Fanとトーリック多様体

畑中　美帆 [*]

平成24年6月25日

この度は第9回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました。ポスター発表では、多くのコメントをいただき、大変勉強になりました。また、他大学や他分野の方々の講演を聞くことができ、良い刺激を受けました。このような機会を与えてくださった運営委員の方々、参加者の方々にお礼申し上げます。

ポスター発表では、トーリック多様体の構成や、fanと呼ばれるconvex coneの集まりとトーリック多様体との全単射対応について紹介しましたが、ここではトーリック多様体の直積分解の一意性とcancellation問題について紹介します。

1　トーリック多様体とfanの定義

定義 1.
X : toric variety(トーリック多様体)
$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ Xが複素正規代数多様体で、トーラス$T = (\mathbb{C}^*)^n$を稠密な開部分集合として含み、さらにトーラスへのトーラス作用が自然にXへのトーラス作用に拡張しているような作用を持っているもののことである。

注意 2.
toric manifoldもトーリック多様体と訳すが、toric manifoldはコンパクトで特異点を持たないtoric varietyのこととする。以下、toric varietyとtoric manifoldを区別したいときは、それぞれを英語で、区別する必要がないときは日本語でトーリック多様体と書く。

定義 3.
$\Delta \subset \mathbb{R}^n$: fan $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 原点を頂点に持つconvex coneの集まりで、面以外でconeが重ならないもののことである。ただし、1次元coneの傾きは有理数でなければならず、すべてのconeは直線を含まないものに限る。
また、n次元のfanとは、$\mathbb{R}^n$上にあるfanのこととする。

fanとtoric varietyは以下の定理にあるように関係がある。

定理 4. (トーリック幾何の基本定理)
fanのカテゴリーとtoric varietyのカテゴリーはカテゴリーとして同型

このことから、fanとtoric varietyの間には1対1対応があることがわかり、toric varietyの情報はすべてfanから読み取れることがわかる。

fanとtoric varietyの関係

fan	toric variety
$\mathbb{R}^n$を覆っている。	コンパクト
n次元coneの数	オイラー標数
各coneの生成ベクトルが$\mathbb{Z}^n$の基底の一部	特異点を持たない

[*] m11saQ0621@ex.media.osaka-cu.ac.jp

他にも、基本群やコホモロジー環も fan からわかる。

・基本群の求め方

$X(\Delta)$ を fan Δ からできるトーリック多様体とする。$X(\Delta)$ の基本群は

$$\pi_1(X(\Delta)) \cong N/N^{'}$$

と表される。ここで、$N = \mathbb{Z}^n, N^{'} = \sum_{\sigma \in \Delta} N_\sigma$: N_σ で生成される部分群, N_σ : (σ を含む最小の部分空間) $\cap N$

・コホモロジー環の求め方

X を toric manifold とする。X のコホモロジー環は次のようになる。

$$H^*(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[D_1, \ldots, D_d]/I$$

ここで、d は fan の１次元 cone の数を表し、I は次の (1)、(2) を relation として含むイデアルである。

(1) $D_{i_1} \ldots D_{i_t} = 0$ （$\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_t}$ が１つの cone に含まれない）

(2) $\sum_{i=1}^{d} \langle u, v_i \rangle D_i = 0$

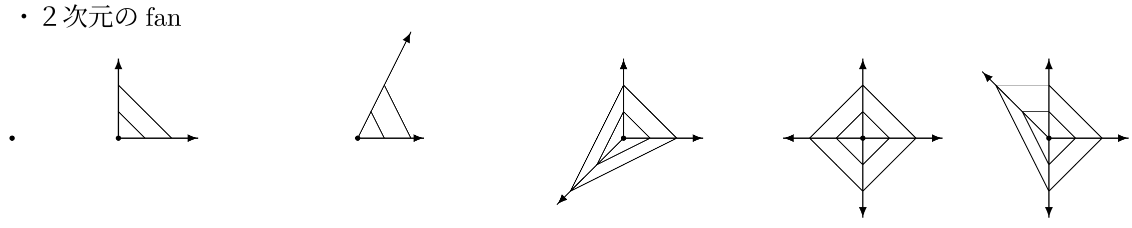
ここで、v_i は１次元 cone τ_i の first lattice point、u は $\mathbb{Z}^n$ の元、$\langle u, v_i \rangle$ は u と v_i のユークリッド内積とする。

以下、fan と toric variety の例を紹介する。

・１次元の fan

$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}P^1$
nsg	nsg	cpt
0	1	nsg
		2

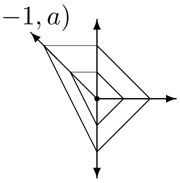
・２次元の fan



$(\mathbb{C}^*)^2$	$(\mathbb{C})^2$	$\{(u,v,w) \in \mathbb{C}^3 \mid uw = v^2\}$	$\mathbb{C}P^2$	Hirzebruch surface	
nsg	nsg	sg	cpt	$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$	$\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$
0	1	1	nsg	cpt	
			3	nsg	
				4	

ここで、fan のすぐ下はその fan に対応するトーリック多様体、cpt はコンパクト、nsg は nonsingular、sg は singular、一番下の数字はオイラー標数を表す。

次に、variety としての同型と微分同相の違いについて Hirzebruch surface を用いて説明する。Hirzebruch surface の fan は、一般的に次のような形をしている。



$a \in \mathbb{Z}$

この fan からできる Hirzebruch surface を F_a で表す。このとき、次が成り立つ。

F_a と F_b が variety として同型 $\Leftrightarrow a = b$ or $-b$

F_a と F_b が微分同相 $\Leftrightarrow a \equiv b \pmod 2$

実際、次のことが成り立つ。

2つの toric variety$X$ と Y が variety として同型 $\Leftrightarrow X$ の fan Δ_X と Y の fan Δ_Y が同型

ここで、2つの fan Δ_X と Δ_Y が同型であるとは、$\mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{Z}^n$ への同型写像が存在し、その写像で Δ_X と Δ_Y がうつりあうことである。ただし、X と Y の次元はともに n 次元とする。一方で、2つの toric manifold X と Y が微分同相になるための fan の条件は知られていない。そのため、variety の同型に関する問題は、トーリック幾何の基本定理（上の関係）を使うことができるが、微分同相に関する問題は、同じようにはできない。

ここで、トーリック多様体の分類について紹介する。variety としての同型に関する分類は、fan の分類に帰着できるが、微分同相に関する分類は fan を使うことはできない。しかし、2次元以下であれば分類は知られている。

1次元の toric manifold ; $\mathbb{C}P^1$

2次元の toric manifold ; $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$

$\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \sharp \ldots \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$

3次元以上の分類は知られていない。

2 トーリック多様体の分解の一意性と cancellation

ここでは、トーリック多様体の分解の一意性と cancellation 問題について紹介する。

定理 5.

各 i,j に対して、X_i, Y_j を（variety として、直積に関して）既約な toric variety とする。この時 $X_1 \times \cdots \times X_k$ と $Y_1 \times \cdots \times Y_l$ が variety として同型であれば、$k = l$ であり、対称群 S_k の元 σ が存在し、どの X_i も $Y_{\sigma(i)}$ と variety として同型になる。

この定理により、toric variety$X$ の既約な直積分解の仕方は、variety 同型に関して、順序を除き一意的であることがわかる。この定理は、トーリック幾何の基本定理を用いて、fan の言葉に書き直すことにより証明できる。

この定理から toric variety の variety 同型に関する cancellation が成り立つことがわかる。

系 6.

X, Y, Z を toric variety とする。このとき、$X \times Z$ と $Y \times Z$ が variety として同型であれば、X と Y が variety として同型である。

次に、variety 同型を微分同相に変えると以下が成り立つ。

定理 7.
各 i, j に対して、X_i と Y_j を（smooth manifold として、直積に関して）既約な 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、$X_1 \times \cdots \times X_k$ と $Y_1 \times \cdots \times Y_l$ が微分同相であれば、$k = l$ であり、対称群 S_k の元 σ が存在し、どの X_i も $Y_{\sigma(i)}$ と微分同相になる。

この定理により、toric manifold X が 2 次元以下の既約な toric manifold に直積分解できるとき、その分解の仕方は、順序を除き一意的であることがわかる。

注意 8.
（直積に関して）“ smooth manifold として既約 ”と“ variety として既約 ”は異なる。この違いを Hirzebruch surface を用いて説明する。

前の章で、１次元 cone の傾きが $(1, 0), (0, 1), (0, -1), (-1, a)$ となる fan からできる Hirzebruch surface を F_a と表した。

F_2 について見てみる。

F_2 は $F_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と微分同相なので、F_2 は smooth manifold として既約でないことがわかる。
一方で、F_2 は $F_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と variety として同型ではないので、F_2 は variety としては既約である。

この例だけでも、“ smooth manifold として既約 ”と“ variety として既約 ”は異なることがわかる。

上の定理の証明にトーリック幾何の基本定理を使うことはできない。前章で述べたが、2 つの toric manifold が微分同相になるための fan の条件がわかっていないからである。そこで、上の定理の証明に、次の 2 つの補題を用いた。

補題 9.
各 i, j に対して、X_i と Y_j を（smooth manifold として、直積に関して）既約な 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、コホモロジー環 $H^*(X_1 \times \cdots \times X_k)$ と $H^*(Y_1 \times \cdots \times Y_l)$ が同型であれば、$k = l$ であり、対称群 S_k の元 σ が存在し、どの $H^*(X_i)$ も $H^*(Y_{\sigma(i)})$ と同型になる。

補題 10.
X と Y を 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、X と Y が微分同相になるための必要十分条件は、それぞれのコホモロジー環 $H^*(X)$ と $H^*(Y)$ が同型であることである。

注意 11.
上の 2 つの補題はいずれも高次元で成り立つかどうかはわかっていない。２つめの補題を一般次元で考えたものは、コホモロジー剛性問題と呼ばれている。コホモロジー剛性問題は、部分的な肯定的結果が知られているが、反例はまだ知られていない。

系としてコホモロジー同型に関する cancellation について紹介する。

系 12.
X, Y, Z を 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、コホモロジー環 $H^*(X \times Z)$ と $H^*(Y \times Z)$ が同型であれば、$H^*(X)$ と $H^*(Y)$ が同型になる。

この系から、微分同相に関する cancellation も成り立つことがわかる。

系 13.
X, Y, Z を 2 次元以下の toric manifold とする。このとき、$X \times Z$ と $Y \times Z$ が微分同相であれば、X と Y は微分同相である。

参考文献

[1] William Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol.131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.