Atiyah-Singer の指数定理

伊藤 哲也 [*], 今城 洋亮[†], 蔦谷 充伸[‡], 野坂 武史 [§]

概要

このセミナーで我々は, Atiyah-Singer の指数定理に関する論文群の第一版 [AS1] を輪読した. 内容は指数定理の K 群版を証明するものである. この報告集では, その論文内容を原論文に沿って解説する.

1 Introduction

指数定理とは何か？粗く掻い摘んで言えば, 次の二つが一致するというものである:

「ベクトル束から定まる位相的指数」＝「楕円型微分作用素から定まる解析的指数」.

厳密な主張を記述するには, ベクトル束, Chern 指標, 楕円型など多少の数学用語が必要である. しかし定理の主張じたいは至極シンプルであり, また具体的かつ実用的である. 実際, 世の中には楕円型微分作用素はそこそこ存在し, それを指数定理に直接代入する事によって微分トポロジーで 50 年代までに傑出された定理の多くが導かれる. 応用例も多く, 物理でも使われる. 主要定理らを包括する指数定理は「幾何学の金字塔」と譬えられ, ６０年代までの幾何学パラダイムを締め括る定理であった. 今でもその重要な位置を占め, 指数定理の解説本も多く流通しており, 幅広く用いられている. それも定理の本質も限界もよく理解され, 指数定理の証明は何通りも示されている.

しかしながら, よく理解されたと言ったが, 指数定理を巡る多くの考察は, 原論文を分水嶺とした焼直しとも見えなくは無い. 例えば, 既存の証明はだいたい次のように基本方針が共通している: 即ち, 楕円型微分方程式における素朴な現象を, 主表象か Chern-Weil 理論へと柔らかい対象へと媒介し, 位相 K 群または特性類の言葉で局所的な (または固定点, 超大域的な) 情報に換言するものである. 指数は K 群という粗い網の目で定量化される為, 多角的なアプローチを許し豊富な視点を供給した. しかしながら, どの証明も冗長な感が否めず, 難所が必ず顕在し解り易いとは云い難い. もちろん, 各々の証明が各々の長所を持ち, これに伴った発展もあるのだが, どの数学言語で武装し指数を篩い落とそうとも結局, 原典の「指数の生成元」に回帰してしまうようである.

そうこうするうちに, 筆者らは結局原論文を選び, そこから指数定理の証明を学ぶ事にした. 昨今では指数定理を会得する近道があるとは思うが, 上記の事もありルーツを辿って基本哲学を知るのも有意義であろう. そこでこの報告集では, 原論文の特徴を, 特にそれの長所を (日本語で) 伝えようと, 原論文の解説を試みた. 指数定理ユーザーでもない筆者らの記述には, 無理や誤解が生じている事は否めない. それは読者の寛大な心に委ねてしまうが, 筆者らは報告集が原論文の学びの一助となることをただただ希う次第である.

[*] email@adress: tetitoh@ms.u-tokyo.ac.jp
[†] email@adress: imagi@math.kyoto-u.ac.jp
[‡] email@adress: tsutaya@math.kyoto-u.ac.jp
[§] email@adress: nosaka@kurims.kyoto-u.ac.jp

1.1 K 群版の指数定理の定式化 (群が一点の場合). 報告集の梗概.

この小節では原論文 [AS1] 1章に沿って定式化してみよう. 指数定理はコホモロジーを使いよく紹介される. が, [AS1] の 1 つの特徴として, K 群という 1 つ高いメタレベルで, 指数定理が定式化と証明がされている. すると指数の定義と定理の主張だけなら予備知識が少なく理解できる. そこで多少細かい事は抜きにして, 今から原論文1章に沿って定式化してみよう. 但し, 今は群の作用はない場合とする (原論文全体も群が一点の場合で読めば, 読み易い).

まず X をコンパクトハウスドルフ空間としたとき, $\mathrm{Vect}(X)$ を, X 上の複素ベクトル束の同型類と書こう. $\mathrm{Vect}(X)$ にはホイットニー和 (直和) により可換半群構造が入る. そのグロタンディーク群を, $K(X)$ と書き, **K 群**という. 例えば, X が一点の時, $\mathrm{Vect}(X)$ は有限次元ベクトル空間の同型類なので, $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$ だから, $K(X) \cong \mathbb{Z}$ となる.

しかし指数を定義する為に, 2つ定式化すべき事がある: 1つは X が局所コンパクトハウスドルフ空間の場合に, K 群の定義を拡張する事. もう 1 つは, 多様体間の閉埋込み $i : Y \hookrightarrow Z$ に対し, $i_! : K(TY) \to K(TZ)$ の構成も必要である (詳細は §3.1). しかしこれらを認め準備が一旦済めば, 指数の定義は単純にまとまる：

定義 1.1. **指数**とは, 準同型の集まり $\left\{\mathrm{ind}_X : K(TX) \to \mathbb{Z}\ \right\}_X$ で次を満たすものである, ここで X は閉な C^∞-多様体すべてを考えている.

(A1) もし X が一点の時, $\mathrm{ind}_X : K(TX) \to \mathbb{Z}$ は標準的な同一視 (同型) である.

(A2) コンパクト多様体間の閉埋込み $i : Y \hookrightarrow Z$ に対し, $i_!$ と ind は可換である:

$$\begin{tikzcd} K(TY) \arrow[rr, "i_!"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_Y"'] & & K(TZ) \arrow[dl, "\mathrm{ind}_Z"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

例 1.2. 節 3 で説明する位相的指数と, 節 6 で述べる解析的指数は, 指数である.

命題 1.3. 任意に与えられた指数 $\{\mathrm{ind}_X\}_X$ は, 位相的指数と一致する.

概証. 任意の閉多様体 X は高次元 Euclid 空間に埋め込まれる: $i : X \to \mathbb{R}^n$. よって $i_! : K(TX) \to K(T\mathbb{R}^n)$ を得る. 他方, Bott 周期定理により同型 $\varphi : K(\mathrm{pt}) \to K(T\mathbb{R}^n)$ がある (詳細は §2.3). 従って, **A2** により次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} K(TX) \arrow[r, "i_!"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_Y"'] & K(T\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathrm{ind}_{\mathbb{R}^n}"] & K(\mathrm{pt}) \arrow[l, "\varphi"', "\sim"] \arrow[dl, "\mathrm{ind}_{\mathrm{pt}}"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

従って, **A1** により, 全ての指数は一点 pt に帰着させられ, 指数は一意しかない. ここで注意すべき事に, いつの間にかノンコンパクトな $T\mathbb{R}^n$ から指数が定義されたが, その well-definedness は §4 に回そう. □

よって指数定理を得る事が出来た:

定理 1.4. (**指数定理**) **位相的指数と解析的指数は一致する.**

K 群で指数定理を書けば, いとも簡単に指数定理を述べる事ができた. ただし, 今曖昧にした数点 ($i_!$, $K(X)$ や解析的指数の定義等) を補完する必要がある. 論文の本体では, それらを

補完し, さらに群作用付 K 群の場合で議論が展開されている.

本稿はその解説を目的にしている為, 本稿の構成を原典の節と相応するよう配慮した. 即ち, 2 節で K 群を復習し, 3 節で位相的指数を定義し, 4 節で指数を公理化する. 5 節では, 話題を転じ擬微分作用素を復習し, 解析的指数を 6 節で定義する. その後に 7 節で解析的指数が指数の公理を満たす事を確認する. 班員の担当を述べると, 1,4 節は野坂が, 2,3 節は蔦谷が, 5,6 節は今城が, 7 節は伊藤が執筆した.

さて末筆になるが, 指数定理の応用を一例あげ是節を締めくくろう.

例 1.5. $E \to X$ を複素コンパクト多様体上の正則バンドルとする. $\Lambda^{j,i}(E)$ を (j,i)-微分形式の切断の集まりとする. するとドルボー作用素 $\bar{\partial} : \Lambda^{0,\mathrm{i}} \to \Lambda^{0,\mathrm{i}+1}$ と, その随伴作用素 $\bar{\partial}^* : \Lambda^{0,\mathrm{i}} \to \Lambda^{0,\mathrm{i}-1}$ が定まる. その和を取る: $\bar{\partial} + \bar{\partial}^* : \Lambda^{0,\mathrm{odd}} \to \Lambda^{0,\mathrm{even}}$. すると $\dim(\mathrm{Ker}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)) - \dim(\mathrm{Coker}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*))$ は解析的指数となる. これはホッジ分解からドルボーコホモロジーのオイラー標数である.

他方, 位相的指数を考えよう: それをコホモロジーに落とすと, 実は $\int_X \mathrm{ch}(E)\mathrm{td}(TX \otimes \mathbb{C})$ となる (詳細は [AS3] を見よ). 従って Riemann-Roch-Hirzebruch の定理を得る事が出来る:

$$\sum_i (-1)^i \dim(H^{0,i}(X;E)) = \int_X \mathrm{ch}(E)\mathrm{td}(TX \otimes \mathbb{C}) \in \mathbb{Z}.$$

指数定理は, X が複素射影空間に埋め込まれていない場合に RRH-定理の拡張を与えた事になる.

Acknowledgment 第 5 回琵琶湖若手数学者勉強会に私共を招待して頂き, 当企画・運営に一方ならぬご尽力を賜りました三井健太郎氏に厚く御礼申しあげます.

2 同変 K 群に関する諸性質

前節では群作用なしで説明を与えたが, ここから原論文通りに, コンパクトリー群 G が作用する空間を扱っていく.

2.1 G-ベクトル束と同変 K 群

G をコンパクトリー群, X を G が左から作用する位相空間（左 G-空間）とする. X の上の複素ベクトル束 E に G の左作用が与えられたとき, E が ***G*-ベクトル束**であるとは, 射影 $E \to X$ が G-同変写像になり, 各 $g \in G$, $x \in X$ に対し, g による作用 $E_x \to E_{gx}$ が複素線型写像となること. ここで E_x は E の x 上のファイバーをあらわす. たとえば, G が左からなめらかに作用する C^∞-多様体 X が与えられたとき, その接ベクトル束 TX には微分で G が左からなめらかに作用し, その複素化 $TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は X 上の G-ベクトル束となる.

E と F を左 G-空間 X 上の G-ベクトル束とするとき, 複素ベクトル束の準同型 $f : E \to F$ が G-ベクトル束の**準同型**とは, G-同変となることである. 準同型 $f : E \to F$ が複素ベクトル束の同型のとき, f が G-ベクトル束の**同型**といい, このとき E と F は（G-ベクトル束として）**同型**であるという.

容易にわかるように, 左 G-空間 X 上の G-ベクトル束 E, F に対し, $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\mathrm{Hom}(E, F)$ などは再び G-ベクトル束になる. また, 左から G の作用するコンパクトハウスドルフ空間 X 上の G-ベクトル束の同型類の全体を $\mathrm{Vect}^G(X)$ とすると, これは直和に関して可換半群となる. これの Grothendieck 群を $K_G(X)$ と書き, X の (G-) **同変 K 群**という. G

が単位群のときは, もちろん前節で定義した $K(X)$ に一致する. また, 後で述べるように同変 K 群は可換環の構造を持つ.

重要な例として, X が一点の場合を考える. 一点 pt 上の G-ベクトル束は G の有限次元複素表現に他ならない. よって, 自然に $K_G(\mathrm{pt})$ は G の表現環 $R(G)$ に同型である.

X と Y をコンパクトハウスドルフな左 G-空間とする. G-同変な連続写像 $f: X \to Y$ により, Y 上の G-ベクトル束 E を引き戻して得られる複素ベクトル束 f^*E は再び G-ベクトル束になる. また, 引き戻しは同型と直和を保つので, 群準同型 $f^*: K_G(Y) \to K_G(X)$ を誘導する. もし, $f: X \to Y$ と $f': X \to Y$ の間に G-同変なホモトピーがあるならば, $f^* = f'^*: K_G(Y) \to K_G(X)$ となることもわかる.

コンパクトハウスドルフな左 G-空間 X に G の作用の不動点 $p \in X$ が与えられているとき, 包含写像 $p \to X$ の誘導する準同型 $K_G(X) \to K_G(\{p\})$ の核を $\tilde{K}_G(X)$ と書き, X の**被約同変 K 群**という. これを用いて, 局所コンパクトハウスドルフな左 G-空間 X の同変 K 群を次のように定義する. X^+ で X の 1 点コンパクト化を表すことにすれば, これはコンパクトハウスドルフ空間で, G の作用は X^+ に拡張されて, 無限遠点は不動点になる. これにより, $K_G(X) := \tilde{K}_G(X^+)$ と定義する.

このように拡張した定義においては, 固有な（proper）連続 G-同変写像（の固有な G-同変ホモトピー類）に対して関手性をもつ. さらに, $U \subset X$ を G-不変な開部分集合とするとき, 写像 $X^+ \to X^+/(X^+ - U) = U^+$ から $K_G(U) \to K_G(X)$ が誘導される.

2.2 複体による同変 K 群の定義

Thom 同型を考える場合や, 解析的指数を定義するとき, “複体”によって K 群を定義し直したほうが扱いやすい. そこで, 本節ではそのような定義を導入する. **以下, この節では特に断らない限り, 位相空間は局所コンパクトハウスドルフ空間とする.**

定義 2.1. 左 G-空間 X 上の G-ベクトル束 $E^0, E^1, \cdots, E^n$ に対し, 次のような準同型の列を考える.

$$E: 0 \to E^0 \xrightarrow{\alpha} E^1 \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} E^n \to 0$$

（必要に応じてこの列は 0 で右に無限に伸びているものと思う）この列 E が X 上の**複体**であるとは, $\alpha^2 = 0$ であり, これの台 $\operatorname{supp} E$ がコンパクトであること. ここで, $\operatorname{supp} E$ とはファイバーへの制限

$$0 \to E^0_x \xrightarrow{\alpha} E^1_x \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} E^n_x \to 0$$

がベクトル空間の完全列とはならない（言い換えると, コホモロジーが 0 とはならない）$x \in X$ の全体からなる集合である.

例 2.2. $V \xrightarrow{\pi} X$ を左 G-空間 X 上の G-ベクトル束とする. すると, 各 i 次の交代テンソル積 $\pi^*(\wedge^i V) \to V$ は V 上の G-ベクトル束である. さらに, 各 $(v, \alpha) \in \pi^*(\wedge^i V) \subset V \times \wedge^i V$ に対し $(v, v \wedge \alpha) \in \pi^*(\wedge^{i+1} V)$ を対応させる写像を考えると, これは V 上の G-ベクトル束の準同型である. これで決まる

$$\lambda V: 0 \to \mathbb{C} \to \pi^* V \to \pi^*(\wedge^2 V) \to \cdots \to \pi^*(\wedge^n V) \to 0$$

を考えると, $\operatorname{supp} \lambda V$ は V の 0-切断の部分になる. したがって X がコンパクトならば λV は複体である.

複体の全体に適当な同値関係を入れることにより同変 K 群の新たな定義が得られる. その同値関係を記述するために, 複体の同型とホモトピーを定義する.

定義 2.3. 左 G-空間 X 上の G-ベクトル束 E と F に対し, E と F が**同型**であるとは, 各 i に対し同型 $E^i \to F^i$ が与えられて, 図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E^0 \arrow[r] \arrow[d] & E^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^0 \arrow[r] & F^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が可換になることである.

定義 2.4. 左 G-空間 X 上の複体 E と F に対し, E と F が**ホモトープ**であるとは, $X \times [0,1]$ 上の複体 Φ が存在して, Φ の $X \times 0$ 上への制限 $\Phi|_{X\times 0}$ が E に同型となり, Φ の $X \times 1$ 上への制限 $\Phi|_{X\times 1}$ が F に同型となること.

特に, コンパクト空間上の任意の複体 E は, 各 $E^i \to E^{i+1}$ を 0-写像に取り替えた複体とホモトープである.

複体 E と F が与えられたとき, その直和

$$E \oplus F : 0 \to E^0 \oplus F^0 \overset{\alpha\oplus\beta}{\to} E^1 \oplus F^1 \overset{\alpha\oplus\beta}{\to} \cdots \overset{\alpha\oplus\beta}{\to} E^n \oplus F^n \to 0$$

は $\mathrm{supp}\,(E \oplus F) = \mathrm{supp}\,E \cup \mathrm{supp}\,F$ となり, 再び複体になる. また, テンソル積も, 加群の複体のテンソル積の場合と同様に定義でき, $\mathrm{supp}\,(E \otimes F) = \mathrm{supp}\,E \cap \mathrm{supp}\,F$ となり, 再び複体になる（Künneth の定理を使うとよい）.

さて, 準備が整ったので複体を用いた K 群の定義を説明する. 左 G-空間 X 上の複体のホモトピー類の全体 $C_G(X)$ を考える. これは直和から誘導される演算で可換半群になる. 次に, 部分半群 $C_G^{\varphi}(X) \subset C_G(X)$ を, 台が空集合になるような複体を代表に持つホモトピー類の全体と定める. 実は, 前節の $K_G(X)$ は, これで割って得られる可換半群 $C_G(X)/C_G^{\varphi}(X)$ が自然に同型になる事が知られている. この同型は, G-空間 X がコンパクトな時, X 上の複体 $[E] \in C_G(X)/C_G^{\varphi}(X)$ を $[E^0] - [E^1] + \cdots + (-1)^n[E^n] \in K_G(X)$ に対応させる事で得られる. 詳細は [Seg] を参照されたい. 以下, $K_G(X)$ として適宜この定義を使っていく.

次に, (外部) テンソル積と K 群の関連についてコメントする. 長さ 1 の複体 $0 \to E^0 \overset{\alpha}{\to} E^1 \to 0$ と $0 \to F^0 \overset{\beta}{\to} F^1 \to 0$ を考える. E^0, E^1, F^0, F^1 に G の作用で不変なエルミート計量をとっておくことにより（G はコンパクトなので不変測度による積分を使えばとることはできる）, 随伴写像 α^*, β^* は準同型になる. テンソル積

$$0 \to E^0 \otimes F^0 \xrightarrow{(\alpha\otimes 1)\oplus(1\otimes\beta)} (E^1 \otimes F^0) \oplus (E^0 \oplus F^1) \xrightarrow{-(1\otimes\beta)+(\alpha\otimes 1)} E^1 \otimes F^1 \to 0$$

は, $K_G(X)$ において複体

$$0 \to (E^0 \otimes F^0) \oplus (E^1 \otimes F^1) \to (E^1 \otimes F^0) \oplus (E^0 \otimes F^1) \to 0$$

と同じ元を表す. ただし, $(E^0 \otimes F^0) \oplus (E^1 \otimes F^1) \to (E^1 \otimes F^0) \oplus (E^0 \otimes F^1)$ は行列

$$\begin{pmatrix} \alpha \otimes 1 & -1 \otimes \beta \\ 1 \otimes \beta & \alpha^* \otimes 1 \end{pmatrix}$$

で表示される写像である. 詳しくは [Ati1] の LEMMA 2.6.10 を参照.

X を左 G-空間, V と W を X 上の**実** G-ベクトル束とする（定義は複素のときと同様）. すると, 外部テンソル積と包含写像 $V \oplus W \to V \times W$ により写像

$$K_G(V) \otimes K_G(W) \to K_G(V \times W) \to K_G(V \oplus W)$$

が定まる. 特に $W = X$ のときを考えると, $K_G(V)$ は $K_G(X)$-加群になる.

複体による定義の解説は以上であるが, 最後に複体の長さについて言及しておく. ここでは左 G-空間 X 上の複体として $0 \to E^0 \to \cdots \to E^n \to 0$ という形のものを考えた. しかし, 実は長さ 1 の複体 $0 \to E^0 \to E^1 \to 0$ たちの同値類によって, 上記と同様に $C_G(X)/C_G^{\varphi}(X)$ を定義しても（アーベル群として）$K_G(X)$ に自然に同型になることが知られている. この証明は [Ati1] などを参照. この事実は節 6.1 で楕円型作用素の表象を考察する際に使う.

2.3 ボット周期性とトム同型

X を左 G-空間, V を X 上の G-ベクトル束とする. 交代テンソル積から決まる V 上の複体 λV（例 2.2) を取る. 一般に $\mathrm{supp}\,\lambda V$ はコンパクトにはならない. が, X 上のベクトル束の複体と λV とをテンソルすることで, 写像

$$\varphi_V : K_G(X) \longrightarrow K_G(V) \quad (a \longmapsto a \otimes \lambda V)$$

が得られる（台がコンパクトになることは前に見たテンソル積と同様). 実は, アーベル群の同型になることが知られている. この写像を**トム同型**という. 特に X が 1 点 pt のときは

$$K_G(\mathrm{pt}) \cong K_G(\mathbb{C}^n)$$

という同型をあらわす. これを**ボット周期性**という. 証明は [Ati2] を参照.

2.4 ベクトル束の全空間の同変 K 群の斉次複体による表示

2.4, 2.5 節では話題が転じる為, 次の 3 節にスキップされて構わない. 実際, この 2.4 節は 6 節の最後で使い, 2.5 節は 4 節まで使わない.

X を左 G-空間とし, $V \xrightarrow{\pi} X$ を実 G-ベクトル束とする. 今から V の K 群を, m 次斉次な複体から再構成する. まず E, F を X 上の G-ベクトル束に対し, V 上の準同型 $\alpha = (\mathrm{id}_V, \alpha') : \pi^*E \to \pi^*F (\subset V \times F)$ が $\boldsymbol{m}$ **次斉次**であるとは, 各 $(v, e) \in \pi^*E \subset V \times E$ と $\lambda > 0$ に対し,

$$\alpha(\lambda v, e) = (\lambda v, \lambda^m \alpha'(v, e)) \in \pi^*F \subset V \times F \quad (\Leftrightarrow \alpha'(\lambda v, e) = \lambda^m \alpha'(v, e))$$

となることで定める. V の G-不変な計量をとれば, その計量による単位球面束 $S(V)$ を考えることが出来る. V 上の G-ベクトル束の間の m 次斉次準同型は, それを $S(V)$ 上に制限して得られる準同型で決まる.

定義 2.5. コンパクトな左 G-空間 X 上の実 G-ベクトル束 $V \xrightarrow{\pi} X$ と（複素）G-ベクトル束 $E^0, \cdots, E^n$ に対し, V 上の複体

$$E : 0 \to \pi^*E^0 \xrightarrow{\alpha} \pi^*E^1 \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} \pi^*E^n \to 0$$

の各 α が m 次斉次であるとき E を V 上の $\boldsymbol{m}$ **次斉次複体**という.

定義により, $\mathrm{supp}\,E$ は V の 0-切断の部分である.

例 2.6. X がコンパクトな左 G-空間, V が X 上の（複素）G-ベクトル束のとき, λV は V 上の 1 次斉次複体である.

同様にして斉次複体としてのホモトピーが定義される. これにより, V 上の m 次斉次複体のホモトピー類全体を ${}^mC_G(V)$ と書く. また, 次をおき,

$$\{0 \to \pi^*E_1 \to \cdots \pi^*E_n \to 0 \mid E : 0 \to E_1 \to \cdots E_n \to 0 \text{ は, 台が空集合で } m \text{ 次斉次. }\}$$

このホモトピー類の全体を ${}^mC_G^{\varphi}(V)$ と書く. すると

主張 ${}^mC_G(V)/{}^mC_G^{\varphi}(V)$ から前節の $C_G(V)/C_G^{\varphi}(V)$ への写像は同型を与える.

以下, この主張により, ${}^mC_G(V)/{}^mC_G^{\varphi}(V)$ は $K(V)$ にも同型である. この主張を示す, 逆写像の構成について言及しておこう. $V \xrightarrow{\pi} X$ は G-同変の意味でホモトピー同値写像だから, 任意の V 上の複体 E は, 同型を除いて, X 上の G-ベクトル束 $E^0, \cdots, E^n$ を用いて

$$E : 0 \to \pi^*E^0 \xrightarrow{\alpha} \pi^*E^1 \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} \pi^*E^n \to 0$$

と書ける. $\operatorname{supp} E$ はコンパクトなので, 十分大きい半径 $\rho > 0$ 以下の円板束 $D_\rho(V)$ の内部に含まれる. このとき, E の半径 ρ の球面束 $S_\rho(V)$ への制限から m 次斉次複体 E' を作る. これにより写像 $C_G(V) \to {}^mC_G(V)$ が定義されることがわかる. 実際, これが自然な写像 ${}^mC_G(V)/{}^mC_G^{\varphi}(V) \to C_G(V)/C_G^{\varphi}(V)$ の逆を与える.

さらに, 詳細は略すが, ${}^mC_G(V)/{}^mC_G^{\varphi}(V)$ の各元の代表は, コンパクト集合を除いて自明なベクトル束からなる長さ 1 の m 次斉次複体に (2.2 節の末尾のように) 取ることができる.

2.5 (後の定義 4.7 と定理 4.11 の為の) いくつかの準備

この準備のために, ここでは, 式 (2.1) と補題 2.7 を説明する.

まずコンパクト Lie 群 G と H に対し, X が左 $G \times H$-空間で, H が自由に作用するとき,

$$K_{G\times H}(X) \cong K_G(X/H) \tag{2.1}$$

と成る事が簡単な考察によりわかる. これは後の定義 4.7 で使う.

話が一転し, W を実左 G-加群とする. このとき, 複素化 $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ には共役をとる実 G-加群としての自己同型 $\psi : u + iv \mapsto u - iv$ があるが, これにより定まる写像

$$\psi^* : K_G(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \to K_G(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

を考える. ボット周期性により $K_G(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ は $\lambda(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ を基底とする $R(G)$-加群である. したがって ψ^* を知るには $\psi^*\lambda(W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ を計算すれば十分であることに注意.

補題 2.7. (i) $G = O(1)$, W が G の自然表現 $\mathbb{R}$ のとき, $\psi^*a = -[a \otimes (W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})]$.
(ii) $G = SO(2)$, W が G の自然表現 $\mathbb{R}^2$ のとき, $\psi^*a = a$.

証明. (ii) $SO(2)$ は弧状連結なので-1 倍写像から恒等写像への道が $SO(2)$ の中で取れる, つまり ψ は恒等写像に $SO(2)$-同変（$SO(2)$ は可換なので）にホモトープなので成立する.

(i) $V = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおく. 複体 $(\psi^*\lambda V) \oplus (\lambda V \otimes V)$ が台が空なものとホモトープであることを示せば十分. $\mathbb{C} \oplus V \to V \oplus (V \otimes V)$ を $z \in V = \mathbb{C}$ 上で標準的な自明化のもとで行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

となる.

$$\begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z\bar{z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なので, 左辺の真ん中の行列と単位行列とを結ぶ道を $GL(2,\mathbb{C})$ 内でとれば（$GL(2,\mathbb{C})$ は連結なのでとれる）, $\mathbb{C} \oplus V \to V \oplus (V \otimes V)$ は右辺の行列で表される写像とホモトープになることがわかる. このことから, 複体 $\psi^*\lambda V \oplus (\lambda V \otimes V)$ は台が空なものとホモトープであることがわかる. □

3 位相的指数の定義

ここでは前節の準備の下に, 3.1 節で位相的指数を定義する. 3.2 節ではドラームシンボルを導入する. ここで, 多様体はすべて境界のない C^∞ 級のものを考える. また, コンパクトリー群 G が左から C^∞ 級に作用する多様体を G-**多様体**と呼ぶことにする. (G 作用付の計量, 埋込み, 管状近傍については [内田] の一章に詳しい.)

3.1 位相的指数の定義

Y を G-多様体, X を G-同変に Y に埋め込まれたコンパクトな G-多様体とする. 閉埋め込みを $i : X \to Y$ と書く. Y に G の作用が等長となるリーマン計量をとっておく. 以下, この埋め込みから誘導される $i_! : K_G(TX) \to K_G(TY)$ を構成していこう (3.1 を見よ). まず X の G-不変な管状近傍 N をとり, それを X の法束と同一視できる. すると TX の TY における管状近傍 TN は, X の法束の全空間の接空間と同一視される. これより TN は TX 上の実 G ベクトル束と思うことができ, それは $\pi^*N \oplus \pi^*N$ と (TX 上の実ベクトル束として, ただし $\pi : TX \to X$ は射影) 同型である. ここで第 1 成分は N 方向, 第 2 成分は N のファイバー方向の接空間と思っている. さらに $\pi^*N \oplus \pi^*N$ を $N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と思うことにより, TN は TX 上の（複素）G-ベクトル束と思える. これにより, トム同型 φ_{TN} と開集合の包含写像 $k : TN \to TY$ から

$$i_! : K_G(TX) \xrightarrow{\varphi_{TN}} K_G(TN) \xrightarrow{k_*} K_G(TY) \tag{3.1}$$

という写像が得られる. ここで, この構成がリーマン計量のとり方に依存しない事に注意しよう, なぜなら, 二つの G-不変なリーマン計量が G-不変なリーマン計量のみを通る滑らかな道でつなげるからである. さらに, Y もコンパクトであって, G-多様体 Z に G-同変に埋め込まれている（$j : Y \to Z$）とする. このとき $(j \circ i)_! = j_! i_!$ が成立することがわかる.

さて, 以上の準備の下に位相的指数を定義しよう. 任意の G-多様体 X は適当な有限次元 G-加群 E に G-同変に埋め込むことができる. これにより,

$$K_G(TX) \to K_G(TE) \cong R(G)$$

なる写像が決まる. ただし $K_G(TE) \cong R(G)$ はボット周期性による同型写像である. これを X の**位相的指数**という. これが埋め込みのとり方によらないことは, さほど難しくない (詳細は原論文を参照).

3.2 球面のドラームシンボル

この小節は, 定義 4.12 の定式化する為の技術的な議論である. 読み飛ばされても構わない.

X をコンパクト G-多様体とする．すると λV の構成と同様にして, TX 上の $\mathbb{R}$ 係数の複体 $0 \to \mathbb{R} \to \pi^* TX \to \pi^*(\wedge^2 TX) \to \cdots \to \pi^*(\wedge^n TX) \to 0$ が構成される．これの複素化によって得られる $\rho_X \in K_G(TX)$ を X の**ドラームシンボル**という．ここで本論文の主結果の証明において重要な $\rho_{S^n} \in K_{O(n)}(TS^n)$（ここで $O(n)$ は $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ と思って作用させる）を計算しておく．

補題 3.1. $j^0 : \{0\} \to S^n$ と $j^\infty : \{\infty\} \to S^n$ を包含写像とし, $\theta : TS^n \to TS^n$ を接ベクトルを -1 倍する写像とする．このとき

$$\rho_{S^n} = j^0_!(1) + \theta^* j^\infty_!(1)$$

証明. S^n は半径 1 の円板と半径 1 以上の点からなる円板に分かれる（$S^n = D^n_0 \cup D^n_\infty$）．ここで, 写像 $D^n \to D^n_0$（$x \mapsto x$）と $D^n \to D^n_\infty$（$x \mapsto x/|x|^2$）を考える．赤道 $D^n_0 \cap D^n_\infty$ での座標変換から誘導される TS^n の座標変換は $(x, v) \mapsto (x, h_x v)$ である．ここに $h_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は x に直交する超平面に関する対称移動である．これにより,

$$\pi^*(\wedge^* TS^n) \otimes \mathbb{C} \cong (D^n_0 \times \mathbb{R}^n \times \wedge^*(\mathbb{C}^n)) \cup (D^n_\infty \times \mathbb{R}^n \times \wedge^*(\mathbb{C}^n))$$

なる表示を得る．ただし $\pi : TX \to X$ は射影で, $D^n_0 \cap D^n_\infty$ 上での貼り合わせ写像は $(x, v, w) \mapsto (x, h_x v, (\wedge^* h_x) w)$ である．この表示により, TS^n 上の準同型 $\pi^*(\wedge^p TS^n) \otimes \mathbb{C} \to \pi^*(\wedge^{p+1} TS^n) \otimes \mathbb{C}$ を次で定めることができることがわかる（$0 \leq s \leq 1$）．

D^n_0 上では $(x, v, w) \mapsto (x, v, (v - isx) \wedge w)$.

D^n_∞ 上では $(x, v, w) \mapsto (x, v, (v + isx) \wedge w)$.

これにより TX 上の複体のホモトピー A_s を得る．これは $[A_s] = [A_0] = \rho_{S^n} \in K_{O(n)}(TS^n)$ であり, また, A_1 は 0 と ∞ 以外では完全な複体である．このことから, $\rho_{S^n} = j^0_!(1) + \theta^* j^\infty_!(1)$ であることが確認できる． □

最後の部分で「確認できる」と書いたが, 原論文では G-不変な開集合からの包含写像 $U \to X$ から誘導される $K_G(U) \to K_G(X)$ を複体による定義では議論していないので証明が曖昧になっている．筆者らは細部を補填しようとしたが, 解らなかった．

4 指数の公理化

3 節で, 位相的指数 t-ind が, $R(G)$-準同型 $K_G(TX) \to R(G)$ として定義された．今節ではその指数の満たす公理を検討していく．まずこの考察のため, 次を定義しよう．

定義 4.1. 指数 (index functions) とは, 全てのコンパクト G-多様体 X に対して定まる $R(G)$-準同型 $\left\{\mathrm{ind}^X_G : K(TX) \to R(G)\right\}_X$ の集まりのことで次を満たすものである:

- まず任意の G-微分写像 $f : X \to Y$ に対して次が可換である．

$$\begin{tikzcd} K_G(TY) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}^Y_G"'] & & K_G(TX) \arrow[dl, "\mathrm{ind}^X_G"] \\ & R(G) & \end{tikzcd}$$

- 任意の準同型 $g : G' \to G$ に対し, 次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
K_{G'}(TX) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^X"'] & K_{G'}(TX) \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^X"'] \\
R(G') \arrow[r, "g^*"] & R(G)
\end{tikzcd}$$

次に指数における公理を導入する:

定義 4.2. **指数**の公理 $(A1)$, $(A2)$ を次で定める.

(A1) もし X が一点の時, $\mathrm{ind}_G^X : K_G(TX) \to R(G)$ は標準的な同一視 (同型) である.

(A2) 閉な G-多様体間の閉埋込み $i : Y \hookrightarrow Z$ に対し, $i_!$ と ind は可換である:

例えば, 位相的指数はこの公理を満たす事は構成からわかる. 逆に, 実はこれらによって, 指数は一意に定まってしまう:

命題 4.3. [cf. 命題 1.3] 指数 ind が公理 (**A1**), (**A2**) を満たす時, それは位相的指数と一致する. つまり ind =t-ind.

証明. 任意の閉多様体 X は高次元 Euclid 空間に G 不変で埋め込まれる, つまり $i : X \to E = \mathbb{R}^n$. E^+ を E の一点コンパクト化とする, 即ち $E^+ \simeq S^n$. E の作用が等長的なので, E^+ に G 作用が伸びる事に注意しよう. $i^+ : X \to E^+$ をその拡張された埋込みとする. 同様に, E の原点 P に対して, $j : P \to E$, $j^+ : P \to E^+$ を取る. そこで次の図式を考えよう:

$$\begin{tikzcd}
 & K_G(TE) \arrow[d] & \\
K_G(TX) \arrow[ur, "i_!"] \arrow[r, "i_!^+"] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_G^X"'] & K_G(TE^+) \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^{E^+}"'] & K_G(TP) \arrow[ul, "j_!"'] \arrow[l, "j_!^+"'] \arrow[dl, "\mathrm{ind}_G^P"] \\
 & R(G) &
\end{tikzcd}$$

上の三角形らが可換な訳は, $i_!$ と $j_!$ の定義により, また下の三角形が可換なのは (**A2**) による. (**A1**) から, ind_G^P は恒等射である. $j_!$ の同型性を使って, t-ind : $K_G(TX) \to R(G)$ は t-ind $= j_!^{-1} \circ i_!^{-1}$ で定義されていた. よって上図式は指数の一意性を意味する. □

5, 6, 7 節以降の目標は, 解析的指数を定義し, それが上の公理を満たす事を確認する事である. しかし, その定義は 6 節に回すが, 先走って言うと, 公理 **(A2)** は判定条件としては有用でない. そこでこの 5 節では公理を沢山用意し, 今から公理 **(A2)** を扱い易いよう解きほぐしていく事にしよう. (まずは指数定理の主張を見ればこの節の目標がはっきりするだろう, またこの節の議論の流れを節末に図示した)

まず, 多様体の埋め込みに関する管状近傍を指数で捉えるような公理を見よう:

定義 4.4. **(B1)** U をノンコンパクトな G-多様体とする. G-閉多様体への二つの開 G 埋め込み $j : U \hookrightarrow X$, $j' : U \hookrightarrow X'$, に対して, 次が可換である:

$$\begin{tikzcd}
K_G(TU) \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "j'_!"'] & K_G(TX) \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^X"'] \\
K_G(TX') \arrow[r, "\mathrm{ind}_G^{X'}"'] & R(G)
\end{tikzcd}$$

すると ind は, 開多様体の U 上に, $\mathrm{ind}: K_G(TU) \to R(G)$ と拡張された事になる. 特に, 重要なもので (後で多様体を Euclid 空間に埋込んだ後に使う), 実 G-加群 E に対し,

$$\mathrm{ind}_G^E : K_G(TE) \longrightarrow R(G)$$

が誘導される事に注意する. さて次に公理 **A1** のような「正規化公理」を 2 つ定義しておこう.

定義 4.5. (B2) $P \to \mathbb{R}^n$ を原点からの入射とする. $j_! : R(O(n)) \longrightarrow K_{O(n)}(T\mathbb{R}^n)$ をその誘導射とする. このとき, $j_!(1) = 1$.

定義 4.6. (B2') $\mathrm{ind}\, j_!(1) = 1$ が成立する, ただし $j_!$ は次のどちらかとする:

$$j_! : R(O(1)) \to K_{O(1)}(T\mathbb{R}^1), \quad \text{or} \quad j_! : R(SO(2)) \to K_{SO(2)}(T\mathbb{R}^2).$$

次に, 積に関する公理を定義していく (定義 4.7). ここで積というのはファイバー束のことである. これは指数定理において重要[*1]な位置を占めるため, いくつか準備を要する. 実際 7 節での解析的指数に平行した議論でもあるから, しっかり理解すべき箇所でもある. この記述が読みづらければ, G が一点の場合として読むと解り易い.

まず下記の式 (4.1) を説明したい. 準備として $P \to X$ を主 H 束とし, P の G への作用は H の作用と可換で, 射影は G-同変とする. H は P に自由に作用し, $X = P/H$ とかける. またコンパクトな H-多様体 F をファイバーとする同伴束を Y と書こう: つまり $Y := P \times_H F$. すると H からファイバー F への作用は, 接束 TF に持上がる. この為, $P \times_H TF$ を構成できる. これは Y 上のベクトル束になり, **ファイバーに沿った接束** といい, $T(Y/X)$ と書く. その名の通り, 次の分解がある:

$$TY = T(Y/X) \oplus \pi^* TX.$$

ここで $\pi : Y \to X$ は射影であり, 直和分解を与える切断は接続である. すると次の積が定義できる:

$$K_G(TX) \otimes K_G\big(T(Y/X)\big) \longrightarrow K_G(TY).$$

他方で, 次の準同型も得る事が出来る:

$$K_{G\times H}(TF) \longrightarrow K_{G\times H}(P \times TF) \cong K_G(P \times_H TF) = K_G\big(T(Y/X)\big).$$

ここで真ん中の同型は H から TF への作用が自由だからである (式 (2.1) を見よ). 上の 2 つの準同型を合成し,

$$K_G(TX) \otimes K_{G\times H}(TF) \longrightarrow K_G(TY), \tag{4.1}$$

という準同型を得る事が出来た. さらに次に, $G \times H$-加群 V に対して ($V \simeq \mathbb{R}^N$), X 上の同伴束 $P \times_H V$ を与える対応を考えると, 次の $R(G)$-準同型が出来る.

$$\mu_P : R(G \times H) \longrightarrow K_G(X). \tag{4.2}$$

[*1] 他にも, 例えば, 指数の族を構成する際にも有用である. またファイバーに沿った積分 (高次順像) を K 群からコホモロジーへ落とす議論は, todd 類が現れる所以である. このファイバー束の話題は一筋縄でいかない.

定義 4.7. (B3) 上記のような G, H, P, F とした時, 任意の $a \in K_G(TX),\ b \in K_{G\times H}(TF)$ に対して, 積 ab を (4.1) で与えた時, 次が成立する:

$$\mathrm{ind}_G^Y(ab) = \mathrm{ind}_G^X\big(a \cdot \big(\mu_P\, \mathrm{ind}_{G\times H}^F(b)\big)\big).$$

位相的指数がこれを満たす事は構成から明らかである. しかし, G 作用付の解析的指数が公理 **(B3)** を扱いが難しいため, 特別なものとして, 次の 2 つの公理を述べておこう. (即ち, 公理 **B3** を満たせば, 公理 **B3'** と公理 **B3"** を満たす事に注意する).

定義 4.8. (B3') $\mathrm{ind}_{G\times H}^F(b) \in R(G) \subset R(G\times H)$ を満たす b に対し, a を **(B3)** のようにとれば, $\mathrm{ind}_G^Y(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a)\cdot \mathrm{ind}_{G\times H}^F(b) \in R(G)$ を満たす.

(B3") 上記のような G, H, F とする. 任意の $a \in K_G(TX),\ b \in K_G(TF)$ に対して, $\mathrm{ind}_G^{X\times F}(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a)\cdot \mathrm{ind}_G^F(b) \in R(G)$.

すると次の二つの命題が示される. 原論文でも読み辛い部分の為, 証明は粗筋のみ紹介する. 概証から公理 **(A2)** の攻略法を, 感じ取って頂ければよい.

命題 4.9. 任意に与えられた指数 ind が公理 **(B1), (B2'), (B3")** を満たせば, **(B2)** を満たす.

概証. コンパクトリー群 G を $O(n)$ に埋め込む. $R(O(n))$ は, $O(n)$ の指標で決まるので, $R(O(n))$ は $R(S^1)$ と $R(O(1))$ らの直積の部分環になる. よって指数の積の公理 **(B3")** から, $O(n)$ の話しは, $n = 2, 1$ の場合に帰着される. それは公理 **(B2)** を満たす為に, **(B2')** で事足りる事を示唆し, 証明は完了する. 細かい点は原論文を見られたい. □

命題 4.10. 任意に与えられた指数 ind が公理 **(B1), (B2), (B3')** を満たせば, **(A2)** を満たす.

概証. $j : X \to Z$ を閉多様体間の埋込みとする. その G-管状近傍を N とおく. $k : X \to N$ をゼロ切断とする. すると, $j_! : K_G(TX) \to K_G(TN)$ を誘導する. $K_G(TN) \to K_G(TZ)$ を自然な開入射から誘導されたものとすると, 次の可換図式が定義できる:

$$\begin{tikzcd}
K_G(TX) \arrow[r, "k_!"'] \arrow[dr, "\mathrm{ind}_G^X"'] & K_G(TN) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ind}_G^N"'] & K_G(TZ) \arrow[dl, "\mathrm{ind}_G^Z"] \\
& R(G) &
\end{tikzcd}$$

右の三角形が可換なのは公理 **(B1)** による. **(A2)** を示すには, 左三角が可換である事を示せばよい.

その為に, $k_!$ を再考する必要がある. まず N は X の法束と同一視しよう. その同伴 $O(n)$-束を P とおく, ここで $n := \dim(Z) - \dim(X)$. すると $N \simeq P \times_{O(n)} \mathbb{R}^n$ となる. 入射 $j : \mathrm{pt} \to \mathbb{R}^n$ に対し, $b := j_!(1) \in K_{O(n)}(\mathbb{R}^n)$ とおくと, 公理 **(B2)** より $\mathrm{ind}_{O(n)}^{\mathbb{R}^n}(b) = 1$ である. そこで Thom 準同型の定義を思い起こせば, $k_!(a) = ab \in K_G(TN)$ である. だから公理 **(B3')** で $F = \mathbb{R}^n$, $H = O(n)$, $b = j_!(1)$ に適用する事が出来来, よって任意の $a \in K_G(TX)$ に対して, 目標の式を得た:

$$\mathrm{ind}_G^N(k_!(a)) = \mathrm{ind}_G^N(ab) = \mathrm{ind}_G^X(a)\cdot \mathrm{ind}_{O(n)}^{\mathbb{R}^n}(b) = \mathrm{ind}_G^X(a) \in R(G). \qquad \square$$

よって命題たち 4.3, 4.9, 4.10 によって次を得た事になる. 当論文の主定理である.

定理 4.11. (**指数定理**) **任意に与えられた指数** ind **が公理** $(A1), (B1), (B2'), (B3')$ **を満たせば, 位相的指数と一致する.**

しかしながら, これに飽き足らず当論文では公理 **(B2')** をさらに簡易化する (7 節では次の B2" を考察する). それは 3.2 節のドラームシンボル ρ_X を使ったものである.

定義 4.12. (B2") (i) $\mathrm{ind}^{S^2}_{O(2)}(\rho_{S^2}) = 2 \in R(SO(2))$
(ii) $\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(\rho_{S^2}) = 1 - \xi \in R(O(1))$, ここで $\xi : O(1) \to U(1)$ は標準表現である.
(iii) $\mathrm{ind}^{S^1}(j_!(1)) = 1 \in \mathbb{Z}$, ここで j :pt$\to S^1$ の入射である.

すると次が示される. この証明は K 群の繁雑な議論な為, 証明を飛ばされて構わない.

命題 4.13. 任意に与えられた指数 ind が公理 **(B2")** を満たせば, **(B2')** を満たす.

証明. まず $\mathrm{ind}^{S^n}_{O(n)}(\rho_{S^n})$ を計算しよう. 補題 3.1 より $\rho_{S^n} = j^0_!(1) + \theta^* j^\infty_!(1)$ であった. ここで $j^0 : \{0\} \to S^n$ と $j^\infty : \{\infty\} \to S^n$ を包含写像とし, $\theta : TS^n \to TS^n$ は接ベクトルを -1 倍する写像であった. $f : S^n \to S^n$ を, $\{0\}$ と $\{\infty\}$ を入れ替える赤道にそった反転と定めよう. すると $f^*(\theta^* j^0_!(1)) = \theta^* j^\infty_!(1)$ となる. そこで指数の関手的公理により

$$\mathrm{ind}^{S^n}_{O(n)}\big(\theta^* j^0_!(1)\big) = \mathrm{ind}^{S^n}_{O(n)}\big(\theta^* j^\infty_!(1)\big) \in R(O(n)).$$

従って、$\mathrm{ind}^{S^n}_{O(n)}(\rho_{S^n}) = \mathrm{ind}^{S^n}_{O(n)}(1 + \theta^*) j^0_!(1)$ を得た.

さて次に準同型 $j^0_!$ は $K^{\mathbb{R}^n}_{O(n)}(T\mathbb{R}^n)$ を経由することに注意しよう. また, 自然な $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$ の基で, θ を普通の複素共役と同一視しよう. そこで補題 2.7 により, 次を得る：

$$\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(\rho_{S^2}) = 2\,\mathrm{ind}^{\mathbb{R}^2}_{SO(2)}\, j^0_!(1) \in R(SO(2)),$$

$$\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(\rho_{S^1}) = (1 - \xi)\,\mathrm{ind}^{\mathbb{R}^1}_{O(1)}\, j^0_!(1) \in R(O(1)).$$

ここで ξ は $O(1)$ の標準表現である. すると公理 **(B2")** により,

$$2 = 2\,\mathrm{ind}^{\mathbb{R}^2}_{SO(2)}\, j^0_!(1) \in R(SO(2)), \qquad (1 - \xi)\,\mathrm{ind}^{\mathbb{R}^1}_{O(1)}\, j^0_!(1) = 1 - \xi \in R(O(1)),$$

ここで, 表現環 $R(O(1)) \simeq R(\mathbb{Z}/2)$ は, $\mathbb{Z}[\xi]/(1 - \xi^2)$ に環同型な事に注意する, とくに $1 - \xi$ の零因子は $1 + \xi$ で生成される. すると或る整数 a が存在し,

$$\mathrm{ind}^{\mathbb{R}^2}_{SO(2)}\, j^0_!(1) = 1 \in R(SO(2)), \qquad \mathrm{ind}^{\mathbb{R}^1}_{O(1)}\, j^0_!(1) = 1 + a(1 + \xi) \in R(O(1)) \tag{4.3}$$

よって, 公理 **(B2")** の (iii) から $a = 0$ となるため, 式 (4.3) は公理 **(B2')** を直接意味している. □

最後に, この節の議論を図的にまとめておく.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\textbf{(A1)} & & \textbf{(A1)} & & \textbf{(A1)} & & & & \\
\textbf{(B1)} & \overset{\text{命題 4.13}}{\Longrightarrow} & \textbf{(B1)} & \overset{\text{命題 4.9}}{\Longrightarrow} & \textbf{(B1)} & \overset{\text{命題 4.10}}{\Longrightarrow} & \textbf{(A1)} & \overset{\text{命題 4.3}}{\Longrightarrow} & \textbf{指数の一意性} \\
\textbf{(B2")} & & \textbf{(B2')} & & \textbf{(B2)} & & \textbf{(A2)} & & \\
\textbf{(B3")} & & \textbf{(B3")} & & \textbf{(B3')} & & & &
\end{array}$$

5 擬微分作用素

本節では擬微分作用素について述べる．擬微分作用素は 6 節で解析的指数を定義するときに重要な役割を果たす．

擬微分作用素の歴史を少し紹介する．

- [Seeley], [Pal] などにより Atiyah–Singer の指数定理に必要な擬微分作用素の性質は証明された [AS1, 486–487].
- 実際に擬微分作用素という言葉を初めて用いた論文は [KN] である [熊ノ郷, はしがき].
- Atiyah–Singer の原論文 [AS1] は基本的に [Hö] の流儀を用いている．
- 今では，[熊ノ郷]，[Hö2] などの教科書がある．

擬微分作用素の定義の idea を述べよう．まず，$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の m 階線型微分作用素を考える．$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を 0 以上の整数とする．$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を多重指数と呼ぶ．D_x^α を次のように定義する：

$$D_x^\alpha = (-\sqrt{-1})^{|\alpha|}(\frac{\partial}{\partial x^1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x^n})^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$U \subset \mathbb{R}^n$ 上の m 階線型微分作用素

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) D_x^\alpha$$

を考える．ただし，各 α に対し，$p_\alpha(x)$ は U 上の $\mathbb{C}$ 値 C^∞ 級函数である．u を U 上の $\mathbb{C}$ 値 C^∞ 級函数とし，$\operatorname{supp} u \subset U$ はコンパクトであると仮定する．そのとき，Fourier 反転公式により，

$$Du = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \tag{5.1}$$

ただし，$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \xi^\alpha$ とおいた．ここで，より一般の $p(x, \xi)$ に対し (5.1) の右辺を定義したい．$p(x, \xi)$ が ξ の m 次多項式と似た評価を満たすとき，(5.1) は微分作用素と似た性質をもつのではないかと考えられる．これが $\mathbb{R}^n$ 上の擬微分作用素の定義の idea である．

5.1 擬微分作用素の定義

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の擬微分作用素を定義しよう．$S_0^m(U \times \mathbb{R}^n)$ を $U \times \mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}$ 値 C^∞ 級函数 $p = p(x, \xi)$ で次の (5.2), (5.3) を満たすもの全体とする：

- 任意の多重指数 β, γ および任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対し，ある $C > 0$ が存在して，次が成り立つ：

$$|D_x^\beta D_\xi^\gamma p(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - |\gamma|}. \tag{5.2}$$

- $U \times \mathbb{R}^n$ 上のある C^∞ 級函数 $\sigma(p)(x, \xi) \in \mathbb{C}$ が存在して，$U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ の各点 (x, ξ) において，次が成り立つ：

$$\sigma(p)(x, \xi) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{p_f(x, \lambda\xi)}{\lambda^m}. \tag{5.3}$$

$\mathcal{D}(U)$ を U 上のコンパクト台をもつ $\mathbb{C}$ 値 C^∞ 級函数全体とし，$\mathcal{E}(U)$ を U 上の $\mathbb{C}$ 値 C^∞ 級函数全体とする．$p = p(x,\xi) \in S_0^m(U \times \mathbb{R}^n)$ に対し，$p(x,D_x) : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ を次のように定義する：任意の $u \in \mathcal{D}(U)$ に対し，

$$p(x,D_x)u = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi. \tag{5.4}$$

ただし，$\hat{u}$ は u の Fourier 変換である．

擬微分作用素の定義を述べよう．擬微分作用素を多様体上で貼り合せるときに cut-off 函数 f をかけることが必要になる．そのためには，[Hö, Definition 2.11] を用いるのが便利である．[Hö] は $S^m_{\rho,\delta}$ を考えているが，ここでは，$\rho = 1, \delta = 0$ の場合のみを考える．$S^m_{\rho,\delta}$ の定義については [Hö, Definition 2.1] を見よ．

定義 5.1. $P : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ が U 上の m 階の**擬微分作用素**であるとは次が成り立つことをいう：任意の $f \in \mathcal{D}(U)$ に対し，$p_f = p_f(x,\xi) \in S_0^m(U \times \mathbb{R}^n)$ で任意の $u \in \mathcal{D}(U)$ に対し

$$P(fu) = p_f(x,D_x)u. \tag{5.5}$$

を満たすものが存在する．

この定義について二つ注意する．

- 定義 5.1 では cut-off 函数 f をかけているので，(5.4) が擬微分作用素であるか否か，すぐには分からない．実際には，(5.4) は擬微分作用素である．すなわち，任意の $f \in \mathcal{D}(U)$ に対し，ある $p_f = p_f(x,\xi) \in S_0^m(U \times \mathbb{R}^n)$ が存在して，任意の $u \in \mathcal{D}(U)$ に対し，次が成り立つ：
$$p(x,D_x)fu = p_f(x,D_x)u.$$
このことは漸近展開公式 [Hö, Theorem 2.6] を用いて証明される．
- $P : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ を U 上の m 階擬微分作用素とし，$f \in \mathcal{D}(U)$ とする．そのとき，(5.5) を満たす p_f は一意である．

次に，擬微分作用素の基本的な性質を述べよう．

(1) $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，m', m'' を整数とし，$P, Q : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ をそれぞれ m', m'' 階の擬微分作用素とする．また，$f \in \mathcal{D}(U)$ とする．そのとき，
$$\mathcal{D}(U) \ni u \mapsto Q(fPu) \in \mathcal{E}(U)$$
は U 上の $m' + m''$ 階擬微分作用素である．

(2) $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$P : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ を m 階擬微分作用素とする．そのとき，ある m 階擬微分作用素 $P^* : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ で任意の $u, v \in \mathcal{D}(U)$ に対し，
$$\int_U (Pu)\bar{v}dx = \int_U u\overline{P^*v}dx$$
を満たすものが一意的に存在する．P^* を P の**随伴**（**adjoint**）と呼ぶ．

(3) U, V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$g : U \to V$ を微分同相写像とする．$P : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{E}(U)$ を U 上の m 階擬微分作用素とする．$gP : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{E}(V)$ を次のように定義する：
$$gP : v \mapsto P(g \circ v) \circ g^{-1}. \tag{5.6}$$
そのとき，gP は m 階擬微分作用素である．

これらの証明については [Hö, Theorem 2.10, 2.15, 2.16] を見よ.

(3) を用いれば，多様体上の擬微分作用素を定義することができる．(1), (3) を用いれば，ベクトル束の切断に対する擬微分作用素を定義することができる.

5.2 擬微分作用素の表象

擬微分作用素の表象を定義しよう．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．ベクトル値函数に対する擬微分作用素を考える．すなわち，

$$P : \mathcal{D}(U) \otimes \mathbb{C}^r \to \mathcal{E}(U) \otimes \mathbb{C}^r$$

とし，任意の $f \in \mathcal{D}(U)$ に対し，

$$p_f = p_f(x, \xi) \in S_0^m(U \times \mathbb{R}^n) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r)$$

で任意の $u \in \mathcal{D}(U) \otimes \mathbb{C}^r$ に対し (5.5) を満たすものが一意的に存在すると仮定する．$(x_0, \xi_0) \in U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ とし，$f \in \mathcal{D}(U)$ で x_0 の近傍において $f = 1$ を満たすものを選ぶ.

$$\sigma(P)(x_0, \xi_0) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{p_f(x_0, \lambda\xi_0)}{\lambda^m} \tag{5.7}$$

とおく．(5.3) により，(5.7) の右辺は収束する．(5.7) の右辺が f の選び方によらないことは容易に証明できる．ゆえに，$\sigma(P)$ は well-defined であり，

$$\sigma(P) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r).$$

また，$\sigma(P)$ は m 次斉次である (定義は節 2.4 をみよ)．すなわち，任意の $\lambda \in \mathbb{C}, (x, \xi) \in U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対し，次が成り立つ：

$$\sigma(P)(x, \lambda\xi) = \lambda^m \sigma(P)(x, \xi).$$

定義 5.2. $\sigma(P)$ を擬微分作用素 P の**表象**と呼ぶ.

多様体上の擬微分作用素の表象も同じように定義される．X を C^∞ 級多様体とする．E, F を X 上の C^∞ 級複素ベクトル束とする．$\mathcal{D}(X; E)$ を E の C^∞ 級切断でコンパクト台をもつもの全体とし，$\mathcal{E}(X; F)$ を F の C^∞ 級切断全体とする．$P : \mathcal{D}(X; E) \to \mathcal{E}(X; F)$ を m 階擬微分作用素とする．そのとき，P の表象 $\sigma(P)$ は m 次斉次 C^∞ 級準同型写像

$$\sigma(P) : \pi^* E \to \pi^* F$$

として定義される．ただし，$\pi : T^*X \setminus X \to X$ は射影である．ここで，T^*X は X の cotangent bundle であり，X を T^*X の零切断と同一視している.

5.3 Sobolev 空間の間の擬微分作用素

擬微分作用素を Sobolev 空間の間の写像に拡張しよう．X を C^∞ 級多様体とし，E を X 上の C^∞ 級複素ベクトル束とする．整数 s に対し，**Sobolev 空間**$H_s^{\mathrm{loc}}(X; E)$ は次のように定義される：

$$H_s^{\mathrm{loc}}(X; E) = \{E \to X \text{ の切断で } L_2^{\mathrm{loc}} \text{の意味で「} s \text{ 回微分可能」であるもの } \}.$$

$H_s^{\mathrm{loc}}(X;E)$ の正確な定義は，例えば，[熊ノ郷, 第 3 章, 定義 6.1] で詳しく述べられている．

$$H_s^{\mathrm{comp}}(X;E)=\{u\in H_s^{\mathrm{loc}}(X;E)\,|\,\mathrm{supp}\,u\subset X\ \text{はコンパクトである}\ \}$$

とおく．$H_s^{\mathrm{comp}}(X;E)$ にはコンパクト集合 $K\subset X$ に関する $H_s(K;E)$ の inductive limit の位相を入れる．X がコンパクトならば，

$$H_s^{\mathrm{loc}}(X;E)=H_s^{\mathrm{comp}}(X;E)=:H_s(X;E)$$

であり，$H_s(X;E)$ は Hilbert 空間である．

定理 5.3. X を C^∞ 級多様体，E,F を X 上の C^∞ 級複素ベクトル束とする．$P:\mathcal{D}(X;E)\to\mathcal{D}(X;F)$ が m 階擬微分作用素であるとき，任意の整数 s に対し，P は次のように Sobolev 空間の間の連続線型作用素に拡張される：

$$P_s:H_s^{\mathrm{comp}}(X;E)\to H_s^{\mathrm{loc}}(X;F).$$

定理 5.3 の証明は [熊ノ郷],[Hö2] などにある．

5.4 擬微分作用素全体の空間の閉包

擬微分作用素全体の空間のある閉包を定義しよう．$\mathcal{P}^m(X;E,F)$ を $\mathcal{D}(X;E)$ から $\mathcal{D}(X;F)$ への m 階擬微分作用素全体とし，$Op_s^m(X;E,F)$ を $H_s^{\mathrm{comp}}(X;E)$ から $H_{s-m}^{\mathrm{loc}}(X;F)$ への連続線型作用素全体とする．定理 5.3 により，

$$\mathcal{P}^m(X;E,F)\subset Op_s^m(X;E,F) \tag{5.8}$$

とみなすことができる．$Op_s^m(X;E,F)$ に有界収束位相を入れる．有界収束位相の定義については，例えば，[Yosida, IV.7.ii)] を見よ．その位相に関する $\mathcal{P}^m(X;E,F)\subset Op_s^m(X;E,F)$ の閉包を $\overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ とあらわす．

$\mathcal{P}^m(X;E,F)$ の閉包をもう一つ定義しよう．$\mathcal{D}(X;E)$ から $\bigcup_{s\in\mathbb{Z}}H_s^{\mathrm{loc}}(X;F)$ への線型作用素で任意の整数 s に対し $H_s^{\mathrm{comp}}(X;E)$ から $H_{s-m}^{\mathrm{loc}}(X;F)$ への連続線型作用素に拡張できるものの全体を $Op^m(X;E,F)$ とあらわす．

$$\mathcal{P}^m(X;E,F)\subset Op^m(X;E,F)\subset\prod_{s\in\mathbb{Z}}Op_s^m(X;E,F) \tag{5.9}$$

とみなすことができる．$\prod_{s\in\mathbb{Z}}Op_s^m(X;E,F)$ に直積位相を入れる．その位相に関する $\mathcal{P}^m(X;E,F)\subset Op^m(X;E,F)$ の閉包を $\overline{\mathcal{P}^m}(X;E,F)$ とあらわす．

$\overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F),\overline{\mathcal{P}^m}(X;E,F)$ の元に対しても表象を定義しよう．表象 σ は $\mathcal{P}^m(X;E,F)$ から $\mathrm{Symb}^m(X;E,F)$ への写像であった．ここで，$\mathrm{Symb}^m(X;E,F)$ は $T^*X\setminus X$ 上のベクトル束 π^*E から π^*F への m 次斉次 C^∞ 級準同型写像全体である．

定理 5.4. 任意の整数 s に対し，表象 $\sigma:\mathcal{P}^m(X;E,F)\to\mathrm{Symb}^m(X;E,F)$ は Op_s^m 位相，局所 C^0 位相に関して連続である．

定理 5.4 の証明は，例えば，[Hö2, Theorem 19.2.5] にある．定理 5.4 により，$\overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F),\overline{\mathcal{P}^m}(X;E,F)$ の元に対しても表象 σ が定義される．

5.5 X 上の擬微分作用素の $X \times Y$ 上への拡張

7 節で解析的指数が 4 節の公理 (B3) を満たすことを証明するときに，X 上の擬微分作用素を $X \times Y$ 上の擬微分作用素に拡張することが必要である．ここで，X, Y は C^∞ 級多様体である．$P : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{E}(X)$ を X 上の m 階擬微分作用素とする．$\widetilde{P} : \mathcal{D}(X \times Y) \to \mathcal{E}(X \times Y)$ を次のように定義する：任意の $u = u(x, y) \in \mathcal{D}(X \times Y)$ に対し，

$$(\widetilde{P}u)(\bullet, y) = P(u(\bullet, y)).$$

一般には，$\widetilde{P}$ は $X \times Y$ 上の m 階擬微分作用素ではないが，次の定理が成り立つ：

定理 5.5. $\widetilde{P} \in \overline{\mathcal{P}^m}(X \times Y)$.

定理 5.5 の証明については [Pal, Section 4, XIV], [AS1, (5,4), p514] などを見よ．

5.6 多様体に群作用がある場合

6 節では多様体に群作用がある場合を考える．擬微分作用素の空間への群作用について必要な結果を述べよう．G をコンパクト Lie 群とし，G はコンパクト多様体 X になめらかに作用すると仮定する．E, F を X 上の G ベクトル束とする．G ベクトル束は 2 節の始めで定義されている．そのとき，[AS1, (5,5), p516] により，G は $\overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ に連続に作用する．G の $\overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ への作用を $P \mapsto gP$ とあらわす．$P \in \overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ に対し，

$$\mathrm{Av}(P) = \int_G (gP) dg.$$

とおく．ここで，dg は G の Haar 測度である．Av は $\overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ から $\overline{\mathcal{P}^m}(X; E, F)$ への連続写像である．Av を $\overline{\mathcal{P}^m_s}$ から $\overline{\mathcal{P}^m_s}$ への写像とみなすこともできる．

6 解析的指数の定義

本節の目標は解析的指数の定義である．X をコンパクト C^∞ 級多様体, G をコンパクト Lie 群とする．G は X に滑らかに作用すると仮定する．TX を X の接束，$K_G(TX)$ を TX の G 同変 K 群とする．$K_G(TX)$ の定義と性質は 2 節で述べられている．$R(G) := K_G(\mathrm{Point})$ とおく．すなわち，$R(G)$ は G の表現環である．$K_G(TX), R(G)$ は $\oplus$ に関する可換群であった．解析的指数はある群準同型写像

$$\text{a-ind} : K_G(TX) \to R(G)$$

として定義される．

解析的指数 a-ind : $K_G(TX) \to R(G)$ の定義の idea を述べよう．$a \in K_G(TX)$ とする．a はある楕円型作用素 P により represent される．P は Fredholm 作用素であるので，$\mathrm{Ker}\, P, \mathrm{Coker}\, P$ は $R(G)$ の元 $[\mathrm{Ker}\, P], [\mathrm{Coker}\, P]$ を定める．

$$\text{a-ind}(a) = [\mathrm{Ker}\, P] - [\mathrm{Coker}\, P] \in R(G)$$

とおく．これが a-ind の定義の idea である．

以下では，Fredholm 作用素および楕円型作用素を定義し，上に述べた解析的指数の定義が well-defined であることを確かめる．

6.1 Fredholm 作用素の index

まず，Fredholm 作用素を定義しよう．H, H' を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする．

定義 6.1. $P : H \to H'$ を連続線型作用素とする．P が **Fredholm 作用素**であるとは $\mathrm{Im}\, P$ が H' の閉部分空間であり，$\mathrm{Ker}\, P, \mathrm{Coker}\, P$ が有限次元ベクトル空間であることをいう．

連続線型作用素が Fredholm 作用素であるための必要十分条件を述べよう．

定理 6.2. $P : H \to H'$ を連続線型作用素とする．そのとき，P が Fredholm であるための必要十分条件は，ある連続線型作用素 $Q : H' \to H$ が存在して

$$QP - I : H \to H \text{ と } PQ - I' : H' \to H'$$

がコンパクト作用素であることである．ここで，I, I' はそれぞれ H, H' の恒等作用素である．

定理 6.2 の証明については，例えば，[黒田, 定理 11.24] を見よ．

Fredholm 作用素の指数を定義しよう．コンパクト Lie 群 G が H, H' に連続線型に作用すると仮定する．$P : H \to H'$ を G 同変連続線型作用素とし，P は Fredholm 作用素であると仮定する．定義 6.1 により，$\mathrm{Ker}\, P, \mathrm{Coker}\, P$ は有限次元ベクトル空間である．P は G 同変であるので，G は $\mathrm{Ker}\, P, \mathrm{Coker}\, P$ に連続線型に作用する．ゆえに，$R(G) = K_G(\mathrm{Point})$ の元 $[\mathrm{Ker}\, P], [\mathrm{Coker}\, P]$ を得る．

定義 6.3. G 同変 Fredholm 作用素 $P : H \to H'$ の **index** を次により定義する：

$$\mathrm{ind}\, P = [\mathrm{Ker}\, P] - [\mathrm{Coker}\, P] \in R(G).$$

Fredholm 作用素の index に関する定理をいくつか述べよう．

定理 6.4. $\{P_t\}_{t \in [0,1]}$ を H から H' への G 同変 Fredholm 作用素の族とする．H から H' への連続線型作用素全体にノルム位相を入れ，その位相に関して $t \mapsto P_t$ は連続であると仮定する．そのとき，$\mathrm{ind}\, P_t$ は $t \in [0,1]$ によらない．

定理 6.4 の証明については原論文 [AS1, pp519–520] を見よ．群作用がない場合には，[黒田, 定理 11.26] にも証明がある．

定理 6.5. $P : H \to H'$ を G 同変 Fredholm 作用素，$K : H \to H'$ を G 同変コンパクト作用素とする．そのとき，$F + K$ は G 同変 Fredholm 作用素であり，次が成り立つ：

$$\mathrm{ind}(P + K) = \mathrm{ind}\, P. \tag{6.1}$$

この定理の証明の方針を述べよう．$P + K$ が Fredholm 作用素であることの証明については，例えば，[黒田, 定理 11.27] を見よ．$\{P + tK\}_{0 \le t \le 1}$ に定理 6.4 を適用すれば，(6.1) を得る．定理 6.5 はこのように証明される．

6.2 楕円型擬微分作用素の index

X をコンパクト C^∞ 級多様体とする．G をコンパクト Lie 群とし，X になめらかに作用すると仮定する．m, s を整数とする．E, F を X 上の G ベクトル束とする．G ベクトル束は 2 節の始めで定義されている．Sobolev 空間 $H_s(X; E), H_{s-m}(X; F)$ は Hilbert 空間であ

り，G が連続線型に作用する．5 節のように，m 階擬微分作用素全体の空間のある完備化 $\overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ を定義する．$P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ に対し，5 節で定義したように，表象

$$\sigma(P) : \pi^* E \to \pi^* F$$

は $T^*X \setminus X$ 上の m 次斉次 C^0 級準同型写像である．

楕円型作用素を定義しよう．

定義 6.6. $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ が楕円型作用素であるとは表象

$$\sigma(P) : \pi^* E \to \pi^* F$$

が $T^*X \setminus X$ 上の m 次斉次 C^0 級同型写像であることをいう．

楕円型作用素は Fredholm 作用素であることを証明しよう．

補題 6.7 (原論文 [AS1, pp517–518])**.** $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ が楕円型作用素ならば，$P : H_s(X;E) \to H_{s-m}(X;F)$ は Fredholm 作用素である．

この補題の証明には次の定理と命題を用いる：

定理 6.8. $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ とする．$\sigma(P) = 0$ ならば，$P : H_s(X;E) \to H_{s-m}(X;F)$ はコンパクト作用素である．

命題 6.9. $\alpha : \pi^* E \to \pi^* F$ を $T^*X \setminus X$ 上の m 次斉次 C^0 級同型写像とする．そのとき，任意の整数 s に対し，ある楕円型作用素 $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ で $\sigma(P) = \alpha$ を満たすものが存在する．

定理 6.8 は Rellich の定理（例えば，[黒田, 定理 11.39] を見よ）の擬微分作用素への拡張である．定理 6.8 の証明については，例えば，[Hö, Corollary 3.4]，[熊ノ郷, 定理 5.14] を見よ．命題 6.9 は，1 の分割を用いることにより，容易に証明される．定理 6.8 と命題 6.9 を用いて，補題 6.7 を証明しよう．

補題 6.7 **の証明**. 楕円型作用素の定義により，$\sigma(P)^{-1}$ が存在する．命題 6.9 により，

$$\sigma(Q) = \sigma(P)^{-1}$$

を満たす $Q \in \mathcal{P}_{s-m}^{-m}(X;F,E)$ が存在する．ゆえに，定理 6.8 により，

$$QP - I : H_s(X;E) \to H_s(X;E),\ PQ - I : H_{s-m}(X;F) \to H_{s-m}(X;F)$$

はコンパクト作用素である．ゆえに，定理 6.2 により，$P : H_s(X;E) \to H_{s-m}(X;F)$ は Fredholm 作用素である．ゆえに，補題 6.7 が成り立つ． □

この補題により，G 同変楕円型作用素 $P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X;E,F)$ の **index** が

$$\text{a-}\operatorname{ind} P = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Coker} P] \in R(G)$$

により定義される．

6.3 解析的指数 $K_G(TX) \to R(G)$ の定義

以上の準備をもとに，解析的指数 $\text{a-ind} : K_G(TX) \to R(G)$ を定義しよう．解析的指数の定義の idea については本節の始めを見よ．

$P \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X; E, F)$ を G 同変楕円型作用素とする．まず，$\text{a-ind}\, P$ が P の表象 $\sigma(P)$ のみに依存することを証明しよう．

補題 6.10. s を任意の整数とする．G 同変楕円型作用素 $P, Q \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X; E, F)$ が $\sigma(P) = \sigma(Q)$ を満たすならば，$\text{a-ind}\, P = \text{a-ind}\, Q$.

証明. G 同変楕円型作用素 $P, Q \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X; E, F)$ が $\sigma(P) = \sigma(Q)$ を満たすと仮定する．定理 6.8 により，

$$P - Q : H_s(X; E) \to H_{s-m}(X; F)$$

はコンパクト作用素である．ゆえに，定理 6.5 により，$\text{a-ind}\, P = \text{a-ind}\, Q$ が成り立つ．ゆえに，補題 6.10 が成り立つ． □

$T^*X \setminus X$ 上の G 同変 m 次斉次 C^0 級同型写像 $\alpha : \pi^*E \to \pi^*F$ の index を定義しよう．補題 6.9 により，ある楕円型作用素 $P' \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X; E, F)$ で $\sigma(P') = \alpha$ を満たすものを選ぶことができる．G に関する平均 $\text{Av} : \overline{\mathcal{P}_s^m} \to \overline{\mathcal{P}_s^m}$ を用いて，$P = \text{Av}(P')$ とおく．$\alpha : \pi^*E \to \pi^*F$ の **index** を

$$\text{a-ind}_s^m(\alpha : \pi^*E \to \pi^*F) \in R(G)$$

により定義する．これは補題 6.10 により P の選び方によらない．ゆえに，a-ind_s^m は well-defined である．

a-ind_s^m は次の補題の意味でホモトピー不変である：

補題 6.11. $E_t, F_t (t \in [0,1])$ を X 上の G ベクトル束のホモトピーとし，$\alpha_t : \pi^*E_t \to \pi^*F_t$ を G 同変 m 次斉次 C^0 級同型写像のホモトピーとする．そのとき，

$$\text{a-ind}_s^m(\alpha_t : \pi^*E_t \to \pi^*F_t) \in R(G)$$

は $t \in [0,1]$ によらない．

証明. 補題 6.9 と同様に，ある G 同変楕円型作用素 $P_t \in \overline{\mathcal{P}_s^m}(X; E, F)$ のホモトピーで $\sigma(P_t) = \alpha_t$ を満たすものを構成できる．そのとき，定義により，

$$\text{a-ind}_s^m(\alpha_t : \pi^*E_t \to \pi^*F_t) = \text{ind}\, P_t.$$

定理 6.4 により，$\text{a-ind}\, P_t$ は $t \in [0,1]$ によらない．ゆえに，補題 6.11 が成り立つ． □

さらに，a-ind_s^m が整数 s, m によらないことを証明することができる．その証明の方針を述べよう．m によらないことの証明については原論文 [AS1, p518] を見よ．他方，s によらないことの理由は以下のように説明される．$P \in \mathcal{P}^m(X; E, F)$ を G 同変楕円型作用素とする．任意の s に対し，P は $P_s : H_s(X; E) \to H_{s-m}(X; F)$ を定める．そのとき，

$$\text{a-ind}\, P_s = [\text{Ker}\, P_s] - [\text{Coker}\, P_s]$$

が s によらないことを証明すればよい．原論文 [AS1, (6.6), p519] により，$\operatorname{Ker} P_s$ の元は C^∞ 級であり，$\operatorname{Ker} P_s$ は $\mathcal{D}(X;E)$ の部分集合として s によらない．ここで，$\mathcal{D}(X;E)$ は $E \to X$ の C^∞ 級切断全体である．ゆえに，$[\operatorname{Ker} P_s]$ は s によらない．P の adjoint を考えれば，$[\operatorname{Coker} P_s]$ が s によらないことが同様に証明できる．ゆえに，$\operatorname{a-ind} P_s$ は s によらない．

上で説明したように，$\operatorname{a-ind}_s^m$ は整数 s, m によらないので，

$$\operatorname{a-ind}(\alpha : \pi^*E \to \pi^*F) = \operatorname{a-ind}_s^m(\alpha : \pi^*E \to \pi^*F) \tag{6.2}$$

とおいてもよい．ここで，$\alpha : \pi^*E \to \pi^*F$ は G 同変 m 次斉次 C^0 級同型写像である．2.2 節と 2.4 節で述べたように，$\alpha : \pi^*E \to \pi^*F$ は $K_G(T^*X)$ の元を定める．補題 6.11 を用いれば，(6.2) は群準同型写像

$$\operatorname{a-ind} : K_G(T^*X) \to R(G) \tag{6.3}$$

を定めることが容易に証明される．X に G 不変 Riemann 計量を入れれば，G ベクトル束同型 $TX \cong T^*X$ を得る．これは可換群の間の同型写像

$$K_G(TX) \cong K_G(T^*X) \tag{6.4}$$

を誘導する．(6.4) は G 不変 Riemann 計量の入れ方によらない．(6.4) と (6.3) を合成すれば，群準同型写像

$$\operatorname{a-ind} : K_G(TX) \to R(G)$$

を得る．

定義 6.12 (Atiyah–Singer [AS1, p518])**.** 上のように定義された $\operatorname{a-ind} : K_G(TX) \to R(G)$ を X の**解析的指数**と呼ぶ.

Atiyah–Singer の指数定理とは，1 節で述べたように，位相的指数と解析的指数が等しいことをいう．Atiyah–Singer の指数定理を証明するためには，4 節で述べたように，解析的指数が (A1),(B1),(B2”),(B3) を満たすことを証明すればよい．解析的指数が (A1) を満たすことは明らかである．解析的指数が (B1),(B2”),(B3) を満たすことの証明については 7 節を見よ．

7 解析的指数の公理の確認

ここではこれまでに述べてきた事を用いて解析的指数が指数の公理 (B1)(B2”)(B3) を満たすことを示す. 是を示せば, 補題 4.13 と定理 4.11 から, 指数定理の証明は完成される. 以下の節で三つの公理 (B1)(B2”)(B3) それぞれを証明するが, 公理の定義は 4 節へ戻って思い出してもらいたい. 以下, 記述を簡単にするために閉包 $\overline{\mathcal{P}}^m$ の元も単に “擬微分作用素” と呼ぶことにする. また, K-群の元 $a \in K_G(TX)$ に対して $[\sigma(P)] = a \in K_G(TX)$ となるような (G-不変) 擬微分作用素 P を “a で表される擬微分作用素” と呼ぶことにする. 以下の証明（の概説）では, 本質である『K 群の元を表す「指数が実際に計算できるような良い」擬微分作用素を構成』する点を中心に説明し, 単純な計算により確認できるところは省略する.

7.1 公理 (B1)

U をコンパクト G-多様体 X の G-不変開部分集合とし, $j : U \hookrightarrow X$ を包含写像とする. 公理 (B1) を示すために, $a \in K_G(TU)$ に対して $j_*(a)$ を表す擬微分作用素を X への埋め込みに

よらない形で U から構成する.

（2.4）で述べたように, $a \in K_G(TU)$ は, コンパクト集合の外では恒等写像であるような U 上の G-不変複素ベクトル束 E, F の引き戻しを用いて得られる複体

$$0 \to \pi^* E \xrightarrow{\sigma} \pi^* F \to 0$$

により表された. ただし, $\pi : T^*X \to X$ は X の余接バンドルである. ここで, コンパクト集合の外で恒等写像とは, ある G-不変コンパクト集合 L_1 及び $U - L_1$ 上での自明化 $\alpha : E|_{U-L_1} \overset{\cong}{\to} (U - L_1) \times \mathbb{C}^n$, $\beta : F|_{U-L_1} \overset{\cong}{\to} (U - L_1) \times \mathbb{C}^m$ が存在し, $\sigma = \pi^*(\beta^{-1}\alpha)$ と書けるという事であった.

まず, a を表す擬微分作用素 P を構成する. $\{U_i\}$ を U の局所座標, $\{\varphi_j\}$ を $\{U_i\}$ に付随した１の分割とする. 各座標近傍 U_i 上で局所的に構成した擬微分作用素を１の分割を用いて貼り合わす事により, $\sigma(P_1) = \sigma$ となる擬微分作用素 $P_1 \in \overline{\mathcal{P}^0}(U; E, F)$ が構成できる. この時, σ は L_1 の外側では恒等写像であったので, 擬微分作用素 P_1 もある G-不変コンパクト集合 $L \supset L_1$ の外部では恒等写像, つまり, $P_1|_{U-L} = (\beta^{-1}\alpha)$ となる. １の分割を用いた貼り合わせの議論は, (B3) の証明で詳しく扱うのでここでは省略する. ここで, $P_1|_{U-L} = (\beta^{-1}\alpha)$ となるような（恒等写像となっているような）コンパクト集合 L が最初の L_1 よりも大きくなっているのは, １の分割で貼り合わせる際に "のりしろ" の分だけ σ の台が大きくなってしまう事に由来する. 構成した P_1 に対して, G-平均を取る事により, G-不変擬微分作用素 $P = Av(P_1)$ が得られる. 表象 $\sigma(P) = Av(\sigma(P_1)) = \sigma$ より, P は a を表す擬微分作用素である.

次に, 構成した擬微分作用素 P を X 上に拡張する. まず, E, F はコンパクト集合 $L \supset L_1$ の外では恒等写像であったので, E, F の自明化 α, β を X 上に恒等写像として拡張する事で, X 上の複素バンドル j_*E, j_*F が得られる. 次に, 擬微分作用素 P を L の外側で恒等写像, つまり $j_*P|_{X-L} = \beta^{-1}\alpha$ と定義する事により, P を X 上の擬微分作用素 $\overline{\mathcal{P}^0}(U; j_*E, j_*F)$ へ拡張する. この拡張は, L の外側では自明（恒等写像）となるので

$$[\sigma(j_*P)] = j_*([\sigma(P)]) = j_*a \in K_G(TX), \quad \operatorname{Ker} j_*P \cong \operatorname{Ker} P$$

が成り立つ. P の随伴作用素 P^* についても同様の式が成り立つ. 従って, 解析的指数は

$$\operatorname{ind}_G^X(j_*a) = [\operatorname{Ker} j_*P] - [\operatorname{Ker} j_*P^*] = [\operatorname{Ker} P] - [\operatorname{Ker} P^*] \in R(G)$$

となる. 擬微分作用素 P は U 及び a から作られたものであり, X への埋め込みの情報を全く用いていない. 従って $\operatorname{ind}_G^X(j_*a)$ は X への埋め込みによらない. したがって, 公理 (B1) が示された.

7.2 公理 (B2")

公理 (B2")(i),(ii) は, ドラームシンボルの指数を実際に計算することで示される. ドラームシンボルの定義より指数の計算は $O(1)$ 及び $SO(2)$ の S^1, S^2 の複素係数ドラームコホモロジー群への作用を調べることで計算される.

まず S^1 について考える. S^1 の（複素化した）ドラーム複体

$$0 \to \Omega^0 \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{d} \Omega^1 \otimes \mathbb{C} \to 0$$

から, $\operatorname{ind}_{O(1)}^{S^1}(\rho_{S^1}) = [H_{DR}^0(S^1) \otimes \mathbb{C}] - [H_{DR}^1(S^1) \otimes \mathbb{C}]$ となることが分かる. $H_{DR}^0(S^1)$ は定数写像 1 で生成されるので $O(1)$ の作用は自明であり, $[H_{DR}^0(S^1) \otimes \mathbb{C}] = 1$. 一方, $H_{DR}^1(S^1)$ は体積要素 dx で生成され, $O(1) = \{\pm 1\}$ は $H_{DR}^1(S^1)$ に $dx \mapsto -dx$ として, つまり向きを逆に

するように作用するので $[H^1_{DR}(S^1)\otimes\mathbb{C}]=\xi$ となる．（ξ は標準表現 $O(1)\hookrightarrow U(1)$）．従って $\mathrm{ind}^{S^1}_{O(1)}(\rho_{S^1})=1-\xi$.

$\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(\rho_{S^2})$ についても, 同様である．$H^0_{DR}(S^2)$ は定数写像 1 で生成され, $SO(2)$ の作用は自明であることから $[H^0_{DR}(S^2)\otimes\mathbb{C}]=1$. $H^2_{DR}(S^2)$ は体積要素 $dx\wedge dy$ で生成される. $SO(2)$ の作用は体積要素を保つので $[H^2_{DR}(S^2)\otimes\mathbb{C}]=1$ となる．従って $\mathrm{ind}^{S^2}_{SO(2)}(\rho_{S^1})=[H^0_{DR}(S^2)\otimes\mathbb{C}]+[H^2_{DR}(S^2)\otimes\mathbb{C}]=1+1=2$ となる.

最後の公理 (B2")(iii) を示すのが一番難しい．直接 $j_!(1)$ を表す擬微分作用素を構成し, その指数を計算するという証明方針では指数の計算が大変である．表象のホモトピー不変性を利用して, 表象をホモトピーで動かし, 指数の計算が簡単な（基本的な）擬微分作用素に帰着させて証明を行う.

$j:\mathrm{pt}\hookrightarrow S^1$ を包含写像とし, $k:N(\mathrm{pt})\cong\mathbb{R}\hookrightarrow S^1$ を管状近傍とする．今, 写像 $j_!:K(T\,\mathrm{pt})\to K(TS^1)$ は Thom 同型 $\varphi:K(T\,\mathrm{pt})\xrightarrow{\varphi}K(TN(\mathrm{pt}))$ と k の誘導する写像 $k_*:K(T\mathbb{R})\to K(TS^1)$ との合成により定義された (3.1).

$\mathrm{ind}^{S^1}j_!(1)=1$ を示すために, まず, 指数が -1 となる S^1 上の擬微分作用素 A を構成する. Fourier 展開より, $\mathcal{D}(S^1)$ の元 f は $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{-inx}$ と書ける事に注意して, 擬微分作用素 $A\in\mathcal{P}^0(S^1)$ を

$$A(e^{inx})=\begin{cases}e^{i(n+1)x}, & n\geq 0,\\ e^{inx}, & n<0\end{cases}$$

により定義する. 定義より A の指数は

$$\mathrm{index}\,A=[\mathrm{Ker}\,A]-[\mathrm{Coker}\,A]=[0]-[\{f(x)=c\,|\,c\in\mathbb{C}\text{ (constant functions) }\}]=-1$$

であり, A の表象 $\sigma_A:S^1\times(\mathbb{R}-\{0\})\to S^1\times(\mathbb{R}-\{0\})$ は

$$\sigma_A(x,\xi)=\begin{cases}(x,e^{ix}), & \xi>0,\\ (x,1), & \xi<0\end{cases}$$

で与えられる. 特に, $\mathrm{ind}^{S^1}([\sigma_A])=\mathrm{index}\,A=-1$.

今, 表象 $\sigma:\mathbb{R}^1\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}^1\times(\mathbb{R}-\{0\})\in\mathrm{Symb}^0(\mathbb{R})$ を

$$\sigma(x,\xi)=\begin{cases}(x,e^{ix}), & x\in[0,2\pi],\xi>0\\ (x,1), & \text{Otherwise}\end{cases}$$

と定めると, $k_*([\sigma])=\sigma_A$ が分かる. 一方別の表象 $\sigma_1:\mathbb{R}^1\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}^1\times(\mathbb{R}-\{0\})$ を

$$\sigma_1(x,\xi)=(x,-(x+i\xi))$$

と定義すると, 直接計算により, $-\varphi(1)=[\sigma_1]\in K(T\mathbb{R})$ となる事が分かる.

二つの表象 σ と σ_1 は $\mathrm{Symb}^1(\mathbb{R})$ 中でホモトピックなので, これらは同じ K-群の元 $[\sigma]=[\sigma_1]=-\varphi(1)\in K(T\mathbb{R})$ を定める. 以上より, 公理 (B2")

$$-\mathrm{ind}^{S^1}j_!(1)=\mathrm{ind}^{S^1}k_*(-\varphi(1))=\mathrm{ind}^{S^1}k_*([\sigma_1])=\mathrm{ind}^{S^1}k_*([\sigma])=\mathrm{ind}^{S^1}([\sigma_A])=-1$$

が示された.

7.3 公理 (B3)

最後に, 公理 (B3) を証明する．以下, $p: Y = P \times_H F \to X$ を射影とする．
公理 (B3) は次のような三つの段階を経て証明される．

Step 1: $a \in K_G(TX)$ を表す X 上の "良い性質をもつ"G-不変擬微分作用素 A 及びその Y への持ち上げ $\widetilde{A}$ を構成する．

Step 2: $b \in K_{G\times H}(TF)$ を表す F 上の "良い性質をもつ"$G \times H$-不変擬微分作用素 B 及びその Y への持ち上げ $\widetilde{B}$ を構成する．

Step 3: $A, B, \widetilde{A}, \widetilde{B}$ を用いて $\mathrm{ind}_G^Y(ab)$ を計算し, それが $\mathrm{ind}_G^X\big(a \cdot \big(\mu_P \,\mathrm{ind}_{G\times H}^F(b)\big)\big)$ と等しい事を示す．

Step 1: G-不変擬微分作用素 A 及びその持ち上げ $\widetilde{A}$ の構成

$A_1 \in \overline{\mathcal{P}}^1(X; E^0, E^1)$ を a を表す次数 1 の擬微分作用素とする．X の開被覆 $\{U_j\}$ 及び付随した 1 の分割 $\{\varphi_j^2\}$ をとる．各 U_j 上で P の自明化 $P|_{U_j} = U_j \times G$ を定める．$Y = P \times_H F$ であったので, 各 U_j 上での Y の自明化 $Y_j = p^{-1}(U_j) = U_j \times F$ も定まる．

U_j 上での擬微分作用素 A_1^j を $A_1^j = \varphi_j A_1 \varphi_j$ により定義し, A_1^j の $Y_j = U_j \times F$ への持ち上げを $\widetilde{A}_1^j$ とする．各 A_1^j はコンパクト台を持つ関数 φ_j との積をとっているので, $\widetilde{A}_1^j$ は $Y \setminus \mathrm{supp}\,\varphi_j$ 上では恒等写像であるような Y 上の擬微分作用素と見ることができる．

Y 上の G-不変擬微分作用素 $\widetilde{A}$ を G-平均 $\widetilde{A} = Av(\sum \widetilde{A}_1^j)$ により定義する．$\widetilde{A}$ の表象は α の持ち上げ $\widetilde{\alpha}$ となることが分かる．最後に, G-不変擬微分作用素 $A \in \overline{\mathcal{P}}^1(X; E^0, E^1)$ を $\widetilde{A}$ が底空間 X へ制限されたものとして定義する．$\sigma(\widetilde{A}) = \widetilde{\alpha}$ より, $\sigma(A) = \alpha$ となるので, A は $a \in K_G(TX)$ を表す擬微分作用素である．

Step 2: $G \times H$-不変擬微分作用素 B 及びその持ち上げ $\widetilde{B}$ の構成

$b \in K_{G\times H}(TF)$ を表す $G \times H$-不変擬微分作用素 $B \in \overline{\mathcal{P}}^1(F; G^0, G^1)$ をとる．B の $P \times F$ への持ち上げを $\widetilde{B_1}$ とする．これは $G \times H$-不変擬微分作用素なので $\widetilde{B_1}$ を $Y = P \times_H F$ 上へ制限することにより Y 上の G-不変擬微分作用素 $\widetilde{B}$ が得られる．

局所的に $Y_j = U_j \times F$ と見たとき, $\widetilde{A}$ は U_j 上での切断 $\Gamma(U_j)$ に作用し, $\widetilde{B}$ は F 上での切断 $\Gamma(F)$ に作用する．従って, $\widetilde{A}$,$\widetilde{B}$ は可換である．

Step 3: 指数の計算

$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ 及びそれらの随伴を用いて, G-不変擬微分作用素

$$D \in \overline{\mathcal{P}^1}(Y; (E^0 \boxtimes G^0) \oplus (E^1 \boxtimes G^1), (E^1 \boxtimes G^0) \oplus (E^0 \boxtimes G^1)) \text{ を}$$

$$D = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & -\widetilde{B}^* \\ \widetilde{B} & \widetilde{A}^* \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{P}^1}(Y)$$

により定める．すると $[\sigma(D)] = ab$, つまり D は ab を表す擬微分作用素である (2.2).

ここで左上の $\widetilde{A}$ と右下の $\widetilde{A}^*$ は異なるバンドルへの持ち上げである事に注意する．左上の $\widetilde{A}$ は $A \in \overline{\mathcal{P}}^1(X; E^0, E^1)$ の $\boxtimes G^0$ への持ち上げ $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{(\boxtimes G^0)} \in \overline{\mathcal{P}}^1(Y; E^0 \boxtimes G^0, E^1 \boxtimes G^0)$ であるのに対して, 右下の $\widetilde{A}^*$ は A の $\boxtimes G^1$ への持ち上げ $\widetilde{A} = \widetilde{A}_{(\boxtimes G^1)} \in \overline{\mathcal{P}}^1(Y; E^0 \boxtimes G^1, E^1 \boxtimes G^1)$

の随伴である．右上の $\widetilde{B}^*$ と左下の $\widetilde{B}^*$ についても同様である．以下では, 記述を簡単にするため $\widetilde{A},\widetilde{B}$ がどの空間への持ち上げか, （擬微分作用素の値域と定義域）は詳しく述べない事にする．これは構成を逐一追っていけば, 簡単に分かる．今からの証明では重要ではない．

証明に戻ろう．$\widetilde{A},\widetilde{B}$ は可換だったので,

$$D^*D = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^*\widetilde{A}+\widetilde{B}^*\widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}\widetilde{A}^*+\widetilde{B}\widetilde{B}^* \end{pmatrix}, DD^* = \begin{pmatrix} \widetilde{A}\widetilde{A}^*+\widetilde{B}^*\widetilde{B} & 0 \\ 0 & \widetilde{A}^*\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{B}^* \end{pmatrix}$$

となる．従って各成分を $P_0 = \widetilde{A}^*\widetilde{A}+\widetilde{B}^*\widetilde{B}$, $Q_0 = \widetilde{A}\widetilde{A}^*+\widetilde{B}\widetilde{B}^*, P_1 = \widetilde{A}\widetilde{A}^*+\widetilde{B}^*\widetilde{B}$, $Q_1 = \widetilde{A}^*\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{B}^*$ とおくと

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^*D = \operatorname{Ker} P_0 \oplus \operatorname{Ker} Q_0, \quad \operatorname{Ker} D^* = \operatorname{Ker} DD^* = \operatorname{Ker} P_1 \oplus \operatorname{Ker} Q_1$$

となる．特に D の指数は P_0, P_1, Q_0, Q_1 を用いて,

$$\mathrm{index} D = [\operatorname{Ker} D] - [\operatorname{Ker} D^*] = ([\operatorname{Ker} P_0] - [\operatorname{Ker} P_1]) + ([\operatorname{Ker} Q_0 - \operatorname{Ker} Q_1])$$

と書けることが分かる．

$([\operatorname{Ker} P_0] - [\operatorname{Ker} P_1])$ を計算するため, $\mathrm{index}\,(C) = [\operatorname{Ker} P_0] - [\operatorname{Ker} P_1]$ となる擬微分作用素 C を $\widetilde{A}$,$\widetilde{B}$ を用いて構成する．まず, L^2-内積 $\langle\ ,\ \rangle$ について等式

$$\langle P_0 u, u\rangle = \langle \widetilde{A}^*\widetilde{A}u, u\rangle + \langle \widetilde{B}^*\widetilde{B}u, u\rangle = \langle \widetilde{A}u, \widetilde{A}u\rangle + \langle \widetilde{B}u, \widetilde{B}u\rangle$$

が成り立つ事より, $\operatorname{Ker} P_0 = \operatorname{Ker} \widetilde{A} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{B}$ が分かる．従って $K_B = P \times_H \operatorname{Ker} B$ とすると $\operatorname{Ker} \widetilde{B}$ は切断のなす空間 $\operatorname{Ker} \widetilde{B} = \Gamma(X; K_B)$ である．$\widetilde{A}$ と $\widetilde{B}$ の可換性より $\widetilde{A}$ を $\operatorname{Ker} \widetilde{B}$ 上に制限する事で G-不変擬微分作用素 $C \in \overline{\mathcal{P}}^1(X)$ が得られる．$\operatorname{Ker} P_0 = \operatorname{Ker} \widetilde{A} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{B}$ より $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} P_0$ である．同様にして $\operatorname{Ker} C^* = \operatorname{Ker} P_1$ が分かる．また, $\widetilde{A}$ の表象は表象 α の持ち上げ $\widetilde{\alpha}$ であった事から, C の表象は表象 α の $\boxtimes K_B$ への持ち上げ $\sigma(C) = \alpha \otimes \mathrm{Id}_{K_B}$ で与えられる．従って

$$\mathrm{index}\, C = [\operatorname{Ker} P_0] - [\operatorname{Ker} P_1] = \mathrm{ind}_G^X(a[K_B]) \in R(G)$$

が分かった．Q_0, Q_1 に関しても同様に $\operatorname{Coker} B = \operatorname{Ker} B^*$ 及び $L_B = P \times_H \operatorname{Coker} B$ を考えることで $\mathrm{index}(C') = [\operatorname{Ker} Q_0] - [\operatorname{Ker} Q_1]$ となる擬微分作用素 C' が構成でき,

$$\mathrm{index}\, C' = [\operatorname{Ker} Q_0] - [\operatorname{Ker} Q_1] = \mathrm{ind}_G^X(a[L_B]) \in R(G)$$

となることが分かる．

以上より公理 (B3)

$$\mathrm{ind}_G^Y(ab) = \mathrm{index}\, D = \mathrm{ind}_G^X(a([K_B - L_B])) = \mathrm{ind}_G^X(a \cdot \mu_P(\mathrm{ind}_{G\times H}^F b))$$

が示された．

参考文献

[Ati1] M. F. Atiyah, *K-Theory*, Benjamin, 1967.

[Ati2] M. F. Atiyah, *Bott Periodicity and the index of elliptic operators*, Quart. Journal of Math. Oxford (2) 19 (1968), 113–140

[AS1] M. F. Atiyah, and I. M. Singer, *The index of elliptic operators I* , Ann. of Math., **87** (1968), 484–530.

[AS3] ———, *The index of elliptic operators III* , Ann. of Math., **87** (1968), 546–604.

[Hö] L. Hörmander, *Pseudo-Differential Operators and Hypoelliptic Equations* , Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume X, Singular Integrals, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

[Hö2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III* , Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **274**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork Tokyo.

[KN] J. J. Kohn and L. Nirenberg, *An Algebra of Pseudo-Differential Operators*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **18**, 269-305, (1965).

[熊ノ郷] 熊ノ郷準, 擬微分作用素 , 数学選書, 岩波書店.

[黒田] 黒田成俊, 関数解析 , 共立数学講座 **15**, 共立出版株式会社.

[Seeley] R. T. Seeley, *Integro-differential Operators on Vector Bundles* , Trans. Amer. Math. Soc. **117**(1965), 167–204.

[Seg] G. Segal, *Equivariant K-theory* , Publ. math. IHES, 34 (1968), 129–151.

[Pal] R. Palais, *Seminar on the Atiyh–Singer Index Theorem*, Annals of Mathematics Studies, **57**(1965), Princeton University Press.

[内田] 内田 伏一, 変換群とコボルディズム論 , 紀伊國屋数学叢書 **2**, 紀伊國屋書店.

[Yosida] K. Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **123**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork.