スピン多様体のディラック作用素の局所指数定理
–確率論的手法による証明–

幾何/確率班（京都大学理学研究科・数学教室）
尾國 新一[*]　鍛冶 静雄[†]　谷田 篤史[‡]　本多 正平[§]

概 要

本稿では確率論的手法を用いた, スピン多様体の Dirac 作用素についての局所指数定理の証明を, ねじれの無い場合に関して, おおむね Bismut[B2] に従って解説する. ただし, [B2] では熱核の漸近展開のところで, [B1] に大きく依存しており, 直接的とは言い難いので, 他の文献 [K], [T], [W] なども参照した.

1 謝辞

本稿は, 第一回琵琶湖若手数学者勉強会において, 尾國, 鍛冶, 谷田, 本多の四名からなる幾何/確率班のセミナーに基づいて書かれたものである. 第一回琵琶湖若手数学者勉強会の運営委員の方々にこの場をお借りして, お礼を申し上げたい.

不十分な理解による誤りもあると思われるので, 内容に興味をもたれた方は, そのまま鵜呑みにせず, 原論文等に当たっていただきたい. 多くのご指摘を頂ければ幸いである.

2 設定

変則的ではあるが, ここでまず本稿に現れる記号の定義を列挙しておく.

1. (M,g): 次元が $n=2l$ の向きづけられた, スピンかつリーマン閉多様体
2. P_{SO}: TM の向き付けられた正規直交枠からなる, M 上の $\mathrm{SO}(n)$ 主バンドル
3. P_{Spin}: M 上の $\mathrm{Spin}(n)$ 主バンドルで, P_{SO} のリフト
4. P: P_{SO} または P_{Spin}, $\pi : P \to M$: 射影
5. $S = S^+ \oplus S^-$: $\mathrm{Spin}(n)$ の 2^l 次元スピン表現[1](S^+, S^- はそれぞれ 2^{l-1} 次元既約表現)
6. $F = P_{\mathrm{Spin}} \times_{\mathrm{Spin}(n)} S, \quad F^\pm = P_{\mathrm{Spin}} \times_{\mathrm{Spin}(n)} S^\pm$
7. ω: Levi-Civita 接続, R: 曲率テンソル, K: スカラー曲率
8. D: Dirac 作用素, $D^+ : \Gamma(F^+) \to \Gamma(F^-)$ $D^- : \Gamma(F^-) \to \Gamma(F^+)$
9. $\mathrm{Ind}(D) = \dim \mathrm{Ker}(D^+) - \dim \mathrm{Ker}(D^-)$: Dirac 作用素の指数

[*]oguni@math.kyoto-u.ac.jp
[†]kaji@math.kyoto-u.ac.jp
[‡]tanida@math.kyoto-u.ac.jp
[§]honda@math.kyoto-u.ac.jp
[1]A 章参照

10. $\Delta_H : \Gamma(F) \to \Gamma(F)$: ω からきまる水平方向のラプラシアン[2]

11. (W, P): n 次元ウィナー空間, (W^1, P^1): n 次元ピン止めウィナー空間[3]

12. $w \in W$: ユークリッド空間上のブラウン運動, $w^1 \in W^1$: ユークリッド空間上のピン止めブラウン運動

13. $t > 0$ はパラメータ (スケール変換に用いる)[4]

14. $so(n) \ni T \sim \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 & & & & \\ -\theta_1 & 0 & & & & \\ & & * & & & \\ & & & * & & \\ & & & & 0 & \theta_l \\ & & & & -\theta_l & 0 \end{bmatrix}$ に対して $\widehat{A}(T) = \prod_{i=1}^{l} \frac{\frac{\theta_i}{2}}{\sinh \frac{\theta_i}{2}}$, $\mathrm{Pf}(T) = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_l$,
$\widehat{A}(M) := \widehat{A}(R)$ の定めるコホモロジー類

15. $p_s(x, y) : F_y \to F_x$: D^2 に関する熱核, すなわち, $s > 0$, $x, y \in M, h \in \Gamma(F)$ に対し $e^{-s\frac{D^2}{2}} h(x) = \int_M p_s(x,\ y) h(y) dy$

16. $J_s(x) := \mathrm{tr}(p_s(x,\ x)|_{F^+} - \mathrm{tr}(p_s(x,\ x)|_{F^-}) = Str(p_s(x,\ x))$

3 指数定理

本章では, 次のスピン多様体に関する指数定理の確率論的手法による証明の概略をのべる.

定理 3.1 (指数定理)**.**

$$\mathrm{Ind}(D) =< [M], \widehat{A}(M) >$$

指数定理の右辺は, Chern-Weil 理論より,

$$< [M], \widehat{A}(M) >= \int_M \widehat{A}(R_x)$$

と書ける. 指数定理の左辺は,

定理 3.2 (Mckean-Singer の公式)**.**

$$\mathrm{Ind}(D) = \int_M J_s(x) dvol(x)\ for\ all\ s > 0$$

と書ける.

つまり, 指数定理を示すには, 次が示されれば良い.

定理 3.3 (局所指数定理)**.** *J_s の $s \searrow 0$ での一様収束極限 J が存在し,*

$$J(x) dvol(x) =_n \widehat{A}(R_x)$$

. ただし, $=_n$ は両辺の n 形式が等しいことを表す.

[2]4 章参照
[3]1 秒後に原点に戻るブラウン運動の空間
[4]B 章参照

局所指数定理の右辺は, Levy の確率面積公式[5]によって,

$$\widehat{A}(R_x) = \int_{W^1} \exp\left[\frac{-i}{4\pi}\int_0^1 g(R_x uw_s^1, udw_s^1)\right] dP^1(w^1)$$

と書ける. (ここで, $\pi(u) = x$ なる $u \in P$ をとっている. これは, $u : R^n \to T_xM$ なる線形同型と見なせることに注意.)

さらにこれは, Bianchi の恒等式[6]より,

$$\int_{W^1} \exp\left[\frac{-i}{4\pi}\int_0^1 g(R_x uw_s^1, udw_s^1)\right] dP^1(w^1) =_n \int_{W^1} (-i)^l \mathrm{Pf}\left[\int_0^1 \frac{R_x}{4\pi}(udw_s^1, uw_s^1)\right] dP^1(w^1) dvol(x)$$

とできる.

つまり, 局所指数定理を示すには, 次が示されればよい.

定理 3.4 (Bismut の主定理)**.**

$$J(x) = \int_{W^1} (-i)^l \mathrm{Pf}\left[\int_0^1 \frac{R_x}{4\pi}(udw_s^1, uw_s^1)\right] dP^1(w^1)$$

.

本稿では以下, Bismut の主定理を証明することを目標とする.

4 水平ラプラシアンとブラウン運動

ここでは, 主束 P の水平方向の定義を確認し, それを用いて, P 上のブラウン運動の定義と Lichnerowicz の公式について述べる.

標準 1 形式 $\theta_u : T_u P_{\mathrm{SO}} \to \mathbb{R}^n$ を $\theta_u(v) = u^{-1}\pi_*(v)$ と定める. この時, $VP = \mathrm{Ker}\pi_*$, $HP = \mathrm{Ker}\omega$ として, $TP = HP \oplus VP \cong P \times (\mathbb{R}^n \oplus so(n))$ となり, 同型写像は $\theta|_{HP} \oplus \omega$ が与える.

$\mathbb{R}^n$ の向き付けられた正規直交基底を e_i を固定し, 水平ベクトル場を $H_i := \theta|_{HP}^{-1}(e_i)$ と定義する. これを用いて, P 上の水平方向のブラウン運動が次の確率微分方程式の解として与えられる.

$$dU_s(u,\omega) = \sum_{i=1}^n H_i(U_s(u,\omega)) \circ d\omega_i$$

このとき, $X_s(x,\omega) := \pi(U_s(u,\omega))$ とおくと, M 上のブラウン運動になる.

また, 水平ラプラシアンは $\Delta_H := -\sum_{i=1}^n H_i^2$ で定義され, $C^\infty(P_{\mathrm{Spin}}, S)^{\mathrm{Spin}(n)} \cong \Gamma(F)$ に作用する.

D^2 と Δ_H は次の関係にある.

定理 4.1 (Lichnerowicz)**.**

$$D^2 h(x) = \Delta_H h(x) + \frac{K(x)}{4} h(x)$$

ここで, $h \in \Gamma(F)$, $K(x)$ は M のスカラー曲率である.

5 ブラウン運動による熱核の表示

ここでは, ブラウン運動による D^2 の熱核の表示を与える.

---

[5] D 章参照

[6] $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

まず, Δ_H の熱核を考える. $k_s(x,y):F_y\to F_x$ を Δ_H に関する熱核, すなわち, $s>0$, $x,y\in M, h\in\Gamma(F)$ に対し $e^{-s\frac{\Delta_H}{2}}h(x)=\int_M k_s(x,\ y)h(y)dy$ とする. このとき, 多様体上のブラウン運動を用いると,

$$k_s(x,y)=\mathbb{E}[\delta_y(X_s(x))]$$

と書ける. ここで $\mathbb{E}$ はウィナー空間上での期待値を意味する.

Lichnelwicz の公式 $D^2=\Delta_H+K/4$ と Feynman-Kac の公式[7]により,

定理 5.1.

$$p_s(x,y)=\mathbb{E}[u\exp\left(-\frac{1}{8}\int_0^s U_{s'}(u)^{-1}K(X_{s'}(x))U_{s'}(u)ds'\right)U_s(u)^{-1}\delta_y(X_s(x))]$$

が得られる.

6 熱核の漸近展開

この章では, 熱核を解析し, Bismut の主定理の証明を与える. なお, 確率解析 (確率テーラー展開など) は自由に用いている.

前章より D^2 の熱核の表示は,

$$\begin{aligned}p_s(x,y)&=\mathbb{E}[u\exp\left(-\frac{1}{8}\int_0^s U_{s'}(u)^{-1}K(X_{s'}(x))U_{s'}(u)ds'\right)U_s(u)^{-1}\delta_y(X_s(x))]\\&=\mathbb{E}[\exp\left(-\frac{1}{8}\int_0^s K(X_{s'}(x))ds'\right)uU_s(u)^{-1}\delta_y(X_s(x))].\end{aligned}$$

特に対角のところは,

$$p_s(x,x)=\mathbb{E}[\exp\left(-\frac{1}{8}\int_0^s K(X_{s'}(x))ds'\right)uU_s(u)^{-1}\delta_x(X_s(x))].$$

スケール変換[8]して,

$$\begin{aligned}p_s^t(x,x)&=\mathbb{E}[\exp\left(-\frac{1}{8}\int_0^s K^t(X_{s'}^t(x))ds'\right)uU_1^t(u)^{-1}\delta_x(X_s^t(x))]\\&=\mathbb{E}[\exp\left(-\frac{t}{8}\int_0^s K(X_{s'}^t(x))ds'\right)uU_1^t(u)^{-1}\delta_x(X_s^t(x))].\end{aligned}$$

となるので, ここで $s=1$ として,

$$p_1^t(x,x)=\mathbb{E}[\exp\left(-\frac{t}{8}\int_0^1 K(X_{s'}^t(x))ds'\right)uU_1^t(u)^{-1}\delta_x(X_1^t(x))].$$

を得る.

このとき, $t\searrow 0$ において,

1. $\exp\left(-\frac{t}{8}\int_0^1 K(X_{s'}^t(x))ds'\right)=1+O(\sqrt{t})$
2. $\sqrt{t}^n\delta_x(X_1^t(x))=\delta(w_1)+O(\sqrt{t})$
3. $t^{-l}Str(uU_1^t(u)^{-1})=i^l\mathrm{Pf}\left(\frac{duU_1^t(u)^{-1}}{dt}(0)\right)+O(\sqrt{t})$

[7]C 章参照
[8]B 章参照

である．ここで, 3 つ目には定理 A.1 を適用している．

これら 3 つを合わせると, $t \searrow 0$ において,

$$Str\left[\exp\left(-\frac{t}{8}\int_0^1 K(X_{s'}^t(x))ds'\right)uU_1^t(u)^{-1}\delta_x(X_1^t(x))\right] = i^l\delta(w_1)\mathrm{Pf}\left(\frac{duU_1^t(u)^{-1}}{dt}(0)\right) + O(\sqrt{t}).$$

よって, $t \searrow 0$ において,

$$J_1^t(x) := Str(p_1^t(x,x)) = i^l\mathbb{E}[\delta(w_1)\mathrm{Pf}\left(\frac{duU_1^t(u)^{-1}}{dt}(0)\right)] + O(\sqrt{t}).$$

$$= i^l\int_W \delta(w_1)\mathrm{Pf}\left(\frac{duU_1^t(u)^{-1}}{dt}(0)\right)dP(w) + O(\sqrt{t}).$$

$$= i^l(2\pi)^{-l}\int_{W^1}\mathrm{Pf}\left(\frac{d\tau_1^t}{dt}(0)\right)dP^1(w^1) + O(\sqrt{t}).$$

ただし, $\tau_1^t := uU_1^t(u)^{-1}$(確率平行移動) とする．

ここで,

$$\frac{d\tau_1^t}{dt}(0) = \frac{-1}{2}\int_0^1 R_x(udw_s', uw_s')ds$$

がなりたつので, 特に

$$(2\pi)^{-l}\mathrm{Pf}\left(\frac{d\tau_1^t}{dt}(0)\right) = (-1)^l\mathrm{Pf}\left[\int_0^1 \frac{R_x}{4\pi}(udw_s', uw_s')ds\right]$$

より, Bismut の主定理が従う．

A スピン表現

E を $n = 2l$ 次元の実ベクトル空間で, その正規直交基底 $e_1, \ldots, e_{2l}$ を固定する．クリフォード代数 cE とは $\frac{TE}{<e\otimes e + e\cdot e>}$ のことであった．$cE \supset c_+E$ を基底の偶数個の積で生成される部分代数, $cE \supset c_-E$ を基底の奇数個の積で生成される部分代数とすると $cE = c_+E \oplus c_-E$ である．

cE の半自己同型 $x \mapsto \bar{x}$ を $e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdots e_{j_k} \mapsto (-1)^k e_{j_k}\cdot e_{j_{k-1}}\cdots e_{j_1}$ と定義する． c_*E を cE の可逆元のなす群とすると, 直交群の 2 重被覆群である $\mathrm{Pin}(n)$ は次で定義される．

$$x \in \mathrm{Pin}(n) \Leftrightarrow x \in c_*E,\ xEx^{-1} \subset E,\ \bar{x}x = 1$$

またその部分 Lie 群 $\mathrm{Spin}(n)$ は次で定義される．

$$\mathrm{Spin}(n) = \mathrm{Pin}(n) \cap c_+E$$

$\sigma : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(E)$ を $\sigma(x)e = xex^{-1}$ で定めると，2 重被覆 $\sigma : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ を誘導する．

複素化 $\bar{c}E = cE \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は複素代数としてある複素 2^l 次元のベクトル空間 S の行列環と同型である．この S をスピン空間と呼ぶ．

$w = e_1\cdots e_n, \tau = i^l w$ とおくと, $w^2 = (-1)^l, \tau^2 = 1$ である．τ の固有値 1 の固有空間を S_+, 固有値 -1 の固有空間を S_- とすると, 直行分解 $S = S_+ \oplus S_-$ が得られる．

S の定義から, $\mathrm{Spin}(n)$ は S_+, S_- にそれぞれ等長既約に作用し, これらは規約表現を与える．$x \in \mathrm{Spin}(n)$ の S_+, S_- それぞれへの作用を $\Delta^{\pm}$, そのトレースを $\chi_{\pm}(x)$ と書くことにする．$\mathrm{Spin}(n)$ のもうひとつの表現を考える．$\mathrm{Spin}(n) \subset c_+E$ とみなし, クリフォード代数の左からの掛け算として, $multi : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(c_+E)$ という表現は,

$$multi \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R} = 2^{l-1}(\Delta^+ \oplus \Delta^-)$$

と分解するので,

$$\Delta^{\pm}(w) = \pm i^{-m}$$

とあわせて,

$$\chi_+(x) - \chi_-(x) = \frac{i^l}{2^{l-1}}\mathrm{tr}(multi(wx)) \tag{A.1}$$

を得る.

以下はこの章の主定理である.

定理 A.1. *x_t を $\mathrm{Spin}(n)$ の $x_0 = e'$ (単位元) を基点とする C^1 級曲線とする.*

$$A = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \in so(n)$$

とすると,

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\chi_+(x_t) - \chi_-(x_t)}{t^l} = i^l \mathrm{Pf}A$$

Proof. C^1 級曲線 $x : \mathbb{R}^l \to \mathrm{Spin}(n)$ を,

$$\theta_1, \ldots, \theta_l \quad \mapsto \quad \prod_1^l \left(\cos\frac{\theta_j}{2} + \sin\frac{\theta_j}{2}e_{2j-1}e_{2j}\right)$$

と定義すると, $x' = \sigma(x(\theta_1, \ldots, \theta_l)) \in SO(n)$ として,

$$\begin{aligned} x'e_{2j-1} &= \cos\theta_j e_{2j-1} + \sin\theta_j e_{2j} \\ x'e_{2j} &= -\sin\theta_j e_{2j-1} + \cos\theta_j e_{2j} \end{aligned}$$

となるので x_t としては, $\theta_1, \ldots, \theta_j$ を t の関数として, 上のような形のものだけを考えればよい.

これを (A.1) に適用する. $\mathrm{tr}(multi(e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdots e_{j_{2k}})) = 0, (k > 0)$ であるから, wx_t のうちトレースが 0 でない部分は, $(-1)^l\prod_1^l \sin(\frac{\theta_j}{2})$ だけである. ここで, $\dim(c_+E) = 2^{2l-1}$ より,

$$\frac{i^l}{2^{l-1}}\mathrm{tr}(multi(wx_t)) = \frac{i^l}{2^{l-1}}\mathrm{tr}(multi((-1)^l\prod_1^l \sin(\frac{\theta_j}{2}))) = (-2i)^l\prod_1^l \sin(\frac{\theta_j}{2})$$

を得る.

絶対値を取ると,

$$|\chi_+(x) - \chi_-(x)|^2 = 2^l\prod_1^l 2\sin(\frac{\theta_j}{2}) = 2^l\prod_1^l (1-\cos(\theta_j)) = \det(\sigma(e') - \sigma(x))$$

より,

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{|\chi_+(x_t) - \chi_- x_t|}{t^l} = \sqrt{\det(e - \sigma(x))} = |\mathrm{Pf}A|$$

となり定理の左辺が収束し, $c\mathrm{Pf}A, (|c| = 1)$ であることが示された. 最後に定数 $c = i^l$ を示すためには, $x_t = x(t, \ldots, t)$ とすればよい. □

B スケール変換

リーマン計量 g を $g^t := t^{-1}g$ とスケール変換したとき, その他の量がどのように変わるか見ておく.

1. 水平ベクトル場: $H_i \to H_i^t = \sqrt{t}H_i$

2. 水平ラプラシアン: $\Delta_H \to \Delta_H^t = t\Delta_H$
3. スカラー曲率: $K \to K^t = tK$
4. ラプラシアン: $\Delta := D^2 \to \Delta^t = t\Delta$
5. P 上のブラウン運動: $U \to U_s^t = U_{ts}$
6. M 上のブラウン運動: $X \to X_s^t = X_{ts}$
7. 熱核: $p \to p_s^t = p_{ts}$

C Feynman-Kac の公式

ここでは, M 上の $\mathbb{R}^N$ 値関数からなる $C^\infty(M,\mathbb{R}^N)$ 上のラプラシアン Δ とスカラーポテンシャル V を加えた $\Delta + V$ の熱核を扱う.

まず, Δ の熱核を考える. $k_s(x,y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を Δ に関する熱核, すなわち, $s > 0$, $x, y \in M, h \in C^\infty(M,\mathbb{R}^N)$ に対し $e^{-s\frac{\Delta}{2}}h(x) = \int_M k_s(x,\ y)h(y)dy$ とする. このとき, 多様体上のブラウン運動を用いると,

$$k_s(x,y) = \mathbb{E}[\delta_y(X_s)]$$

と書ける.

次に, $\Delta + V$ の熱核を考える. $p_s(x,y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を $\Delta + V$ に関する熱核, すなわち, $s > 0$, $x, y \in M, h \in C^\infty(M,\mathbb{R}^N)$ に対し $e^{-s\frac{\Delta+V}{2}}h(x) = \int_M p_s(x,\ y)h(y)dy$ とする. このとき, Feynman-Kac の公式は, 次を主張している.

定理 C.1.

$$p_s(x,y) = \mathbb{E}[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^s V(X_{s'}(x))ds'\right)\delta_y(X_s(x))]$$

補足 C.2. ラプラシアン Δ は, $C^\infty(M,\mathbb{R}^N) \cong \bigoplus_{i=1}^{i=N} C^\infty(M)$ のもとで, 通常のラプラシアンを N 個対角に並べたものだが, 水平ベクトル場 H_i を用いてあらわすこともできる. すなわち, $-\sum_{i=1}^n H_i^2$ の $C^\infty(P_{\mathrm{Spin}},\mathbb{R}^N)^{\mathrm{Spin}(n)}$ への作用が, $C^\infty(P_{\mathrm{Spin}},\mathbb{R}^N)^{\mathrm{Spin}(n)} \cong C^\infty(M,\mathbb{R}^N)$ のもとで Δ と一致している. ただし, $\mathrm{Spin}(n)$ の $\mathbb{R}^N$ への作用は自明としている.

一方, *4* 章, *5* 章では, $\mathrm{Spin}(n)$ の自明な表現 $\mathbb{R}^N$ ではなく, $\mathrm{Spin}(n)$ 表現 S を扱っているため, 確率平行移動によるベクトル束 F の自明化に関連するところが含まれる形で *Feynman-Kac* の公式を書く必要があり, 定理 *5.1* のようになっている.

D Levy の確率面積公式

$w^{(1)}$ と $w^{(2)}$ を時刻 $s = 0$ で原点を出発する独立な二つの 1 次元ブラウン運動とするとき,

$$\mathbb{E}\left[\exp(i\beta\int_0^1 (w_s^{(1)}dw_s^{(2)} - w_s^{(2)}dw_s^{(1)})\middle| w_1^{(1)} = x, w_1^{(2)} = y\right] = \frac{\beta}{\sinh\beta}\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}(1-\beta\coth\beta)\right)$$

が成り立つ. これは Levy の確率面積公式と呼ばれ, 大変よく知られているものである [BS, p. 70](ただし符号を間違えているように思われる).

これを用いると, 歪対称行列 T に対して,

$$\widehat{A}(T) = \int_{W^1}\exp[\frac{-i}{4\pi}\int_0^1 < Tw_s^1, dw_s^1 >]dP_1(w^1)$$

がなりたつ. このとき, P_1 が $SO(n)$ 不変であるから, 右辺は $SO(n)$ 不変な $so(n)$ 上の形式冪級数となっていることに注意.

参考文献

[B1] J-M. Bismut, *Large deviations and the Malliavin calculus*, Progress in Math. **45** (1984).

[B2] J-M. Bismut, *The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach. I. The index theorem*, J. Funct. Anal. **57**, No. 1 (1984), 56–99.

[BS] A-N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian motion – facts and formulae 2nd. ed.* Probability and its Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

[K] 楠岡成雄, *Malliavin calculus* の理論と応用, 数学. **41**, No. 2 (1989), 154–165.

[T] 谷口説男, 確率解析と幾何 –ユビキタス・ウィナー・インテグラル–, A note for the talks in the 29th 'Encounter with Mathematics' on Dec. 19 and 20, 2003, at Chuo Univ.

[W] 渡辺信三, 確率解析とその応用, 数学. **42**, No. 2 (1990), 97–110.