微分写像 $\sigma : S^2 \to M$ で，$f \circ \sigma = \mathrm{id}$ を満たすものを，f の**切断**（**section**）という．3 章で述べた方法を少し拡張すると（具体的には閉曲面の写像類群で行っていた議論を点つき曲面の写像類群で行うと），単純特異レフシェッツ束の切断も曲面上の曲線の言葉で記述することができる．この記述を用いて次の結果を得ることができた．

定理 4.4 ([6])**.** 任意の整数 $g \geq 2$ に対して,（相対的極小な）種数 g の単純特異レフシェッツ束 $f : M \to S^2$ で，切断によって代表される S^2 から M への写像のホモトピー類を無限個持つようなものが存在する．

定理 4.5 ([6])**.** 任意の整数 n と $g \geq 2$ に対して，種数 g の単純特異レフシェッツ束とその切断で，自己交叉が n になるようなものが存在する．

これらの結果は，レフシェッツ束について得られていた以下の結果が，単純特異レフシェッツ束には一般化できないことを示唆するものである．

定理 4.6 (Smith [14])**.** 任意の（相対的極小な）球面上のレフシェッツ束の，切断によって代表される写像のホモトピー類は高々有限個である．

定理 4.7 (Smith [14]，Stipsicz [15])**.** 任意の（相対的極小な）球面上のレフシェッツ束の切断の自己交叉は，負の値をとる．

4.3 超楕円的単純特異レフシェッツ束の種々の性質

この章での結果は，佐藤正寿氏との共同研究によるものである．

定義 4.8. 下図で表される対合 $\iota_g : \Sigma_g \to \Sigma_g$ を**超楕円的対合**（**hyperelliptic involution**）という．

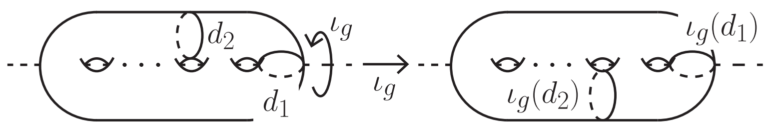

図 5: 超楕円的対合．d_1 は ι_g により保たれるが，d_2 は ι_g により保たれない．

単純特異レフシェッツ束 $f : M \to S^2$ の消滅サイクルが全て対合 ι_g で保たれるとき，f は**超楕円的**（**hyperelliptic**）であるという．

Fuller と Siebert-Tian は独立に，超楕円的レフシェッツ束が（ファイバー構造と適合する）対合を持つことを示した．その一般化として次の結果を得た．

定理 4.9 (Sato-H. [7])**.** $f : M \to S^2$ を，種数が 3 以上の超楕円的単純特異レフシェッツ束とする．

1. 対合 $\omega : M \to M$ で，
$$M^{\omega} = (\text{2-dim. part}) \amalg (s \text{ 個の孤立点})$$
となるものが存在する．ただし，
$$s = \sharp\{p \in \mathcal{C}_f | p \text{ の消滅サイクルは分離的 }\}.$$
さらに ω は $M\#s\overline{\mathbb{CP}^2}$ 上の対合 $\tilde{\omega}$ に拡張でき，$M\#s\overline{\mathbb{CP}^2}/\tilde{\omega} \cong S\#2s\overline{\mathbb{CP}^2}$ となる（S は S^2 上の S^2 束）．
2. $F \subset M$ を f の一般ファイバーとする．このとき，F は M の非自明な有理係数ホモロジー類を代表する．

松本幸夫氏は [11] で，種数の小さいレフシェッツ束の特異ファイバーに対し，**局所符号数**（**local signature**）を定義し，全空間の符号数がこの値から決まることを示した．この結果は遠藤久顕氏 [4] により超楕円的レフシェッツ束に一般化されているが，さらなる一般化として次の結果を得た．

定理 4.10 (Sato-H. [8])**.** $f : M \to S^2$ を種数 g の超楕円的単純特異レフシェッツ束とし，消滅サイクル $c, c_1, \ldots, c_n$ を 3 章のようにとる．このとき，

$$\mathrm{Sign}\,(M) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\mathrm{loc}}(f^{-1}(y_i)) + h(t_{c_1} \cdot \cdots \cdot t_{c_n}),$$

ただし，$\mathcal{C}_f = \{y_1, \ldots, y_n\}$，$\sigma_{\mathrm{loc}}(f^{-1}(y_i))$ は局所符号数であり，

$$h : \mathcal{H}_g(c) = \{[\varphi] \in \mathcal{M}_g(c) | \iota_g \circ \varphi = \varphi \circ \iota_g\} \to \mathbb{Q}$$

はある準同型である．

参考文献

[1] D. Auroux, S. K. Donaldson and L. Katzarkov, *Singular Lefschetz pencils*, Geom. Topol. **9**(2005), 1043–1114

[2] R. İ. Baykur, *Topology of broken Lefschetz fibrations and near-symplectic 4-manifolds*, Pacific J. Math. **240**(2009), 201–230

[3] R. İ. Baykur, S. Kamada, *Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera*, preprint, `arXiv:math.GT/1010.5814`

[4] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann. **316**(2000), no.2, 237–257

[5] K. Hayano, *On genus-*1 *simplified broken Lefschetz fibrations*, Algebr. Geom. Topol. **11**(2011), 1267–1322

[6] K. Hayano, *A note on sections of broken Lefschetz fibrations*, to appear in Bull. London Math. Soc.

[7] K. Hayano and M. Sato, *Four-manifolds admitting hyperelliptic broken Lefschetz fibrations*, preprint, `arXiv:math.GT/1110.0161`

[8] K. Hayano and M. Sato, *A signature formula for hyperelliptic broken Lefschetz fibrations*, preprint, `arXiv:math.GT/1110.5286`

[9] A. Kas, *On the deformation types of regular elliptic surfaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 107–111

[10] Y. Lekili, *Wrinkled fibrations on near-symplectic manifolds*, Geom. Topol. **13**(2009), 277–318

[11] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach* -, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces, (S. Kojima, et. al., eds.), World Scientific, 1996, 123–148

[12] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag, 1977.

[13] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifold with effective torus actions. I*, Amer. Math. Soc. **227**(1977), 279–317

[14] I. Smith, *Geometric monodromy and the hyperbolic disc*, Q. J. Math. **52**(2001), 217–228

[15] A. I. Stipsicz, *Indecomposability of certain Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **129**(2001), 1499–1502

[16] J. D. Williams, *The h–principle for broken Lefschetz fibrations*, Geom. Topol. **14**(2010), no.2, 1015–1063