

共形場理論から広がる数学

幾何/数理物理班

河本 大知* (名古屋大学大学院 多元数理科学研究科)

丹下 基生† (大阪大学大学院 理学研究科)

山川 大亮‡ (京都大学大学院 理学研究科)

はじめに

山川 大亮

本稿では、第1回琵琶湖若手数学者勉強会における幾何/数理物理班のセミナー報告を行います。幾何/数理物理班は3名からなり、本勉強会において次の本をテキストとして用いました：

河野俊丈, 場の理論とトポロジー, 岩波講座現代数学の展開, 1998.

本稿は3章からなり、各章はテキストの対応する章と関連した内容となっています。タイトル及び執筆者は以下のようになっています：

第1章 KZ 方程式と Schlesinger 方程式 (山川 大亮)

第2章 Jones-Witten 理論 (丹下 基生)

第3章 量子論に現れる代数的・数論的構造 (河本 大知)

なお、編集は山川が行いました。

最後に、本勉強会の運営担当の一人として、参加者の皆様のご協力に厚く御礼申し上げたいと思います。本勉強会は初めての試みという事もあり、参加者の方々には拙い運営によって大変ご迷惑をお掛けしたと思いますが、この勉強会が皆様にとって少しでも実りあるものとなれば幸いです。

2007年8月 山川 大亮

*m04015zATmath.nagoya-u.ac.jp

†tangeATmath.sci.osaka-u.ac.jp

‡yamakawaATmath.kyoto-u.ac.jp ('AT' を@に換えて下さい)

第1章

KZ方程式とSchlesinger方程式

山川 大亮

\mathfrak{g} を複素単純 Lie 環, $(V_1, \rho_1), \dots, (V_n, \rho_n)$ を \mathfrak{g} の有限次元表現とする. Ω を \mathfrak{g} の Casimir 元とし, これを \mathfrak{g} 上の Cartan-Killing 形式に関する正規直交基底 $\{I_a\}$ を用いて $\Omega = \sum_a I_a \otimes I_a$ と表しておく. $V := \bigotimes_{i=1}^n V_i$ とおき, 各 $i \neq j$ に対して V の作用素 Ω_{ij} を

$$\Omega_{ij} := \sum_a 1_{V_1} \otimes \cdots \otimes \rho_i(I_a) \otimes \cdots \otimes \rho_j(I_a) \otimes \cdots \otimes 1_{V_n}$$

と定める. このとき Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (KZ 方程式) とは次のような微分方程式として定義される:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \frac{1}{\kappa} \sum_{j:j \neq i} \frac{\Omega_{ij}(\Phi)}{z_i - z_j}. \quad (0.1)$$

ただし, 未知関数 $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ は V に値を持つ n 変数関数であり, κ はある定数である.

KZ 方程式は共形場理論において, $\text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上の共形ブロック束に定まる平坦接続 (KZ 接続) の, 平坦切断の方程式として現れる. 詳しくは [Koh] の第1章を参照されたい.

一方, Schlesinger 方程式とは次のような微分方程式系である:

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_i} = - \sum_{j:j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{z_i - z_j}, \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_j} = \frac{[A_i, A_j]}{z_i - z_j} \quad (i \neq j) \quad (0.3)$$

ここで未知関数 A_i は n 変数の行列値関数である. この微分方程式は \mathbb{CP}^1 上の対数型接続のモノドロミー保存変形を記述する方程式として知られている.

これら2つの微分方程式の関係は, Reshetikhin [Res], Harnad [Har] によって与えられた. 本章は [Har] の方法で $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ の場合にその関係を紹介したい.

1 平坦接続のモジュライ

まず Schlesinger 方程式の幾何学的な背景について解説する. 本節, 及び次節の内容について, 詳しくは [Hit2] を参照されたい.

x_1, \dots, x_n, ∞ を Riemann 球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内の無限遠点 ∞ を含んだ相異なる $(n+1)$ 点とし, 各々を中心とする開円板 $D_1, \dots, D_n, D_\infty$ で互いに交わらないものを取って $\Sigma := \mathbb{CP}^1 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n \cup D_\infty)$ とおく. Σ は種数0の境界付きコンパクト Riemann 面であり, 境界 $\partial\Sigma$ の連結成分の数は $n+1$ となる. Σ 上の階数 r の複素ベクトル束 V として自明束を取る. このとき V 上の接続全体 \mathcal{A} は自然に Σ 上の $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})$ に値を持つ1次微分形式のなすベクトル空間 $\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ と同一視される. \mathcal{A} 上には自明化の取替えによってゲージ変換群 $\mathcal{G} := \text{Map}(\Sigma, \text{GL}(r, \mathbb{C}))$ が作用している. 具体的に書くと, $A \in \mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ に対して $g \in \mathcal{G}$ の(右)作用は次のようになる:

$$g^* A := g^{-1} A g + g^{-1} dg.$$

\mathcal{G} の Lie 環 $\text{Lie } \mathcal{G}$ は $\text{Map}(\Sigma, \mathfrak{g})$ で与えられる. また上式より, $\xi \in \text{Lie } \mathcal{G}$ の点 $A \in \mathcal{A}$ における無限小作用は

$$\xi_A^* = -[A, \xi] - d\xi \quad (= -\nabla_A(\xi))$$

となる．今写像 $\mu: A \rightarrow (\text{Lie } G)^*$ を

$$\langle \mu(A), \xi \rangle := \int_{\Sigma} \xi F_A - \int_{\partial \Sigma} \xi A$$

として定める．ただし $F_A = dA + A \wedge A$ は A の曲率である．このとき次が成立する：

命題 1.1. 任意の $\xi \in \text{Lie } G$, $\alpha \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}) = T_A A$ に対し

$$\langle d\mu_A(\alpha), \xi \rangle = \int_{\Sigma} \text{tr } \xi_A^* \wedge \alpha$$

が成立する．

証明は容易である．実際， $\langle \mu(A + t\alpha), \xi \rangle$ を $t = 0$ で微分すれば，

$$\langle d\mu_A(\alpha), \xi \rangle = \int_{\Sigma} \xi(d\alpha + A \wedge \alpha + \alpha \wedge A) - \int_{\partial \Sigma} \xi \alpha$$

が得られる．後は Stokes の定理から主張が従う．

A 上の 2 次微分形式 ω を

$$\omega_A(\alpha, \beta) := \int_{\Sigma} \text{tr } \alpha \wedge \beta$$

で定める．すると上の命題は

$$\langle \xi, d\mu \rangle = \iota(\xi^*)\omega \quad (1.1)$$

と表す事ができる．ただし ι は内部積である．

ω の定義を見ると，これは点 A に依らない形をしているので明らかに $d\omega = 0$ ，すなわち ω は閉微分形式である．また各点 $A \in A$ において，双線型形式 ω_A は次の意味で非退化である；任意の $\alpha \in T_A A$ に対し $\omega_A(\alpha, \beta) = 0$ ならば $\beta = 0$ である．一般に，有限次元 C^∞ 多様体上のこのような微分形式をシンプレクティック形式と呼び，多様体とシンプレクティック形式の組をシンプレクティック多様体と呼ぶ．上記の事から， (A, ω) は無限次元のシンプレクティック多様体とみなせる事が分かる．

定義 1.2. シンプレクティック多様体 (M, ω) 上に Lie 群 G が ω を保つように作用しているとする．このとき G の作用と可換な写像 $\mu: M \rightarrow (\text{Lie } G)^*$ で (1.1) を満たすものを運動量写像と呼ぶ．ただし G の $(\text{Lie } G)^*$ 上の作用は随伴作用の双対によって与える（余随伴作用）．

この言葉を用いると，先の写像 $\mu: A \rightarrow (\text{Lie } G)^*$ はシンプレクティック多様体 (A, ω) の G の作用に関する運動量写像であるという事ができる．

次の定理はシンプレクティック幾何学において大変有名である：

定理 1.3. 有限次元シンプレクティック多様体 (M, ω) 上にコンパクト Lie 群 G が作用していて，運動量写像 $\mu: M \rightarrow (\text{Lie } G)^*$ を持つとする． $\mathcal{O} \subset (\text{Lie } G)^*$ を 1 つの余随伴軌道とし， $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ が空でなく，また $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ 上の G の作用が自由であると仮定する．すると商空間 $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ は自然にシンプレクティック多様体となる．

商空間 $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ を， M のシンプレクティック商と呼ぶ．

この定理は M の有限次元性，作用する群のコンパクト性を仮定しており，そのままでは我々の無限次元の状況には適用できないが，今はとりあえずその問題を忘れる事にして，形式的に適用してみる．まず運動量写像 μ は，値をベクトル空間 $\Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^1(\partial \Sigma, \mathfrak{g})$ に持つと考えられる事に注意する．このベクトル空間は trace と積分によって $(\text{Lie } G)^*$ に埋め込まれ，その埋め込みとの合成が μ を与える． $\Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^1(\partial \Sigma, \mathfrak{g})$ 内の G 軌道として次のようなものを取ろう： $(n+1)$ 個の共役類 $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_\infty \subset \text{GL}(r, \mathbb{C})$ を取り，各 ∂D_i 上で（ある固定された基点において）ホロノミーを取る写像

$$\text{Hol}: \Omega^1(\partial \Sigma, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^1(S^1, \mathfrak{g})^{\oplus(n+1)} \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{C})^{n+1}$$

を考える．そしてこれによる $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_\infty$ の逆像を \mathcal{O} とする．すると定理 1.3 により商空間

$$\mathcal{M} := \mu^{-1}(0 \oplus \mathcal{O})/\mathcal{G}$$

がシンプレクティック多様体となる事が期待される． $\mu^{-1}(0 \oplus \mathcal{O}) \subset \mathcal{A}$ は, $V \rightarrow \Sigma$ 上の平坦接続であって, 境界の各連結成分 ∂D_i ($i = 1, \dots, n, \infty$) に沿ったホロノミーが \mathcal{C}_i に含まれるようなもののなす部分集合とみなせる．従って \mathcal{M} はホロノミーの共役類を \mathcal{C}_i で指定された平坦接続のモジュライ空間となっている．

残念ながら, \mathcal{M} は一般に滑らかな多様体とならない．実際, 平坦接続のゲージ同値類はそのホロノミーで決まってしまうため, 全単射

$$\mathcal{M} \rightarrow \{(B_1, \dots, B_n, B_\infty) \in \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \times \mathcal{C}_\infty \mid B_1 \cdots B_n B_\infty = 1\} / \text{GL}(r, \mathbb{C})$$

が存在するが, 右辺は一般に滑らかな多様体になっていない．ただし, \mathcal{C}_i 達を generic に取る事で任意の組 $(B_1, \dots, B_\infty) \in \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_\infty$ が非自明な共通不変部分空間 (すなわち非自明な部分空間 $S \subset \mathbb{C}^r$ で任意の i で $B_i(S) \subset S$ となるもの) を持たないようにすれば, この空間は滑らかになる．以後これを仮定する事にする．

2 モノドロミー保存変形

前節では平坦接続のモジュライ空間としてシンプレクティック多様体 \mathcal{M} を導入した．これと密接に関係しているもう 1 つのシンプレクティック多様体がある． $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n, \mathcal{O}_\infty \subset \mathfrak{g}$ を余随伴軌道とし,

$$\mathcal{R} := \{(A_1, \dots, A_n, A_\infty) \in \mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n \times \mathcal{O}_\infty \mid A_1 + \cdots + A_n + A_\infty = 0\} / \text{GL}(r, \mathbb{C})$$

と定める．これも \mathcal{O}_i 達を generic に取っておけば滑らかとなる．また各 \mathcal{O}_i は trace によって \mathfrak{g}^* の余随伴軌道と同一視する事によりシンプレクティック多様体となる．実際, シンプレクティック形式は点 $X \in \mathcal{O}_i$ において

$$\omega_X(v, w) = \text{tr}(Vw), \quad [V, X] = v \quad (2.1)$$

で与えられる (Kirillov-Kostant シンプレクティック形式と呼ぶ)．この上の随伴作用は包含写像 $\mathcal{O}_i \hookrightarrow \mathfrak{g}$ を運動量写像として持ち, 従って直積 $\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_\infty$ はシンプレクティック多様体で運動量写像 $(A_1, \dots, A_\infty) \mapsto \sum_i A_i$ を持つ．故に \mathcal{R} は定理 1.3 によりシンプレクティック多様体となる．

今, 各 \mathcal{O}_i に対し共役類を $\mathcal{C}_i := \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathcal{O}_i) \subset \text{GL}(r, \mathbb{C})$ によって定め, これに対応するモジュライ空間 \mathcal{M} を考える． Σ は \mathbb{CP}^1 から x_1, \dots, x_n, ∞ のそれぞれを中心とする開円盤 D_1, \dots, D_∞ を除いて得られる曲面であった．そこで \mathcal{R} から \mathcal{M} へ次のような写像を定義する:

$$f_x: [(A_1, \dots, A_\infty)] \mapsto \left[d - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - x_i} dz \right].$$

ただし $[\]$ は同値類の意味で書いている．右辺の接続は Σ 上正則なので, 特に平坦である．またこれの各 x_i における留数は $-2\pi\sqrt{-1}A_i$ で与えられ, 故に \mathcal{O}_i が generic なら, ∂D_i に沿ったホロノミーは \mathcal{C}_i に入る．故に上の写像は well-defined である．

定理 2.1 (Hitchin [Hit2]). 写像 f_x による \mathcal{M} 上のシンプレクティック形式の引き戻しは \mathcal{R} 上のシンプレクティック形式の定数倍である．

特に $f_x: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{M}$ は局所双正則写像である事が分かる．

今 1 点 $m \in \mathcal{M}$ を固定し $x = (x_1, \dots, x_n)$ を動かして考えた時, 逆像 $f_x^{-1}(m)$ は行列の組の族 $A(x) = (A_1(x), \dots, A_n(x))$ で有理型接続 $d - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - x_i} dz$ のモノドロミーが m で固定されたものを記述している ($A_\infty(x) = -\sum_{i=1}^n A_i(x)$ は省略した)．このような族をモノドロミー保存変形と呼ぶ．

3 モノドロミー保存変形と Schlesinger 方程式

モノドロミー保存変形の満たす方程式として Schlesinger 方程式を導こう． $\text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ を \mathbb{CP}^1 上の相異なる n 個の (順序づけられた) 点 (x_1, \dots, x_n) のなす空間とする．モノドロミー保存変形 $A(x)$ はこの空間の上の正則関数である． $A(x)$ を用いて, $\mathbb{CP}^1 \times \text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ 上の自明束の有理型接続

$$\nabla = d - \sum_{i=1}^n A_i \frac{dz - dx_i}{z - x_i}$$

を定める．これは因子

$$S_m := \{(z, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{CP}^1 \times \text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1) \mid z = x_m\} \quad (m = 1, \dots, n)$$

及び $S_\infty := \{(\infty, x) \mid x \in \text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)\}$ において特異点を持っており, 射影 $\pi: \mathbb{CP}^1 \times \text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1) \rightarrow \text{Conf}_n(\mathbb{CP}^1)$ の各 fiber $\pi^{-1}(a)$ に制限すると \mathbb{CP}^1 上の有理型接続 $d - \sum_{i=1}^n A_i(a) \frac{dz}{z - a_i}$ を与える ($S_m \cap \pi^{-1}(a)$ は 1 点である事に注意しよう)． $A(x)$ がモノドロミーを保存する, すなわち $f_x([A(x)]) = \text{const.}$ であるためには, 各 m に対し, 1 点 $S_m \cap \pi^{-1}(a)$ の周りを 1 回転する $\pi^{-1}(a)$ 内のループに関する ∇ のホロノミーの共役類が a に依らなければ良い．この条件は ∇ が平坦接続であれば満たされる． ∇ の曲率は

$$\begin{aligned} & - \sum_i dA_i \wedge \frac{dz - dx_i}{z - x_i} + \sum_{i,j} A_i A_j \frac{(dz - dx_i) \wedge (dz - dx_j)}{(z - x_i)(z - x_j)} \\ & = - \sum_{i,j} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j \wedge (dz - dx_i)}{z - x_i} + \sum_{i,j} A_i A_j \frac{(dx_j - dx_i) \wedge dz + dx_i \wedge dx_j}{(z - x_i)(z - x_j)} \end{aligned}$$

で与えられる．この $dx_i \wedge dx_j$ の係数は

$$- \frac{1}{z - x_i} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{1}{z - x_j} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \frac{[A_i, A_j]}{(z - x_i)(z - x_j)}$$

であり, これが恒等的に消えるためには

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{[A_i, A_j]}{x_j - x_i} = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.1)$$

が成立する事が必要十分である．次にこの条件の下で曲率の $dx_j \wedge dz$ の係数を見ると,

$$\begin{aligned} & - \sum_i \frac{1}{z - x_i} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \sum_i \frac{[A_i, A_j]}{(z - x_i)(z - x_j)} \\ & = - \frac{1}{z - x_j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} - \sum_{i \neq j} \frac{[A_i, A_j]}{(z - x_i)(x_i - x_j)} + \sum_i \frac{[A_i, A_j]}{(z - x_i)(z - x_j)} \\ & = - \frac{1}{z - x_j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} - \sum_i \frac{[A_i, A_j]}{(x_i - x_j)(z - x_j)} \end{aligned}$$

となり, これが恒等的に消えるためには

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_j} = - \sum_{i \neq j} \frac{[A_i, A_j]}{x_i - x_j} \quad (3.2)$$

が成立する事が必要十分である．結論として, ∇ が平坦であるためには微分方程式 (3.1) 及び (3.2) が成立する事が必要十分である事が分かった．これは Schlesinger 方程式 (0.2) に他ならない．

Schlesinger 方程式の解 $A(x)$ は, 方程式 $f_x([A(x)]) = \text{const.}$ の解を与えていた． A の定める \mathcal{R} 上の多変数時間 x に依存したベクトル場を考え, これがハミルトニアンを持つ事を示そう．ここでシンプレクティック

多様体 (M, ω) 上のベクトル場 v に対しそのハミルトニアンとは、微分方程式 $dH = \iota(v)\omega$ を満たす関数 H の事をいう。さて上で主張した事を示すため、

$$N_{ij} := \begin{cases} -\frac{A_j}{x_i - x_j} & \text{if } i \neq j, \\ \sum_{k \neq i} \frac{A_k}{x_i - x_k} & \text{if } i = j \end{cases}$$

とにおいて Schlesinger 方程式を

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = [N_{ij}, A_i]$$

と書き換える。すると求めたい関数 H_j の満たす微分方程式は、(2.1) より

$$dH_j(B_1, \dots, B_n) = \sum_k \text{tr } N_{kj} B_k = \sum_{k \neq j} \frac{\text{tr } A_k B_j}{x_j - x_k} - \sum_{k \neq j} \frac{\text{tr } A_j B_k}{x_k - x_j}$$

と書かれるが、この解は容易に

$$H_j = \sum_{k \neq j} \frac{\text{tr } A_j A_k}{x_j - x_k}$$

で与えられる事が分かる。

4 量子 Schlesinger 方程式と KZ 方程式

前節において、 \mathbb{CP}^1 上の対数型接続のモノドロミー保存変形から Schlesinger 方程式を導き、またこの方程式がハミルトニアンを持つ事を示した。本節では KZ 方程式が Schlesinger 方程式とどのように関係しているかを [Har] に従って示す。

ここでは $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r, \mathbb{C})$ とする。 (a, b) 成分のみ 1, 他の成分は 0 として定める行列を E_{ab} とおく。また \mathfrak{g} 上の非退化な pairing として trace を採用する。 \mathfrak{g} は単純 Lie 環ではないが、基底 $\{E_{ab}\}$ とその双対基底 $\{E_{ba}\}$ を用いて $\Omega = \sum_{a,b} E_{ab} \otimes E_{ba}$ とすれば、KZ 方程式は全く同様に定義される。 \mathfrak{g} の表現 $(V_1, \rho_1), \dots, (V_n, \rho_n)$ を固定し、これに付随する KZ 方程式 (0.1) を考えよう。前と同様 $V := \otimes_i V_i$ とおく。各 i に対し、写像 $\tilde{\rho}_i: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$ を

$$\tilde{\rho}_i(X) := 1_{V_1} \otimes \dots \otimes \rho_i(X) \otimes \dots \otimes 1_{V_n}$$

によって定め、これを用いて $\text{End } V$ に値を持つ行列 $\tilde{A}_i \in \mathfrak{g} \otimes \text{End } V$ を

$$(\tilde{A}_i)_{ab} := \tilde{\rho}_i(E_{ab})$$

と定める。すると KZ 方程式は次のように書かれる：

$$\kappa \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \sum_{j \neq i} \frac{\text{tr } \tilde{A}_i \tilde{A}_j}{z_i - z_j} \Phi.$$

右辺の Φ に掛かっているものを \tilde{H}_i とおけば、これは前節で Schlesinger 方程式のハミルトニアンとして見出した H_i と全く同じ形をしている事が分かる。

より直接的な関係を見よう。KZ 方程式 $\kappa \partial \Phi / \partial z_i = \tilde{H}_i \Phi$ は、 \tilde{H}_i をハミルトニアンと見れば Schrödinger 方程式

$$\sqrt{-1} \hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = \tilde{H}_i \Phi$$

の形をしている。そこで対応する Heisenberg 方程式を考えよう。Schrödinger 方程式から Heisenberg 方程式への移行は、時間発展作用素 $U(z_1, \dots, z_n) \in \text{GL}(V)$ の導入によってなされる。この作用素は微分方程式

$$\kappa \frac{\partial U}{\partial z_i} = U \tilde{H}_i,$$

及びある基点 z^0 における初期条件 $U(z^0) = 1_V$ によって特徴づけられる．これによって

$$\hat{A}_i := U\tilde{A}_iU^{-1}, \quad \hat{H}_i := U\tilde{H}_iU^{-1}$$

とおく事により (\hat{A}_i の定義は, \tilde{A}_i の行列としての各成分を U で共役して定めたものと理解する), Heisenberg 方程式

$$\kappa \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial z_j} = [\hat{H}_j, \hat{A}_i]$$

が得られる．ここで E_{ab} の Lie 括弧に関する関係式から導かれる作用素関係式

$$[(\tilde{A}_i)_{ab}, (\tilde{A}_j)_{cd}] = \delta_{ij} \left((\tilde{A}_i)_{ad}\delta_{bc} - (\tilde{A}_i)_{cb}\delta_{ad} \right) \quad (4.1)$$

によって, 上の Heisenberg 方程式は容易に

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial z_j} &= \frac{[\hat{A}_i, \hat{A}_j]}{z_i - z_j} \quad (i \neq j), \\ \kappa \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial z_i} &= - \sum_{j \neq i} \frac{[\hat{A}_i, \hat{A}_j]}{z_i - z_j} \end{aligned}$$

と書き換えられる．これは Schlesinger 方程式に他ならない．

ここで Poisson 構造と呼ばれるものの復習をする． (M, ω) をシンプレクティック多様体とすると, M 上に Poisson 括弧と呼ばれる双線形写像

$$\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

が次式で定義される：

$$\{f, g\} := v_g(f), \quad (4.2)$$

ただし v_g は g をハミルトニアンとするベクトル場, すなわち $dg = \iota(v_g)\omega$ で定まるベクトル場を表す．

$$v_g(f) = df(v_g) = \omega(v_f, v_g) = -v_f(g)$$

より $\{f, g\}$ は反対称であるが, 更に次の性質をもつ：

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad (4.3)$$

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \quad (4.4)$$

このような括弧積が関数環の上に定まっている多様体を Poisson 多様体と呼ぶ．

古典力学では, 物理量の時間発展はハミルトニアンと相空間の Poisson 構造によって記述される．Dirac の量子化の手続きは, 物理量をヒルベルト空間の作用素, Poisson 括弧を作用素の Lie 括弧 (の普遍定数倍) に置き換えるというもので, この手続きによって得られる時間発展の方程式が Heisenberg 方程式であった．さて, \mathcal{R} 上のシンプレクティック構造から定まる Poisson 括弧に関してモノドロミー保存変形の A_i, A_j についての関係式を見ると, (4.1) と全く同様の式が導かれる事が分かる．この意味で, 上の Heisenberg 方程式は前節で紹介した Schlesinger 方程式の量子化と理解する事ができる．

5 まとめとおまけ

本章では [Hit2] と [Har] に従い, Schlesinger 方程式のモノドロミー保存変形としての背景, 及びその量子化と KZ 方程式が Heisenberg 描像と Schrödinger 描像の関係にある事の解説を試みた．KZ 方程式の背景はテキスト [Koh] の第 1 章で述べられており, これをそのまま紹介するというのは躊躇われたため, ここで

は述べなかった．ただしテキストではあまり述べられていない事もある．それらについて少しだけ述べて終える事にする．

共形ブロックは，コンパクト Riemann 面上の放物ベクトル束のモジュライ空間の幾何学的量子化と捉える事ができる．これについては（点が付いていない場合）[BL]，もしくはその日本語による解説 [US] を参照されたい．ここで簡単に幾何学的量子化とは何かを説明する．

(M, ω, J) をコンパクトな Kähler 多様体とする．すなわち J は M 上の複素構造であり，シンプレクティック形式 ω と次の意味で両立するものとする： $g(v, w) := \omega(Jv, w)$ は M 上の Riemann 計量となる．今コホモロジー類 $\frac{1}{2\pi}[\omega] \in H^2(M; \mathbb{R})$ が自然な包含 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ の定める準同型 $H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{R})$ の像に入っているとすれば， M 上の Hermite 直線束 L とその上のユニタリ接続 ∇ で， ∇ の曲率が $-\sqrt{-1}\omega$ となるものが存在する．このとき Kähler 構造 J に関する ∇ の $(0, 1)$ 部分は L 上の正則構造を定める．正則切断のなすベクトル空間

$$Q(M, \omega, L, J) := H^0(M; L)$$

を (M, ω) の J に関する幾何学的量子化と呼ぶ．

共形ブロックを点付き Riemann 面のモジュライ空間の上で走らせる事でベクトル束ができる．この上に定まる射影的平坦接続（種数 0 の場合は平坦接続）が KZ 接続であり，種数 0 の場合に KZ 接続に関して平坦な切断を与える微分方程式が KZ 方程式であった．一方，共形ブロック束を幾何学的量子化のなすベクトル束と捉える事で，射影的平坦接続を微分幾何的，代数幾何的に構成する事も可能である．これについては [Hit1] を参照されたい．共形ブロックを幾何学的量子化と同定する事は，多くの興味深い結果をもたらす．Verlinde の公式はその一例であるが，他にも例えば共形ブロックの性質として良く知られている分解定理も，幾何学的量子化とシンプレクティック商の操作の可換性（quantization commutes with reduction theorem と呼ばれる）と関連している [MW] ．

第2章

Jones-Witten 理論

丹下 基生

[Koh] の第 1 章では KZ 方程式を具体的に記述することで、共形ブロックを定義した。それは KZ 接続を用いることで KZ 方程式の解を接続させることができる。このとき組みひも群の共形ブロックへの表現が得られる。よってその表現を用いたリンクの位相不変量が得られるがそれが Jones 不変量であるというのが河野俊丈の主張である。ところで Witten は Chern-Simon 汎関数の分配関数から Witten 不変量を定義した。しかしここでは Witten 不変量を KZ 方程式の立場から再構成する。それは 3 次元多様体の framed link 表示を使う。この方法は Atiyah の位相的場の理論の例になっている。

この章の構成を述べる。1 節では KZ 方程式の解の接続から共形ブロックの空間に作用があることを示す。2 節ではその作用から Jones 多項式を構成する。3 節では Jones 多項式から Witten 不変量が定義されることを示す。4 節ではこれらの構成が写像類群の射影表現として捉えることで Atiyah の位相的場の理論の例とみなせることを示す。5 節では Chern-Simons 理論を曲面上の接続の空間の直線束を使うことによって Atiyah の位相的場の理論の枠組みを持つことを示す。

1 KZ 方程式と組みひも群の表現

複素ベクトル空間 \mathbb{C} 上の配置空間

$$\text{Conf}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i < j} H_{ij}$$

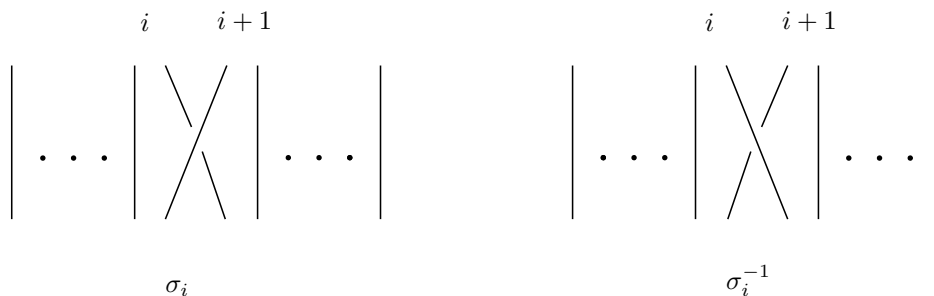
を考える。 H_{ij} は配置空間のなかで $z_i = z_j$ となる部分空間である。この $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ の基本群を純組みひも群といい、 P_n とかき、座標の入れ替えとして作用する n 次対称群 S_n の分だけ無視した基本群を単に組みひも群といい、 B_n と書く。つまり、 $Y_n := \text{Conf}_n(\mathbb{C})/S_n$ において $B_n = \pi_1(Y_n)$ である。結局ファイブレーション $S_n \rightarrow \text{Conf}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Conf}_n(\mathbb{C})/S_n$ のホモトピー完全系列から $1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$ という完全系列が成り立つ。

B_n の生成元とその関係式は次のようになる。ここで σ_i は下のように i 番目と $i+1$ 番目の紐を右ねじの法則に従って半ひねりしたものである。

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1$$

ここで配置空間 $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ の上の微分形式 ω_{ij} を次のように定める。



$$\begin{aligned}\omega_{i,j} &= d \log(z_i - z_j) \\ &= \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} \quad (i \neq j)\end{aligned}$$

これは次の関係式 (アーノルド関係式と呼ばれる) を満たす .

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{ki} \wedge \omega_{ij} = 0$$

この主張をここで確かめると次のようになる .

$$\begin{aligned}& \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} \wedge \frac{dz_j - dz_k}{z_j - z_k} + \frac{dz_j - dz_k}{z_j - z_k} \wedge \frac{dz_k - dz_i}{z_k - z_i} + \frac{dz_k - dz_i}{z_k - z_i} \wedge \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} \\ &= \frac{1}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)(z_k - z_i)} \{ (z_k - z_i)(dz_i - dz_j) \wedge (dz_j - dz_k) + (z_i - z_j)(dz_j - dz_k) \wedge (dz_k - dz_i) \\ & \quad + (z_j - z_k)(dz_k - dz_i) \wedge (dz_i - dz_j) \} \\ &= \frac{1}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)(z_k - z_i)} \{ (z_k - z_i)(dz_i \wedge dz_j - dz_i \wedge dz_k + dz_j \wedge dz_k) \\ & \quad + (z_i - z_j)(dz_j \wedge dz_k - dz_j \wedge dz_i + dz_k \wedge dz_i) + (z_j - z_k)(dz_k \wedge dz_i - dz_k \wedge dz_j + dz_i \wedge dz_j) \} \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.1}$$

前章で共形ブロックバンドルに入る KZ 接続を見たがここでは一般のリー環に対する KZ 方程式を定式化する . \mathfrak{g} を有限次元複素単純リー環とする . $\rho_j : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_j)$ ($1 \leq j \leq n$) を固定する . またその Cartan-Killing 形式による正規直交基底を $\{I_\mu\}$ とする . $\Omega = \sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$ として Ω の $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ の i, j 成分への作用

$$\Omega_{ij} = \sum_\mu 1_{V_1} \otimes \cdots \otimes \rho_i(I_\mu) \otimes \cdots \otimes \rho_j(I_\mu) \otimes \cdots \otimes 1_{V_n}$$

を考える . この作用を使って $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上の $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ に値を持つ関数 $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ に次のような KZ 方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}(p) = \frac{1}{\kappa} \sum_{j, j \neq i} \frac{\Omega_{ij}(\Phi)}{z_i - z_j}(p)$$

を立てる . ここで左辺は $p \in \text{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上の座標 z_i に対する偏微分を表す .

$$\omega := \frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Omega_{ij} \omega_{ij}$$

とおけば $d\Phi = \omega\Phi$ が成り立つ . ここで κ はある複素パラメータである . この等式をここで確かめると次のようになる .

$$\begin{aligned}d\Phi &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} dz_i \\ &= \frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{j, j \neq i} \frac{\Omega_{ij}(\Phi)}{z_i - z_j} dz_i \\ &= \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\Omega_{ij}(\Phi)}{z_i - z_j} dz_i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\Omega_{ij}(\Phi)}{z_i - z_j} dz_i \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\Omega_{ij}(\Phi)}{z_i - z_j} (dz_i - dz_j) = \omega(\Phi)\end{aligned}$$

ここで次の補題を示しておく .

補題 1.1. Ω_{ij} は次の関係式を満たす

$$(1) [\Omega_{ij} + \Omega_{jk}, \Omega_{ik}] = 0 \quad (i, j, k \text{ は全て相異なる})$$

(2) $[\Omega_{ij}, \Omega_{kl}] = 0$ (i, j, k, l は相異なる)

証明. 2. は明らかである. 1. を示す. $n = 3$ として $[\Omega_{12}, \Omega_{13} + \Omega_{23}] = 0$ を示せば十分である. $\{I_\mu\}$ をリー環上の Killing form による正規直交基底として $C = \sum_\mu I_\mu$ とおくと, C はカシミール元と呼ばれリー環上の中心元となる. このとき Δ をリー環の普遍展開環の余積とすると $\Omega = \frac{1}{2}(\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$ が成り立つ. よって $[\Delta(C), \Delta(I_\mu)] = 0$ ゆえに $[\Delta(C) \otimes 1, \sum_\mu \Delta(I_\mu) \otimes I_\mu] = 0$ がなりたつ. よって

$$[\Delta(C) \otimes 1, \sum_\mu \Delta(I_\mu) \otimes I_\mu] = [\Delta(C) \otimes 1, \Omega_{13}] + [\Delta(C) \otimes 1, \Omega_{23}]$$

さらに $C \otimes 1 \otimes 1, 1 \otimes C \otimes 1$ は Ω_{12}, Ω_{13} と可換であるからこの式は $[\Omega_{12}, \Omega_{13}] + [\Omega_{12}, \Omega_{23}] = [\Omega_{12}, \Omega_{13} + \Omega_{23}]$ である. \square

この補題を使うと次が成り立つ.

命題 1.2. 1. $\omega \wedge \omega = 0$ 2. $d\omega = 0$

証明. $\omega \wedge \omega = 0$ を証明する.

$$\omega \wedge \omega = \frac{1}{\kappa^2} \sum_{i < j, k < l} [\Omega^{(ij)}, \Omega^{(kl)}] \omega_{ij} \wedge \omega_{kl}$$

であり,

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j, k < l} [\Omega^{(ij)}, \Omega^{(kl)}] \omega_{ij} \wedge \omega_{kl} \\ &= \sum_{i < j < k} \left([\Omega^{(ij)} + \Omega^{(jk)}, \Omega^{(ik)}] \omega_{ij} \wedge \omega_{kl} \right. \\ & \quad \left. + [\Omega^{(ij)} + \Omega^{(ik)}, \Omega^{(jk)}] \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} \right) \\ & \quad + \sum_{\{i,j\} \cap \{k,l\}} [\Omega^{(ij)}, \Omega^{(kl)}] \omega_{ij} \wedge \omega_{kl} \end{aligned}$$

のように計算でき, 前の補題を用いればこの値は 0 がわかる. また $d\omega = 0$ は $\omega_{ij} = d \log(z_i - z_j)$ が成り立つことから分かる. よって $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ が成り立つ. \square

よって底空間を $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ としてファイバーを $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ となる全空間に平坦接続 $\nabla = d - \omega$ を定めることができた. ゆえに ∇ のホロノミー表現として純組みひも群 P_n の線形表現

$$\theta : P_n \rightarrow \text{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n)$$

が得られる. この表現をリー環 \mathfrak{g} とその表現に付随する KZ 方程式のモノドロミー表現という. また $V_1 = V_2 = \cdots = V_n = V$ として, 自明束 $\text{Conf}_n(\mathbb{C}) \times V^{\otimes n} \rightarrow \text{Conf}_n(\mathbb{C})$ 上への n 次対称群の作用で割ることによって Y_n 上のあるベクトル束 F を構成できる. このとき誘導された接続 ∇ は組みひも群の表現

$$\theta : B_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$$

を得る.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 上のレベル k の表現とする. \mathbb{CP}^1 上の相異なる 4 点 $p_1, p_2, p_3, p_4 = \infty$ 上にレベル k の最高ウェイト $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^*$ を与えてその場合の共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\mathfrak{p}, \lambda)$ を考える. 一章からこの共形ブロックは不変テンソル空間

$$V_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^{\lambda_4} = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3}, V_{\lambda_4})$$

に埋め込まれる．ここで p_i の座標を z_i として KZ 方程式は平行移動で不変なので $z_1 = 0$ としてよい．さらに座標変換 $z_2 = u_1 u_2, z_3 = u_2$ を施すことによって $u_1 = u_2 = 0$ のまわりで ω が次のように展開できる．

$$\omega = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\Omega_{12} du_1}{u_1} + \frac{(\Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{23}) du_2}{u_2} + \omega_1 \right)$$

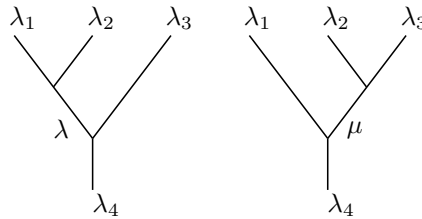
ここで ω_1 は $u_1 = u_2 = 0$ の近くで正則な微分形式である．このとき $\frac{1}{\kappa} \Omega_{12}, \frac{1}{\kappa} (\Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{23})$ の作用が下の図の左の形の共形ブロック基底によって同時対角化されている．その固有値は $\Delta_\lambda - \Delta_{\lambda_1} - \Delta_{\lambda_2}, \Delta_{\lambda_4} - \Delta_{\lambda_1} - \Delta_{\lambda_2} - \Delta_{\lambda_3}$ となる．実際，以前用いた関係式 $\frac{1}{2} \Omega = \frac{1}{2} (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$ と前章の知識から導ける公式 ($u \in V_\lambda$ に対して $\frac{1}{2\kappa} C \cdot u = \Delta_\lambda u$) を繰り返し使うことによって固有値を計算することができる． $\frac{1}{\kappa} (\Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{23})$ の作用も同時に計算できる．

同じように右の形の基底に関する $\frac{1}{\kappa} \Omega_{23}, \frac{1}{\kappa} (\Omega_{12} + \Omega_{13} + \Omega_{23})$ の固有値は $\Delta_\mu - \Delta_{\lambda_2} - \Delta_{\lambda_3}, \Delta_{\lambda_4} - \Delta_{\lambda_1} - \Delta_{\lambda_2} - \Delta_{\lambda_3}$ である．

これによって KZ 方程式の解は局所的に ($u_1 = u_2 = 0$ の周りで) 次のようになる．

$$u_1^{\Delta_\lambda - \Delta_{\lambda_1} - \Delta_{\lambda_2}} u_2^{\Delta_{\lambda_4} - \Delta_{\lambda_1} - \Delta_{\lambda_2} - \Delta_{\lambda_3}} h_\lambda(u_1, u_2) \mathbf{p}_\lambda$$

ここで $h(u_1, u_2)$ は 1 価正則関数で $\{\mathbf{p}_\lambda\}$ は共形ブロック空間の指定された基底である．



$n = 4$ の場合には自然な基底が 5 つ存在する．次に，KZ 方程式を使って岩堀-ヘッケ環の表現を得ることを示す．まず実軸上 $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n$ を考える．その上に $A_1^{(1)}$ 型のアフィン Lie 環のレベル k の最高ウェイト $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を対応させる．また $p_0 = 0, p_{n+1} = \infty$ となるようにとっておき，これらには最高ウェイト $\lambda_0 = 0, \lambda_{n+1} = 0$ を対応させる．よって $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ と $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}^*)$ に対して共形ブロックの空間 $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \lambda)$ を不変テンソル空間 $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\otimes_{i=1}^n V_{\lambda_i}, \mathbb{C})$ このとき共形ブロックの空間を $V_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ とおくと同じようにしてホロノミー表現から次のような表現

$$\rho(\sigma_i) : V_{\lambda_1, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \lambda_n} \rightarrow V_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i, \lambda_n}$$

が構成できる．ここで σ_i は始めに与えた組みひも群の標準的な生成元とする． $\rho(\sigma_i)$ の作用は $P_{i,i+1} \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{\kappa} \Omega_{i,i+1})$ である．ここで $P_{i,i+1}$ は λ_i, λ_{i+1} に対するテンソルの成分の入れ替えの作用とする．

次にリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ としたときにその表現 $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_n}$ を 2 次元既約表現とする．このとき組みひも群の生成元 σ_i の $V_1 \otimes V_1$ への作用の特性多項式を計算する．その多項式は表現空間が $V_0 \oplus V_2$ という既約分解を持つため 2 次多項式である．よってその固有値を計算すればよい．まず Ω の $V_1 \otimes V_1$ への作用を考える． Ω はカシミール元 C を用いて $\Omega = \frac{1}{2} (\Delta C - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$ と表され， C の V_λ への作用はスカラー倍でありその値は $2j(j+1)$ である．ここで $(\lambda = 2j)$ ．よって Ω の V_0 の成分への作用は $-\frac{3}{2}$ で， V_2 への作用は $\frac{1}{2}$ である．よって $\rho(\sigma_i)$ の作用は $\exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{\kappa} \Omega_{i,i+1})$ であるから，その固有値はそれぞれ $q^{-\frac{3}{4}}, q^{\frac{1}{4}}$ である．また V_0, V_2 は P_{12} の固有空間分解でそれぞれ交代，対称テンソル空間だから $\rho(\sigma_i)$ の固有値はそれぞれ $-q^{-\frac{3}{4}}, q^{\frac{1}{4}}$ となる．全体に $\eta = q^{\frac{1}{4}} = \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\kappa})$ をかけて $g_i := \eta \rho(\sigma_i)$ とおいて整理すると

$$(g_i - q^{\frac{1}{2}})(g_i + q^{-\frac{1}{2}}) = 0$$

という岩堀-ヘッケ代数の関係式を満たす．岩堀ヘッケ代数は

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$T_i T_j = T_j T_i \quad |i - j| > 1$$

$$(T_i - q^{\frac{1}{2}})(T_i + q^{-\frac{1}{2}}) = 0$$

という関係式を満たす非可換代数であり $H_n(q)$ とかく。

定理 1.3. $sl_2(\mathbb{C})$ とその 2 次元既約表現からくる KZ 方程式のモノドロミーとして得られる組みひも群の表現は岩堀ヘッケ代数の表現を与える。

この事実を $sl_m(\mathbb{C})$ の m 次元表現に一般化することができる。

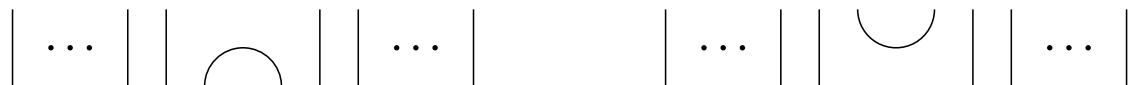
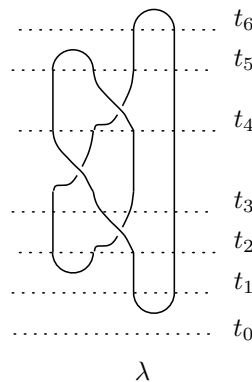
またこの組みひも群 B_n の表現は n 点の近傍の境界を固定する球面上の写像類群 $\mathcal{M}_{0,n}$ の作用に拡張することができる。またその境界 C_j に関するデーンの左ひねりはスカラー $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\Delta_j)$ の作用になる。このデーンのひねりの作用によってフレミングをつけた結び目の不変量として Jones 多項式を考えることになる。

2 共形場理論と Jones 多項式

この章では今までの構成を使って Jones 多項式という結び目の不変量を得る。まず結び目とは 3 次元球面の中に滑らかに埋め込まれたいくつかの S^1 の disjoint union のことである。また、結び目 L_1 と L_2 が S^3 上の恒等写像とイソトピックな微分同相写像 h によって $h(L_1) = L_2$ となるとき L_1 と L_2 を ambient isotopic といい同じ結び目とみなす。また成分が 1 つだけの結び目を結び目という。また結び目のフレーミングとは、結び目のそれぞれの成分の法バンドルの自明化のことで、一般に成分ごとに整数として与えられる。それは法方向に移動させた結び目の絡み数のことだともいえる。

次に n 成分の結び目 L の各成分にアフィンリー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の最高ウェイト $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を対応させる。さらに結び目のある射影図を図のように隣り合うレベルを基本タングルとして輪切りをする。ここで極大点と極小点は孤立しているとする。この縦軸を時刻だと思って輪切りした時間座標を順に t_0, t_1, \dots, t_s とおく。

次に各 t_j で輪切りをした平面とその結び目の交点の組を平面上の点に対応する最高ウェイト表現を乗せたレベル k のリー環の表現が対応しているとみなす。ただし今の絵で結び目の向きが下向きであれば λ で上向きであれば λ^* の表現を乗せる。また平面上の $0, \infty$ では最高ウェイト 0 の表現を乗せる。



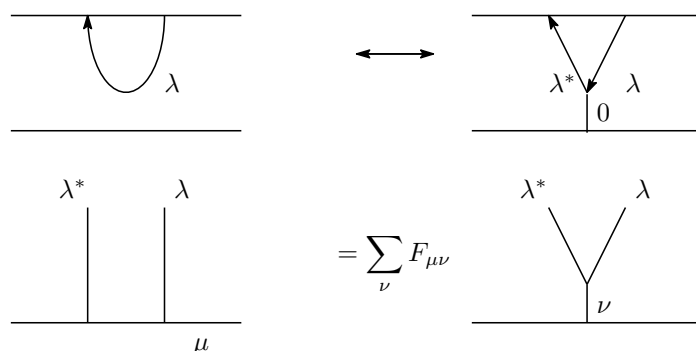
極大点のある基本タングル

極小点のある基本タングル

これで各 t_j にある共形ブロックを対応させることができた。その共形ブロックを一章で定義した不変テンソル空間に埋め込んでおく。その像を $V(t_j)$ とする。ブレイドからくる基本タングルには以前の表現

$$Z_j : V(t_j) \rightarrow V(t_{j+1})$$

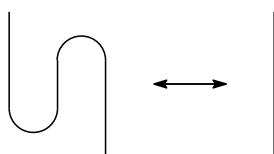
を対応させる．また極小点，極大点に関しては図のようにグラフにしておいてそれをさらに下の図のような接続行列を用いて展開することで求められる．



これらの線形写像を

$$Z(L : \lambda_1, \dots, \lambda_m) := Z_{s-1} \circ \dots \circ Z_0(1)$$

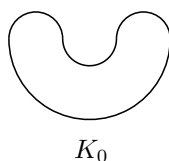
のように合成することによってある複素数を対応させることができる．またこの数は KZ 方程式の平坦性からリンクを時刻の座標を保つようなイソトピーによって移動させても不変であるが図のように臨界点をキャンセルする操作では不変ではない．



そのためその補正として K_0 を図のように射影した自明な結び目として

$$d(\lambda) = Z(K_0 : \lambda)^{-1}$$

を考える．



臨界点のキャンセルで起こるこの $Z(L : \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ の変化は K_0 に対する Z の値だけずれることから

$$J(L : \lambda_1, \dots, \lambda_m) := d(\lambda_1)^{\mu_1} d(\lambda_2)^{\mu_2} \dots d(\lambda_m)^{\mu_m} Z(L; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

と補正することによって J がリンクの射影図によらない不変量となることが分かる．ここで μ_i をリンク L_i の極大点の個数とする．この不変量では絡み目 L の各成分に番号付けされていることに注意する．よって次が成り立つ．

定理 2.1. $J(L, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ はリンク L とそのフレーミング，またリンクの番号づけに関する位相不変量である．

ここで全ての絡み目の成分に $\lambda = 1$ を共通しておくことによって得られる不変量 $J(L, 1, 1, \dots, 1)$ を J_L とかく．さらに

$$P_L = d(1)^{-1} \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Delta_1 w(L)) J_L$$

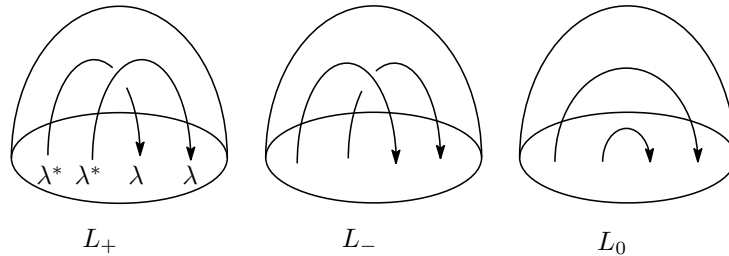
とおく．ここで $w(L)$ は正の交点から負の交点を引いた数 (writhe) とする．このとき P_L はフレーミングによらないリンクの不変量になる．さらに $q^{\frac{1}{2}}$ に $-t^{-\frac{1}{2}}$ を代入したものは t を変数とするジョーンズによって作用素環の理論から作られたリンクの不変量 (Jones 多項式) と一致する．一般にレベルを増やしたときには

Colored Jones 多項式と呼ばれる不変量が導き出される．この一致は次のようなスケイン関係式とよばれる関係式からくる．

$$q^{\frac{1}{4}}J_+ - q^{-\frac{1}{4}}J_{L_-} = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})J_{L_0}$$

この関係式が一致することと自明結び目が不変量 P で 1 であることから分かる．

この関係式は局所的に図のような結び目の最高ウェイトが順に $\lambda, \lambda, \lambda^*, \lambda^*$ となるようなリーマン球面上の共形ブロックの空間は 2 次元である．



またこの絡み目 L_0, L_+, L_- に対応する共形ブロックの線形写像が得られるが 2 次元空間の中の 3 つのベクトルの間にある線形関係式が存在する．それがスケイン関係式と考えることができる．

次にケーブリングによる不変量の変化を見る．ケーブリングとは結び目 $K = K_0$ とそのフレミングに対してそのフレミングに沿って K を平行移動させた結び目を K_1 として絡み目 $K_0 \cup K_1$ を K のケーブリングという．このリンクには同じフレミングを入れておく．一般に次が成り立つ．

定理 2.2.

$$J(K_0 \cup K_1 : \lambda, \mu) = \sum_{\nu} N_{\lambda\mu}^{\nu} J(K : \nu)$$

ここでこの係数 $N_{\lambda\mu}^{\nu}$ はフュージョン代数 R_k の構造定数である．

またケーブリングした絡み目の不変量は元の結び目の $sl_2(\mathbb{C})$ のテンソル表現に付随してできた不変量と同じものである．

この定理から $J(L, \cdot)$ はフュージョン代数 R_k のテンソル積 $R_k^{\otimes m}$ 上の関数とみなせる．その生成元と最高ウェイトを同一視し、生成元の積 $v_{\lambda} \cdot v_{\mu} \in R_k$ に対してはその成分をケーブル化してそのそれぞれの成分に最高ウェイト λ, μ を乗せて不変量を構成したものと定義すれば、ケーブル化の操作を何回か繰り返すことによって

$$J(L, \cdot) : R_k^{\otimes m} \rightarrow \mathbb{C}$$

を定義できる．またケーブリングを繰り返して絡み目の成分を増やせば最高ウェイトが 1 となる不変量に帰着させることができる．つまり $J(L, \cdot)$ の計算はある絡み目たちのジョーンズ多項式の計算に帰着するのである．

一般に閉じていないリンクで時刻の両端でその端が残っているもの(タングル)を考える．端の点が m 点と n 点のものを (m, n) タングルという．フレーム付けられたある (m, n) タングル T に対して

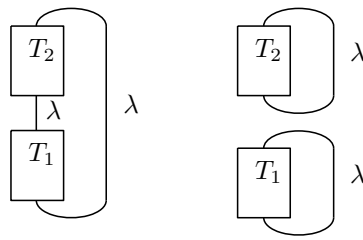
$$J(T, \lambda) : V_{\mu_1, \dots, \mu_m} \rightarrow V_{\nu_1, \dots, \nu_n}$$

という線形作用素を得る．このとき次の命題が成り立つ．

命題 2.3. T を $(1, 1)$ タングルとする． T の端の点を自明につなげてできるリンクを \hat{T} とかく． T_1, T_2 を任意の $(1, 1)$ -タングルとすると、

$$J(\widehat{T_1 \circ T_2}) = J(\hat{T}_1)J(\hat{T}_2) \frac{S_{00}}{S_{0\lambda}}$$

が成り立つ． λ は図のようなある結び目の最高ウェイトを表す．



この命題は後に使われる .

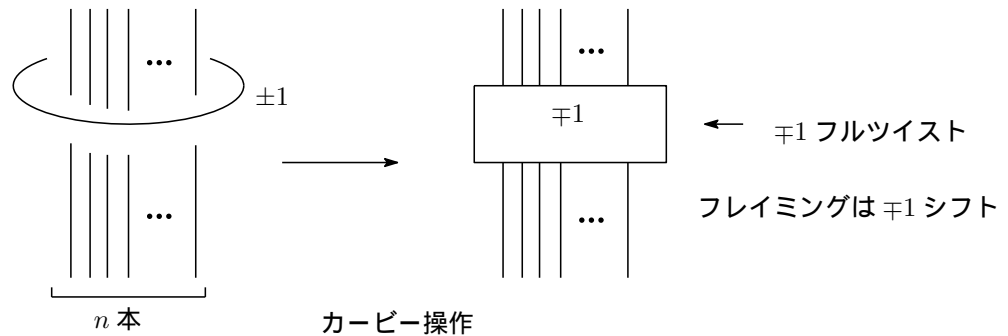
3 3次元多様体の Witten 不変量

この章では E.Witten によって Chern-Simons ゲージ理論を用いて提唱された Chern-Simons(Witten) 不変量を共形場理論の立場から構成する . ます

定理 3.1. 任意の 3 次元多様体はあるフレーム付けられたリンクのデー手術で得られる .

ここでフレーム付けられたリンクのデー手術とは 3 次元球面のその指定されたリンクの管状近傍を取り除き , その代わりとして $S^1 \times D^2$ をそのフレミングに沿って張り戻す操作である . またそのフレームドリリンクの表示の一意性に関する次の事実が成り立つ .

定理 3.2. ある二つのフレームドリリンクが同じ 3 次元多様体を表すための必要十分条件はそのリンクが , 下のカービー操作と呼ばれるリンクの何回かの変形とイソトピーで移りあうかどうかである .



ここで不変量 $J(L)$ を用いた 3 次元多様体を定義しその位相不変性を記述しておく . その中で使われる記号については後に解説する .

定理 3.3. M をコンパクト閉で向き付けられた 3 次元多様体とする . M のフレームドリリンク表示を L とする . このとき

$$Z_k(M) := S_{00} C^{\sigma(L)} \sum_{\lambda} S_{0,\lambda(1)} \cdots S_{0,\lambda(m)} J(L : \lambda(1), \dots, \lambda(m))$$

は 3 次元多様体の不変量である . ここで \sum_{λ} はウェイトの対応 $\lambda : \{1, \dots, m\} \rightarrow P_+(k)$ 全てに関する和をとる .

この不変量の位相不変性は上の 2 つの定理からカービーの操作で変わらないことを示せばよいことが分かる . ます不変量の中で使われる記号でこれまで説明しなかったものについてまとめる .

リー環 \mathfrak{g} を $sl_2(\mathbb{C})$ とする . そのアフィンリー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の最高ウェイトの集合を $P_+(k) = \{0, 1, \dots, k\}$ とする . よって最高ウェイト $\lambda \in P_+(k)$ の既約表現 \mathcal{H}_{λ} が対し \mathcal{H}_{λ} への菅原形式による Virasoro 代数の作用がありその中心の固有値は $c = \frac{3k}{k+2}$ であり , ここで $C := \exp(2\pi\sqrt{-1}\frac{c}{24})^{-3}$ とおく . フレームドリリンク L

に対してその絡み行列 A を $(L_i \cdot L_j)$ として定義をする. $L_i \cdot L_j$ ($i \neq j$) を二つの結び目の絡み数で $L_i \cdot L_i$ は結び目 L_i のフレミングとする. この対称行列 A の符号数 (正の固有値の数 - 負の固有値) を $\sigma(L)$ とかく.

また $A_1^{(1)}$ 型アフィンリー環の指標 χ_λ を用いて次の公式が Kac-Peterson によって得られている.

$$\chi_\lambda(S(\tau)) = \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \chi_\mu(\tau)$$

$$\chi_\lambda(T(\tau)) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda - \frac{c}{24}))\chi_\lambda(\tau)$$

ここで $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}, T(\tau) = \tau + 1$ であり群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元であり, S, T は $S^2 = (ST)^3 = I$ という関係式を満たす. また $S_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \frac{(\lambda+1)(\mu+1)\pi}{k+2}$ かつ $\Delta_\lambda = \frac{\lambda(\lambda+2)}{4(k+2)}$ である. 次に不変量の構成のためのいくつかの公式を計算しておく.

補題 3.4. 次の関係式が満たされる.

$$C \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} S_{\mu\nu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu + \Delta_\nu)) = S_{\lambda\mu}$$

証明. Kac-Peterson による torus 上の共形ブロックの基底としてアフィンリー環の指標 $\chi_\lambda(\tau)$ を次のように計算するゆえに

$$\begin{aligned} \chi_\lambda((ST)^2(\tau)) &= \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \chi_\mu(T(ST)(\tau)) \\ &= \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\mu - \frac{c}{24}))\chi_\mu(ST(\tau)) \\ &= \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\mu - \frac{c}{24})) \sum_{\nu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\nu - \frac{c}{24})) S_{\mu\nu} \chi_\nu(\tau) \\ &= \sum_{\mu\nu} S_{\lambda\mu} S_{\mu\nu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\mu + \Delta_\nu - \frac{c}{12}))\chi_\nu(\tau) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \chi_\lambda((T^{-1}S^{-1})(\tau)) &= \exp(-2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda - \frac{c}{24}))\chi_\lambda(S(\tau)) \\ &= \exp(-2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda - \frac{c}{24})) \sum_{\nu} S_{\lambda\nu} \chi_\nu(\tau) \end{aligned}$$

この2つの等式から

$$\sum_{\mu\nu} S_{\lambda\mu} S_{\mu\nu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu + \Delta_\nu - \frac{c}{8}))\chi_\nu(\tau) = \sum_{\nu} S_{\lambda\nu} \chi_\nu(\tau)$$

が成り立ち, $\chi_\nu(\tau)$ はトーラス上の共形ブロックの空間の基底だから

$$\sum_{\mu} S_{\lambda\mu} S_{\mu\nu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu + \Delta_\nu - \frac{c}{8})) = S_{\lambda\nu}$$

C の定義から命題が成り立つ. □

次にホップリンクの J を計算しておく.

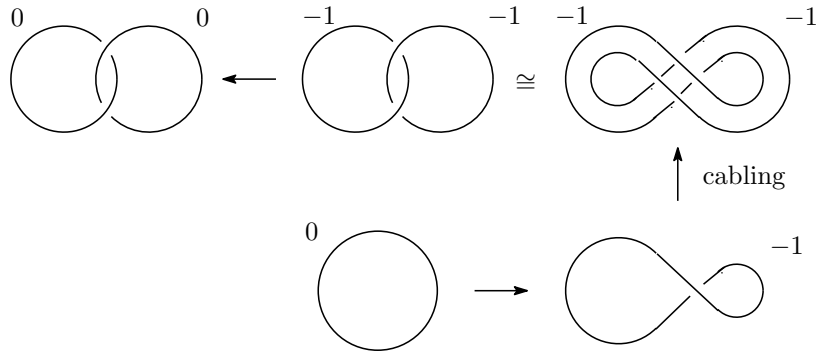
命題 3.5. ホップリンク H (ただしフレミングはどちらの成分も 0 とする) の 2 つの成分にレベル k の最高ウェイト λ, μ を与えたものの J は次である. このとき

$$J(H : \lambda, \mu) = \frac{S_{\lambda\mu}}{S_{00}}$$

である.

証明. ホップリンクで成分が -1 同士のを H' とする. ケープリングの公式と Verlinde の公式から

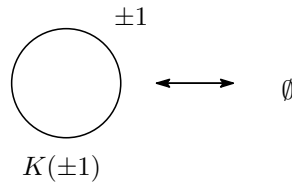
$$\begin{aligned}
 J(H; \lambda, \mu) &= \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu))J(H'; \lambda, \mu) \\
 &= \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu)) \sum_\nu N_{\mu\nu}^\nu J(K(-1); \nu) \\
 &= \frac{1}{S_{00}} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu)) \sum_\nu N_{\mu\nu}^\nu \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Delta_\nu) S_{0\nu} \\
 &= \frac{1}{S_{00}} \sum_{\alpha, \nu} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu - \Delta_\nu)) \frac{S_{\alpha\lambda} S_{\alpha\mu} S_{\alpha\nu} S_{0\nu}}{S_{0\alpha}} \\
 &= \frac{1}{S_{00}} \sum_\alpha \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu + \Delta_\alpha)) \frac{S_{\alpha\lambda} S_{\alpha\mu}}{S_{0\alpha}} \sum_\nu S_{0\nu} S_{\nu\alpha} \exp(-2\pi\sqrt{-1}(\Delta_0 + \Delta_\nu + \Delta_\alpha)) \\
 &= \frac{1}{S_{00}} \sum_\alpha \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu + \Delta_\alpha)) \frac{S_{\alpha\lambda} S_{\alpha\mu}}{S_{0\alpha}} C S_{0\alpha} \\
 &= \frac{1}{S_{00}} \sum_\alpha \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\lambda + \Delta_\mu + \Delta_\alpha)) S_{\alpha\lambda} S_{\alpha\mu} C \\
 &= \frac{S_{\lambda\mu}}{S_{00}}
 \end{aligned}$$



□

次に Z_k の位相不変性の証明のスケッチをする .

証明. カービーの操作によって $Z_k(M)$ が不変であることを言えばよい . この操作で貫いているリンクの数 n が 0 の場合をまず示す . つまりフレミング ± 1 の自明結び目を disjoint に挿入する操作である . リンク L' の $m+1$ 番目がそのような自明結び目 $K(\pm 1)$ とし , そのような結び目を取り除いたリンクを L とする .



ここで 3 次元多様体 M がフレミングリンク L から得られたことを M_L によって示すことにする . 以前の $J(L; \lambda(1), \dots, \lambda(m))$ の公式から

$$J(L'; \lambda(1), \dots, \lambda(m), \lambda(m+1)) = J(L; \lambda(1), \dots, \lambda(m))J(K(\pm 1); \lambda(m+1))$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} J(K(\pm 1); \mu) &= \exp(\pm 2\pi\sqrt{-1}\Delta_\mu) J(K(0); \mu) \\ &= \exp(\pm 2\pi\sqrt{-1}\Delta_\mu) \frac{S_{0\mu}}{S_{00}} \end{aligned}$$

フレイミングが +1 の場合は補題 3.4 で $\lambda = \nu = 0$ とおくことによって

$$C \sum_{\mu} \exp(2\pi\sqrt{-1}\Delta_\mu) \frac{S_{0\mu}^2}{S_{00}} = 1$$

となり $Z_k(M_{L'}) = Z_k(M_L)$ となる. フレイミングが -1 の場合は複素共役をとった

$$\bar{C} \sum_{\mu \in P_+(k)} \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Delta_\mu) \frac{S_{0\mu}^2}{S_{00}} = 1$$

を用いることで同じように証明できる.

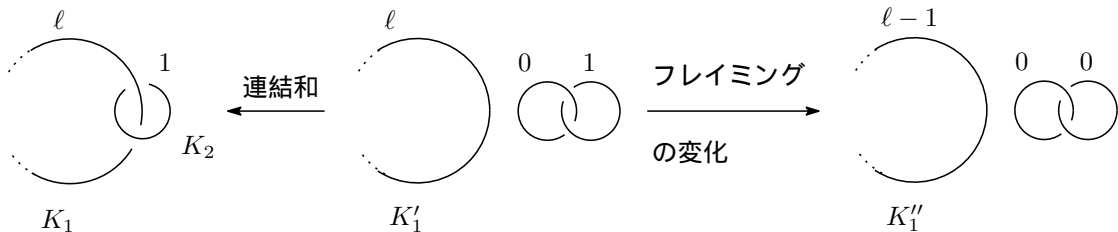
次に $n = 1$ とする. ここで得られる多様体の表示が 2 成分のリンク $K_1 \cup K_2$ で描けた場合に制限して証明する. ここで K_1, K_2 のフレイミングはそれぞれ $\ell, 1$ とする. 一般の場合も全く同じである.

$$\begin{aligned} Z_k(M_{K_1 \cup K_2}) &= S_{00} C^{\sigma(K_1 \cup K_2)} \sum_{\lambda, \mu} S_{0\lambda} S_{0\mu} J(K_1 \cup K_2; \lambda, \mu) \\ &= S_{00} C^{\sigma(K_1 \cup K_2)} \sum_{\lambda, \mu} S_{0\lambda} S_{0\mu} J(K'_1; \lambda) \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\mu)) \frac{S_{00}}{S_{0\lambda}} \frac{S_{\lambda\mu}}{S_{00}} \\ &= S_{00} C^{\sigma(K_1 \cup K_2)} \sum_{\lambda, \mu} S_{0\lambda} J(K'_1; \lambda) \exp(2\pi\sqrt{-1}(\Delta_\mu)) \frac{S_{0\mu} S_{\lambda\mu}}{S_{0\lambda}} \\ &= S_{00} C^{\sigma(K_1 \cup K_2) - 1} \sum_{\lambda, \mu} S_{0\lambda} J(K''_1; \lambda) \exp(2\pi\sqrt{-1}(-\Delta_\lambda)) \\ &= S_{00} C^{\sigma(K''_1)} \sum_{\lambda} S_{0\lambda} J(K''_1; \lambda) \\ &= Z_k(M_{K''_1}) \end{aligned}$$

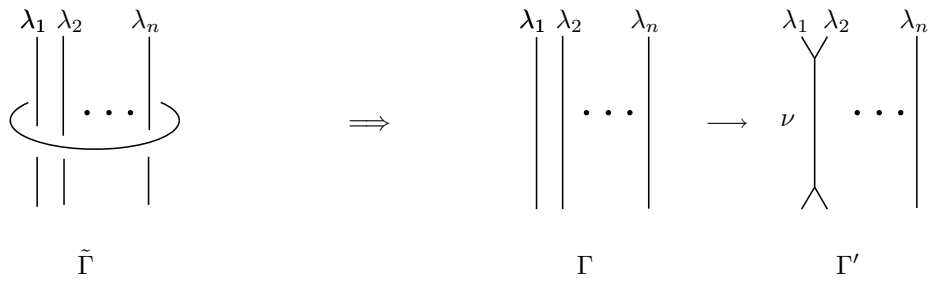
ここで Proposition 3.4 の $\nu = 0$ として得られる式

$$\sum_{\mu} \frac{S_{0\mu} S_{\lambda\mu}}{S_{0\lambda}} \exp(2\pi\sqrt{-1}\Delta_\mu) = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\Delta_\lambda) C^{-1}$$

とホップリンクの公式と以前紹介した (1, 1) タングル作用素の合成に関する積公式を使った.



一般の n の場合はその帰納法で証明する. そのためにケーブリングの公式を使って図のように 2 つの string を 1 つにまとめることによって $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ として, $J(\Gamma, \lambda) = \sum_{\nu} N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\nu} J(\Gamma', \lambda, \nu)$ と計算し, $n - 1$ の場合に帰着させればよい.



□

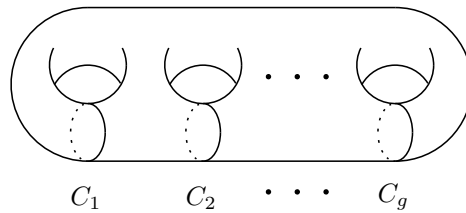
4 写像類群の射影表現と位相的場の理論

この章では $(2 + 1)$ 次元位相的場の理論を用いて $Z_k(M)$ を定義する．一般に $(d + 1)$ 次元位相的場の理論とは d 次元多様体の集合を対象とし 2 つのそのような多様体間の $d + 1$ 次元のコボルディズムを射とした圏から複素ヒルベルト空間を対象としその間の線形写像を射とした圏へのファンクターのことである．このとき d 次元多様体 Σ に対応するある線形空間 Z_Σ とのその間の内積が自然に定義される．また $d + 1$ 次元多様体 Y を二つの部分で切り分けて $Y = Y_- \cup_\Sigma Y_+$ としたときに境界 Σ をもつ 2 つの多様体 Y_-, Y_+ はそれぞれ Z_Σ 上のベクトルと双対空間のベクトルを定める．それは Y_+ の定める Σ の向きが Y_- のそれと逆であるからである．これを $Z(Y_-), Z(Y_+)$ を書き，内積を使って

$$Z(Y) := \langle Z(Y_+), Z(Y_-) \rangle$$

を定義することができる．これは位相的場の理論から Y の位相不変量になる．

実際に Jones-Witten 理論をこのような枠組みで捉える方法について記述する．まず種数 g の閉曲面を Σ とし，それに対応する複素線形空間 V_Σ を次のように構成する．そのために Σ を種数 g のハンドルボディ V の境界として捉え，ディスクを V の内部に含まれるように曲線 C_1, \dots, C_g を Σ 上に選ぶ．



その曲線に沿って Σ を切り開き，その切り口 C_i に互いに双対になるようにレベル k の最高ウェイトを $\lambda_1, \lambda_1^*, \dots, \lambda_g, \lambda_g^*$ と乗せる．つまり種数 0 の曲面の実軸上の $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{2g}$ に最高ウェイトを $\lambda_1, \lambda_1^*, \dots, \lambda_g, \lambda_g^*$ を乗せた状態である．さらに原点には \mathcal{H}_0 ，無限遠点には \mathcal{H}_0^* を乗せる．またこのとき得られる共形ブロックの空間を不変テンソル空間に埋め込んだ像を $V_{\mu_1 \mu_1^* \dots \mu_g^*}$ とかく．ここで

$$V_\Sigma = \bigoplus_{\mu_1, \mu_1^*, \dots, \mu_g^* \in P_+(k)} V_{\mu_1 \mu_1^* \dots \mu_g^*}$$

として複素線形空間を定義する．このとき

定理 4.1.

$$\dim(V_\Sigma) = \sum_{\lambda \in P_+(k)} \frac{1}{S_{0\lambda}^{2g-2}}$$

証明

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu \in P_+(k)} S_{0\mu}^2 &= \frac{2}{k+2} \sum_{\mu \in P_+(k)} \sin^2 \frac{(\lambda+1)(\mu+1)\pi}{k+2} \\
 &= \frac{1}{k+2} \sum_{\mu \in P_+(k)} \left(1 - \cos \frac{2(\lambda+1)(\mu+1)\pi}{k+2}\right) \\
 &= \frac{k+1}{k+2} - \sum_{\mu \in P_+(k)} \frac{q^{\mu+1} + q^{-\mu-1}}{2} \quad \left(q := \exp\left(\frac{(\lambda+1)}{k+2} 2\pi\sqrt{-1}\right)\right) \\
 &= \frac{k+1}{k+2} - \sum_{m=1}^{k+1} \frac{q^m + q^{-m}}{2} = \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{k+2} = 1
 \end{aligned}$$

ゆえに $sl_2(\mathbb{C})$ の既約表現はその双対表現と同型であるから

$$\begin{aligned}
 \dim(V_\Sigma) &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_g \in P_+(k)} \sum_{\lambda \in P_+(k)} \frac{S_{0\mu_1}^2 S_{0\mu_2}^2 \cdots S_{0\mu_g}^2}{S_{0\lambda}^{2g-2}} \\
 &= \sum_{\lambda \in P_+(k)} \frac{1}{S_{0\lambda}^{2g-2}} \sum_{\mu_1 \in P_+(K)} S_{0\mu_1}^2 \sum_{\mu_1 \in P_+(K)} S_{0\mu_1}^2 \cdots \sum_{\mu_g \in P_+(K)} S_{0\mu_g}^2 \\
 &= \sum_{\lambda \in P_+(k)} \frac{1}{S_{0\lambda}^{2g-2}}
 \end{aligned}$$

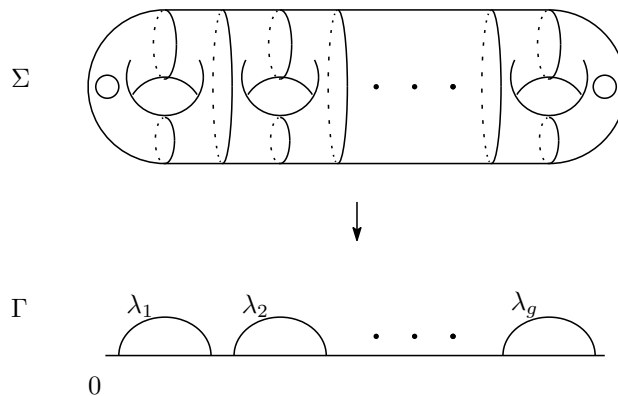
□

この空間を使った Witten 不変量の位相的場の理論を考え、その上の写像類群の $GL(V_\Sigma)$ への射影表現

$$\rho : \mathcal{M}_g \rightarrow GL(\Sigma)$$

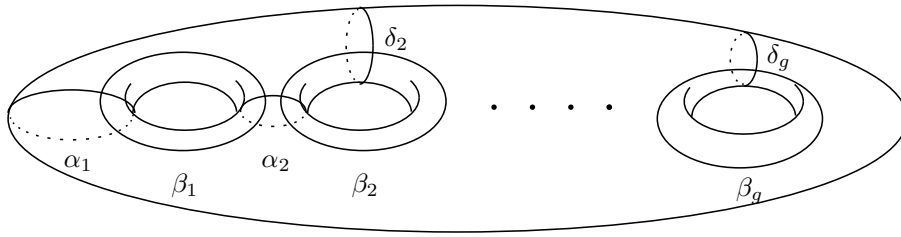
を次のように構成することを使って 3 次元多様体の不変量を構成する。

3 次元多様体を 2 つのハンドルボディをある写像類群の元で貼り付けることによって構成する。それを Heegaard 分解といい任意の 3 次元多様体はそのような分解を持つ。そのとき片方任意のハンドルボディから図のように作られるグラフ Γ を考え、その各辺の上に最高ウェイト λ_i をおく。



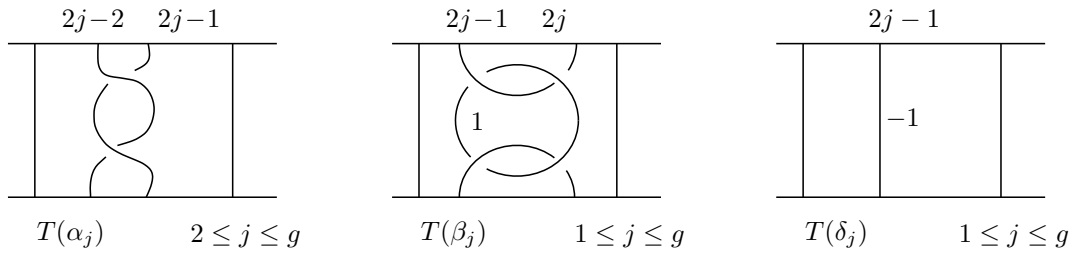
またその写像類群の元を次に定義する 2 つのグラフの間のタンブルとして対応させる方法をみる。

写像類群の任意の元 h のリコリッシュの生成元を使って書き表す。書き表す方法はどれでもよい。その生成元とは次の $\alpha_i, \beta_k, \delta_l$ である。ただし $(2 \leq i \leq g), (1 \leq k \leq g), (1 \leq l \leq g)$ である。それらは下の図にある種数 g の曲線に沿ったデーツイストを表す。



写像類群のリコリッシュの生成元

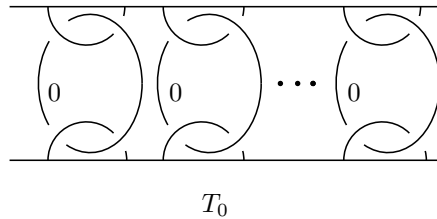
また逆元はその mirror image を表す . この生成元に対して図のようなタングルを対応させる .



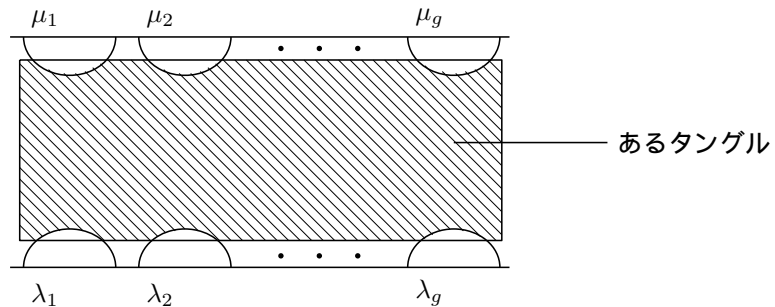
そして写像類群の任意の元 $h = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k}$ (ここで x_i は上の生成元のどれかで , $\epsilon_i = \pm 1$) に対して

$$T(h) = T_0 \circ T(x_1^{\epsilon_1}) \circ \cdots \circ T(x_k^{\epsilon_k})$$

と定義する .



このように T を定義することによって隣同士の点 $2i - 1, 2i$ はある arc でつながっている . よって下のよう
に Γ_1 と Γ_2 の間のタングルを得る .



また , タングルは $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ によって考えていることにしてそのタングルを次の 3 つのものに分割する .

$$E^0(h) := \{\gamma; \partial\gamma \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}\}$$

$$E^1(h) := \{\gamma; \partial\gamma \subset \mathbb{R}^2 \times \{1\}\}$$

$$L(h) := \{\gamma; \partial\gamma = \emptyset\}$$

このとき次の線形写像

$$\rho(h) : V_\Sigma \rightarrow V_\Sigma$$

を次で定義する． $u \in V_{\lambda_1, \lambda_1^*, \dots, \lambda_g^*}$, $v \in V_{\nu_1, \nu_1^*, \dots, \nu_g^*}$ をとる．ここで $L(h) = L_1 \cup \dots \cup L_m$ の成分への最高ウェイト (カラー) の選択 $\mu : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow P_+(k)$ に対して前節での線形写像 $J(T(h), \mu) : V_\Sigma \rightarrow V_\Sigma$ を使って

$$\langle v, \rho(h)u \rangle = \sqrt{S_{0\lambda_1} \cdots S_{0\lambda_g}} \sqrt{S_{0\nu_1} \cdots S_{0\nu_g}} \sum_{\nu} C^{\text{sgn}(L)} S_{0\mu(1)} \cdots S_{0\mu(m)} J(T(x), \mu)$$

として $\rho(h)$ を特徴付ける．このペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトル空間とその双対空間の間の自然なものである． ρ はリコリッシュの生成元の書き方によらずに定まることもわかる．

次に $h, k \in \mathcal{M}_g$ をリコリッシュの生成元の積の形に書いておく．そして $(2g, 2g)$ タングル $T(h), T(k), T(hk)$ を同じように定義する．また

$$\sigma(h, k) := \text{sgn}(L(xy)) - \text{sgn}(L(x)) - \text{sgn}(L(y))$$

とおいて $\xi(h, k)$ を

$$\xi(h, k) := C^{\sigma(h, k) - \sigma(h) - \sigma(k)}$$

と定義しておく．このとき ξ の定義から $\xi : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は次のような群のコホモロジーの 2-コサイクルの関係式を満たす．

$$\xi(xy, z)\xi(x, y) = \xi(x, yz)\xi(y, z)$$

よって次が成り立つ．

命題 4.2. 任意の $h, k \in \mathcal{M}_g$ に対して

$$\rho(hk) = \xi(h, k)\rho(h)\rho(k)$$

が成り立つ．したがって ρ は V_Σ 上の射影ユニタリー表現である．

証明のスケッチ． $h \in \mathcal{M}_g$ に対して $L(h)$ でデーン手術をして得た 3 次元多様体は h によって二つのハンドルボディを貼り付けた多様体と微分同相になる．このこととリコリッシュの生成元がすべてユニタリー作用素を誘導することから命題が導ける． \square

この定理から Witten 不変量のもう 1 つの記述ができる．全てのウェイトを 0 としたときの生成元を v_0 とする．つまり $V_{0,0,\dots,0} \cong \mathbb{C}$ の成分にだけ値を持つベクトルである．このとき次が成り立つ．

定理 4.3. 3 次元多様体 M の Heegaard 分解を 1 つ固定する．その M の Witten 不変量 $Z_k(M)$ はその分解に関する写像類群の元 $h \in \mathcal{M}_g$ を用いて

$$Z_k(M) = S_{00}^{-g+1} \langle v_0, \rho(h)v_0 \rangle$$

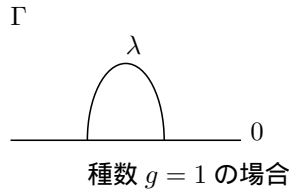
として表される．

証明のスケッチ．種数を固定したときの位相不変性は Witten 不変量のとおり同じなので明らか．種数 g が増えたときの変化を見ると、キャンセルをするような新しいハンドルを接着すること (安定同値) を考える．種数を $g+1$ にしたときの貼り合わせの写像類群の元を \tilde{h} と書くと、

$$\langle v_0^*, \rho(\tilde{h})v_0 \rangle = S_{00} \langle v_0, \rho(h)v_0 \rangle$$

という関係式を満たし、安定同値でも値が変わらないことがわかる． \square

$g=1$ のときの写像類群 $\mathcal{M}_1 = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して辺 λ を与えたグラフ Γ に対応する V_T の基底を v_λ とする．



写像類群の作用の生成元 S, T への作用は

$$Sv_\lambda = \sum_{\mu} S_{\lambda\mu} v_\mu$$

$$Tv_\lambda = \exp(2\pi\sqrt{-1}\Delta_\lambda)v_\lambda$$

と表される .

ここで Atiyah の $2 + 1$ 次元の位相的場の理論を構成する . まず M をいくつかの曲面で切り開き , その各ピース毎に理論を構成する . 曲面 Σ に対しては複素線形空間 V_Σ を対応させる . 1 ハンドルを付け加える操作に対しては $\iota : V_{\Sigma_g} \rightarrow V_{\Sigma_{g+1}}$ を $\iota(v_\lambda) := \frac{1}{\sqrt{S_{00}}}\tilde{v}_\lambda$ として定義をする . \tilde{v}_λ は上の定理で用いたものと同じである .

また球面の生成に対する作用 $\beta : V_\emptyset \rightarrow V_{S^2}$ は

$$\beta(x) = \frac{x}{\sqrt{S_{00}}}$$

が対応する . このようにして射影表現を使って $(2 + 1)$ 次元位相的場の理論の例を作ることができた .

また 3 次元多様体がリンクを含む場合にも拡張することができる . Σ に点 p_1, p_2, \dots, p_n を置き , アフィンリー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の既約表現または双対表現が対応させる . よってこの場合

$$V_{\Sigma, \mathbf{p}, \lambda} := \bigoplus_{\mu_1, \mu_1^*, \dots, \mu_g^* \in P_+(k)} V_{\mu_1, \mu_1^*, \dots, \mu_g^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

として空間を定義して , 写像類群を $\mathcal{M}_{g,n}$ のタイプに変えることによって同じ枠組みを作ることができる . $\mathcal{M}_{g,n}$ は種数 g で , 境界を n 個持つ曲面の S^1 を pointwise に保つ写像全体である .



5 Chern-Simons 理論と曲面上の接続の空間の幾何

この章では Witten 不変量を Chern-Simons 理論を通して考える . しかし筆者の理解不足により全ての命題には証明はつけず , 概略だけ述べる . M を向きのついた 3 次元多様体とする . G を $SU(2)$ として M 上の主 G 束 P を考える . その上の接続全体の空間 \mathcal{A}_M を考える . \mathcal{A}_M はアフィン空間なのである点を起点にして $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ と同一視できる . また P 上のゲージ群 $\mathcal{G} = \text{Map}(M, G)$ を考える . 接続へのゲージ群の作用は

$$g^*A = g^{-1}Ag + g^{-1}dg, \quad A \in \mathcal{A}_M, \quad g \in \mathcal{G}$$

である . また接続 A の曲率を

$$F_A = dA + A \wedge A \in \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

とする . このとき , $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$CS(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

とおきこれを Chern-Simons 汎関数という . 変分法を用いることによってこの汎関数の臨界点は M 上の平坦接続 ($F_A = 0$ となる接続) に一致することがわかる . また非退化内積 $\int_M \text{Tr}(\alpha \wedge \beta)$ による $\Omega^2(M, \mathfrak{g})$ と $\Omega^1(M, \mathfrak{g})^*$ の同一視によって F_A は \mathcal{A}_M の 1 次微分形式とみなすことができる . またそれは完全形式であることはすぐ分かる . 次にゲージ群の作用では次のように変化する .

命題 5.1.

$$CS(g^*A) = CS(A) + \frac{1}{8\pi^2} \int_{\partial M} \text{Tr}(A \wedge dgg^{-1}) - \int_M g^*\sigma$$

ここで σ は $SU(2)$ の体積要素である .

これから , M が閉多様体の場合は $CS : \mathcal{A}_M/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を誘導する . M が閉でない場合を考える . このとき $\Sigma = \partial M$ に対して接続の空間 \mathcal{A}_Σ を考え , $\alpha \in \mathcal{A}_\Sigma$ に対する接空間において $T_\alpha \mathcal{A}_\Sigma$ 交代形式 $\omega(\alpha, \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_\Sigma \text{Tr}(\alpha \wedge \beta)$ $\alpha, \beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ が与えられている . $d\omega = 0$ より \mathcal{M}_Σ は無限次元シンプレクティック多様体とみなすことができる .

$a \in \mathcal{A}_\Sigma$ と $g \in \mathcal{G}_\Sigma$ に対してそれぞれ M へのある拡張を A, \tilde{g} とする . このとき $c(a, g) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(CS(\tilde{g}^*A) - CS(A)))$ とおく . 実際書き下すと

$$c(a, g) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\int_\Sigma \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(g^{-1}ag \wedge g^{-1}dg) - \int_M \tilde{g}^*\sigma))$$

となり第 2 項は Wess-Zumino 項であり全体として M への拡張によらないことがわかるので $c(a, g)$ は a, g の関数として well-defined である . つまり次が成り立っている .

命題 5.2. Σ を 3 次元多様体 M の境界として M 上の接続 A とその Σ の制限 a とゲージ群の作用 $g \in \text{Map}(\Sigma, G)$ の Σ への制限 $g|_\Sigma$ を用いることによって

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}CS(g^*A)) = c(a, g|_\Sigma) \exp(2\pi\sqrt{-1}CS(A))$$

が成り立つ .

次に $a \in \mathcal{A}_\Sigma$, $g \in \text{Map}(\Sigma, G)$ に対して $f(e \cdot g) = c(a, g)f(g)$ を満たす関数 $f : \text{Map}(\Sigma, G) \rightarrow \mathbb{C}$ 全体を $L_{\Sigma, a}$ とする . すると $L_{\Sigma, a}$ は \mathbb{C} と同一視ができて , 自然に Hermite 内積が入る . 命題から $\exp(2\pi\sqrt{-1}CS(A))$ は $L_{\Sigma, a}$ の元とみなすことができる . また $-\Sigma$ に対しては $\overline{L_{\Sigma, a}}$ と自然な同型がある . 3 次元多様体 M を $M_1 \cup_\Sigma M_2$ に分解すると $\partial M_1 = \Sigma, \partial M_2 = -\Sigma$ が成り立つから自然なペアリングに対して

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}CS(A)) = \langle \exp(2\pi\sqrt{-1}CS(A_1)), \exp(2\pi\sqrt{-1}CS(A_2)) \rangle$$

のように不変量を計算することができる .

次に $a \in \mathcal{A}_\Sigma$ に対して $L_{\Sigma, a}$ をその上のファイバーとして捉えることによって自明なファイバー束 $L_\Sigma := \mathcal{A}_\Sigma \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_\Sigma$ を定義することができる . Chern-Simons 汎関数を用いて \mathcal{A}_Σ 上の道 η_t ($0 \leq g \leq 1$) に対して L_Σ 上のリフトを作ることができる . つまり L_Σ 上のある接続を構成することができる . その曲率形式として \mathcal{A}_Σ 上のシンプレクティック形式 ω が再現される . また \mathcal{A}_Σ 上のゲージ群の作用 \mathcal{G}_Σ を L_Σ の作用にリフトすることができる . この作用のモーメント写像 μ の Marsden-Weinstein 商 $\mathcal{A}_\Sigma//\mathcal{G} := \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}$ をとることによって平坦 G 接続のモジュライ空間 \mathcal{M}_Σ 上の複素直線束 \mathcal{L} が得られる . このようにゲージ群で割ることによって有限次元の対象を得ることができた . この平坦 G 接続のモジュライ空間はよく知られた空間で基本群の表現空間を共役で割った $\text{Hom}(\pi_1(M), G)/G$ と言い換えることができる .

Witten は 3 次元多様体の位相不変量を

$$Z_k(M) = \int \exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(A)) \mathcal{D}A$$

という経路積分として提唱した . M 上の接続 A で境界 Σ に制限すると α になるような接続全体を \mathcal{A}_α とする . このとき

$$Z_k(M)(\alpha) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(A)) \mathcal{D}A$$

とおくと

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(g^*A)) = c(a, g|_\Sigma)^k \exp(2\pi\sqrt{-1}kCS(A))$$

が成り立つから $Z_k(M)$ は $\mathcal{L}^{\otimes n}$ のセクションとみなせる．ここで \mathcal{M}_Σ 上に Atiyah-Bott の方法を用いて複素構造を入れることができる．この複素構造を用いて $\mathcal{L}^{\otimes n}$ 上の正則切断全体の空間を \mathcal{H}_Σ とする．これはいわゆる位相的場の理論の状態空間であり, Beauville と Laszlo らによって Σ 上の共形ブロックの空間と同型になることが知られている．これによって Chern-Simons 理論と共形場理論の関係を見出すことができるのである．

これらの理論はパラボリックベクトル束の理論を用いて 3 次元多様体に絡み目が埋め込まれた場合にも拡張することができる．

第3章

量子論に現れる代数的・数論的構造

河本 大知

2次元場の量子論である共形場理論における‘基礎方程式’(WZW 模型の分配関数が満たす方程式), Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (以後, KZ 方程式と略す) は, 1984 年に発見された. Drinfel'd アソシエータは, KZ 方程式の持つ 2 つの解の‘商’として定義される, 2 つの非可換変数の形式的級数であり, その最も著しい性質の 1 つは, 級数の各項の係数が多重ゼータ値で表され, それらが反復積分表示を持つ事である. また, KZ 方程式の解, 及びモノドロミー表現は結び目理論において本質的に大きな応用をもたらし, 従って Drinfel'd アソシエータは結び目理論の枠組みの中 (Kontsevich 積分) にも現れる事が知られている. この他にも, (変形) 量子化の形式性の構造や, 射影直線引く 3 点 $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群に入る混合 Hodge 構造 (の周期積分) とも関わり深い事が知られており, Drinfel'd アソシエータは, 数論や結び目理論, 量子論などの幅広い分野に現れる, 非常に興味深い対象である. 特にこの対象を通じて, 量子論と数論の関わり合いの大きな糸口の一つが見つかったと言っても良く, これがここ数年来の筆者の興味の原点となった. また, 現在でも, 国内外を通じてこれらに関する研究が活発に行われており, それぞれの視点からの優れた解説書も多く存在する.

本章では, 非専門家を想定して¹, 多重ゼータ値, 及び Drinfel'd アソシエータの定義から始め, 現在知られている重要かつ深い結果の幾つかを, やや詳細にまで踏み込んで紹介する. 本章は次の 2 つの項目のそれぞれに対して 1 節ずつを割り, 関連する幾つかのトピックスについても述べている:

- 次元予想へのアプローチ
- Drinfel'd アソシエータと Grothendieck-Teichmüller 群

前半部では, 多重ゼータ値についての基本を復習した後, Zagier が提唱した, 多重ゼータ値に関する次元予想へのアプローチの方法について, 主に Deligne-Goncharov ([DG]), 寺杣 ([Ter1]) の方法を紹介する. いずれも補遺 A で述べるモチーフ理論を用いる. 後半部では, Drinfel'd アソシエータの基礎について述べた後, Grothendieck-Teichmüller 群を導入し, 特に量子化の理論との幾つかの関わりについて触れる.

量子化の理論の定式化の方法は幾つかあるが, 幾つかの理論の各所で, アソシエータの構造が本質的に現れる. それらの理論の代数的・数論的な性質を観察することで, 周期・(混合 Tate) モチーフの視点からの理解や, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ や Grothendieck-Teichmüller 群などの構造が本質的に関わり合ってくる事が, 様々な状況証拠や具体的な証明などから明らかになってきており, 今後これらの対象・理論の代数的・数論的な研究が更に重要になると考えられる. この雰囲気は少しでも伝えたい, と考えている.

本章では, 各々の議論での主要なアイデアを明確に述べる事を第一に心掛けたが, 筆者の理解が十分及んでいない箇所もあるので, 全体を通じて, 全ての対象に対して明瞭な説明を与える事ができず, かつ, 間違いも幾つか含まれていると思われる. 追えば分かる詳細な計算は極力省く一方で, 実際にこの論説を基に学ぶ際に注意した方が良いと思われる点については, その都度補足した. また, 各項目に関して, 筆者の知りうる限りの参考文献をその都度示したが, 十分ではないと思われる事を, 予めお断りしておきたい.

記法

本章で用いる記法の一部 (混乱しやすいもの) をここにまとめておく.

- L_w : 重さ w の多重ゼータ値が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間, $d_w: \dim L_w = d_w$

¹筆者も非専門家であるが

- \cdot : シャッフル積
- \star : 調和積
- \widehat{Z} : 評価写像 Z の拡張
- \mathcal{O} : 数体の整数環
- \mathcal{O}_X : 多様体 X 上の構造層
- Φ : アソシエータ (Φ_{DR} は Drinfel'd アソシエータ)
- e_i と e_{ij} : KZ 方程式に現れる非可換変数²
- \mathcal{P} : 周期の成す環
- $\mathcal{M}_{g,n}$: 完備非特異代数曲線のモジュライ空間, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$: $\mathcal{M}_{g,n}$ の安定コンパクト化

1 次元予想へのアプローチ

多重ゼータ値の定義から始め、知られている性質を復習から始め、その過程で次元予想を紹介する。

1.1 多重ゼータ値：解析的導入

Euler に始まる 多重ゼータ値 (multiple zeta value) とは、自然数 k_1, \dots, k_n (ただし $2 \leq k_n, 1 \leq k_i, 0 \leq i \leq n-1$) に対して定義される、絶対収束する無限和

$$\zeta(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

のことであり、 n を深さ (depth)、 $k_1 + \dots + k_n$ を重さ (weight) と呼ぶ。これは次で定義される 多重対数関数 (polylogarithm)

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_n}(z) = \sum_{m_1 < \dots < m_n} \frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

を $z \rightarrow 1$ としたものになっており、特に深さが 1 の時 ($n = 1$ の時)、これは Riemann のゼータ値になる。

多重ゼータ値は、それ自体解析的に定義される対象であり、明示的に計算される例も多くある。(具体例は、例えば [AK] を参照) 一方で、個々の多重ゼータ値を「単独」で考えるのではなく、「幾つかの多重ゼータ値の間に成り立つ \mathbb{Q} -線形関係式」も、興味ある対象である。最も古典的な場合は、Euler による $n = 2$ (深さが 2 の場合) の場合の和公式 (sum formula)

$$\zeta(k-2, 2) + \zeta(k-3, 3) + \dots + \zeta(1, k-1) = \zeta(k), \quad 2 \leq k$$

であり、一般の深さ n の場合への拡張は Granville-Zagier [Gra] によって得られた。

これ以外の多くの「幾つかの多重ゼータ値の間に成り立つ \mathbb{Q} -線形関係式」を得る為にも、研究の次のステップとして「多重ゼータ値全体」を考えるという事が重要である: 重さ w ($2 \leq w$) の多重ゼータ値全体が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間を L_w と書く事に:

$$L_w = \sum_{k_1 + \dots + k_n = w} \mathbb{Q} \cdot \zeta(k_1, \dots, k_n)$$

²他の文献では、時々 X_{ij} という記法が用いられる。

更に, $L_0 = \mathbb{Q}, L_1 = 0$ として, 多重ゼータ値全体が生成する \mathbb{Q} -ベクトル空間を

$$L = \sum_{w=0}^{\infty} L_w$$

とする. これは形式和であるが, 次のような予想もある:

予想 1.1 (Goncharov). \mathbb{Q} -代数として,

$$L = \bigoplus_{0 \leq w} L_w$$

この \mathbb{Q} -ベクトル空間 L には, 解析的に定義される調和積とシャッフル積と呼ばれる 2 通りの積構造が入り, L はそれら積構造で閉じている事が知られている. ここで 調和積 とは, 例えば

$$\begin{aligned} \zeta(k_1) \cdot \zeta(k_2) &= \left(\sum_{k_1} \frac{1}{m_1^{k_1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{m_2^{k_2}} \right) = \left(\sum_{k_1 < k_2} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} + \sum_{k_2 < k_1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} + \sum_{k_1 = k_2} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} \right) \\ &= \zeta(k_1, k_2) + \zeta(k_2, k_1) + \zeta(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

のように, 和のとり方を場合分けして得られる積であり, シャッフル積 とは, 次節で詳しく述べる, 多重ゼータ値の反復積分表示を用いた積である. これら 2 つの積を合わせて得られる線形関係式を二重シャッフル関係式 と呼ぶ. これらの正確な定義は次節で与える.

この \mathbb{Q} -ベクトル空間 L に関する最も基本的な予想は, 次元予想 (dimensional conjecture) と呼ばれる次の予想である:

予想 1.2 (Zagier). 数列 $\{d_w\}$ を, 漸化式

$$d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_w = d_{w-2} + d_{w-3} \quad (3 \leq w)$$

で定める. この時, $\dim_{\mathbb{Q}} L_w = d_w$ が成り立つ.

この予想に対して, 幾つか補足と説明を加える.

注意 1.3. (1) 次元予想で与えられている数列 $\{d_w\}$ は,

$$\frac{1}{1 - t^2 - t^3} = \sum_{w \geq 0} d_w t^w$$

によって与えられる, と言い換える事ができる.

(2) 各 d_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) が $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = 1$ である事は証明ができる. $d_5 = 2$ を証明する事は, $\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(5)}$ が無理数である事が証明できる事と同値である.

(3) 次元予想の深さ 1 の場合 ($n = 1$: Riemann ゼータ値の場合) は, その主張を次のように言い換える事も可能である: $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(2n+1), \dots$ が \mathbb{Q} 上代数的独立である.

(4) この予想に対しては, 上限の評価に関する Deligne, Goncharov, 寺杣による結果がある. 本論説では, これらの結果について, 1.4 節以降で詳述する. これらの結果から, 多重ゼータ値の間に成り立つ関係式が膨大な量存在する事を示唆される.

1.2 反復積分表示による新展開: 代数的視点の導入

Kontsevich による発見 ([Zag]) は, 先の節で定義された多重ゼータ値が次のような反復積分表示を持つ, という事実である:

$$\zeta(k_1, \dots, k_n) = \int_{0 < t_1 < \dots < t_{k_1 + \dots + k_n} < 1} \bigwedge_{i=1}^n \left(\frac{dt_{k_{i-1}+1}}{t_{k_{i-1}+1}} \frac{dt_{k_{i-1}+2}}{t_{k_{i-1}+2}} \dots \frac{dt_{k_i-1}}{t_{k_i-1}} \cdot \frac{dt_{k_i}}{1-t_{k_i}} \right), \quad k_0 = 0$$

前節までは、主に解析的手法によって得られる事実を紹介してきたが、この反復積分表示を持つという事実から、前節までで述べた幾つかの研究テーマに対して、代数的手法による新たな定式化が可能になる³。

この節では正規化された双シャッフル関係式 (regularized double shuffle relation)⁴ を定式化し、「多重ゼータ値の間の \mathbb{Q} -線形関係式は、全て正規化された双シャッフル関係式から導かれる」という予想を紹介する。その為に、前節では略式に述べた調和積とシャッフル積の正確な定義を与える所から始めよう。

最初に、上の反復積分表示には、被積分関数に 2 種類の対数的微分形式

$$\frac{dt}{t}, \frac{dt}{1-t} \in \Omega^1(\log S), S = \{0, 1\}$$

が用いられている事に注意する。反復積分を与える事は、上の 2 種類の微分形式をそれぞれ x, y とした時に、 $\prod x^{s-1}y$ という形で書ける言葉 (word: 例えば $xyxy$) を与える事と同値である。従って、前節までの解析的な多重ゼータ値の議論を、非可換な変数 x, y を用いて行う事ができる。

まず私達に必要な言葉の住む空間を定めよう: x, y を 2 つの変数とした時に、 $\{x, y\}$ 上定義される自由モノイド $\{x, y\}^*$ は、 x, y に関する言葉から成る。ここで、 $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ を、 $\{x, y\}^*$ を基底とする、 $\{x, y\}$ 上の \mathbb{Q} 上の自由ベクトル空間と定義する。これは x, y に関する非可換な多項式環であり、単位元 e は空言葉 (empty word) を表すとす。

$\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$ を $\mathfrak{H}_0 = \mathbb{Q}e + x\mathfrak{H}y$ (x で始まり、 y で終わる言葉達)、 $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ を $\mathfrak{H}_1 = \mathbb{Q}e + \mathfrak{H}y$ (y で終わる言葉達) で定義する。(定義より、 $\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ が成り立つ。) また、 $z_s = x^{s-1}y$ とおく。

定義 1.4. \mathfrak{H}_1 上定義される 調和積 (harmonic product) $w_1 \star w_2$, ($w_1, w_2 \in \mathfrak{H}_1$) とは、

- (1) 任意の $w \in \mathfrak{H}_1$ に対して、 $w \star e = e \star w = w$
- (2) 任意の s, t と任意の y で終わる言葉 u_1, u_2 に対して、

$$z_s u_1 \star z_t u_2 = z_s(u_1 \star z_t u_2) + z_t(z_s u_1 \star u_2) + z_{s+t}(u_1 \star u_2)$$

を満たす積の事である。この積によって、 (\mathfrak{H}_1, \star) は可換 \mathbb{Q} -代数となる。

定義 1.5. \mathfrak{H} 上定義される シャッフル積 (shuffle product) $w_1 \ \! \! \! \dashv \! \! \! w_2$ ($w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$) とは、

- (1) 任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対して、 $w \ \! \! \! \dashv \! \! \! e = e \ \! \! \! \dashv \! \! \! w = w$
- (2) 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ と任意の y で終わる言葉 u_1, u_2 に対して、

$$(u_1 w_1 \ \! \! \! \dashv \! \! \! u_2 w_2) = u_1(w_1 \ \! \! \! \dashv \! \! \! u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 \ \! \! \! \dashv \! \! \! w_2)$$

を満たす積の事である。この積によって、 $(\mathfrak{H}, \ \! \! \! \dashv \! \! \!)$ は可換 \mathbb{Q} -代数となる。

最も小さい空間 \mathfrak{H}_0 に対して次の 評価写像 (evaluation map) $Z: \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する事ができる: 自然数 $1 \leq k_1, \dots, k_{n-1}, 1 < k_n$ に対して、

$$Z: \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x^{k_1-1}y x^{k_2-1}y \dots x^{k_n-1}y \mapsto \zeta(k_1, \dots, k_n)$$

ただし $Z(e) = 1$ とする。この Z は 2 種類の積 $\star, \ \! \! \! \dashv \! \! \!$ に関して \mathbb{Q} -代数準同型である。すなわち、 $Z(w_1 \star w_2) = Z(w_1)Z(w_2)$, $Z(w_1 \ \! \! \! \dashv \! \! \! w_2) = Z(w_1)Z(w_2)$ が成り立つ。これらを合わせて、双シャッフル関係式 (double shuffle relation)

$$Z(w_1 \ \! \! \! \dashv \! \! \! w_2 - w_1 \star w_2) = 0, \quad w_1, w_2 \in \mathfrak{H}_0$$

を得る。

次のステップとして問題になるのは、評価写像 Z を \mathfrak{H}_1 上に拡張できるかどうか、という事であるが、結論から言えばそのまま拡張はできない。(全ての \mathbb{Q} -線形関係式を得る為には、評価写像は \mathfrak{H}_0 上のみならず \mathfrak{H}_1 上でも定義されている必要がある。) 例えば \mathfrak{H}_0 には属さない \mathfrak{H}_1 の要素として $w_1 = w_2 = y$ を

³ここで述べる議論以外にも、この反復積分表示が齎したものはかなり大きい。

⁴ここでの和訳は [Kan] に従った。

選んだ時，調和積は $2y^2 + xy$ ，シャッフル積は $2y^2$ であり，上の双シャッフル関係式の左辺を計算すると $Z(w_1 \quad w_2 - w_1 \star w_2) = Z(xy) = \zeta(2) \neq 0$ となる．従って，拡張する為には別のアプローチを考える必要があるが，その為のアイデアは「 \mathbb{R} ではなく 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[T]$ への評価写像を考える」という素朴なものであり，実際次の事実が成り立つ: \mathfrak{h}_1 上定義される 2 つの積のいずれに対しても， \mathbb{Q} -代数の準同型 $\widehat{Z}: \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathbb{R}[T]$ であって， $\widehat{Z}|_{\mathfrak{h}_0} = Z$ かつ $\widehat{Z}(y) = T$ を満たすものがただ一つ存在する．この 2 つの \widehat{Z} は，次の意味で‘整合的’である ([Bou]): 調和積 \star に対する \widehat{Z} を $\widehat{Z}_\star: \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathbb{R}[T_1]$ ，シャッフル積 \circ に対する \widehat{Z} を $\widehat{Z}_\circ: \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathbb{R}[T_2]$ とした時に，線形同型 $\varphi: \mathbb{R}[T_2] \rightarrow \mathbb{R}[T_1]$ が存在して， $\widehat{Z}_\circ = \varphi \circ \widehat{Z}_\star$ が成り立つ．

これで正規化された双シャッフル関係式を述べる準備が整った．

定理 1.6 ([IKZ]). 任意の $w \in \mathfrak{h}_1, u \in \mathfrak{h}_0$ に対して，

$$\widehat{Z}(w \quad u - w \star u) = 0$$

が成り立つ．これを 正規化された双シャッフル関係式 (regularized double shuffle relation) と呼ぶ．

予想 1.7. 多重ゼータ値の間の全ての \mathbb{Q} -線形関係式は，正規化された双シャッフル関係式から得られる．

この予想は様々な数値実験によって提唱された．ここで定式化した正規化された双シャッフル関係式は，アソシエータを使った Racinet による定式化 [Rac] もある．この Racinet による定式化を 2.1.2 節において紹介し，そこで関連する Deligne-寺杣の結果についても触れる．

注意 1.8. 多重ゼータ値の間に成り立つ関係式は，次元予想により膨大な量存在する事が示唆されている訳だが，その導出の方法は何も上で述べたような解析的，或いは代数的な定式化によるものばかりではない．興味深い方法の 1 つは Le-村上 ([LM1]) による普遍的な結び目不変量である Kontsevich 積分を用いた導出方法である．(Kontsevich 積分については [Oht] を参照) その概要は次の通りである: Kontsevich 積分はコード図の空間に値を持つ不変量であるが，Turaev ([Tur]) によるウェイト系 (或いは拡張された Yang-Baxter 系 (enhanced Yang-Baxter system) を組み合わせて $\mathbb{C}[[t]]$ に値を持つようにすると，次の図 1 のような自明な結び目の変種 K の (規格化しない) Kontsevich 積分に対しては，適当な規格化により，HOMFLY 多項式 $P_K(x, y)$ の変数 x, y を $x = e^t - e^{-t}, y = e^{nt}$ と変数変換したものと一致する．これを Kontsevich 積分の定義により計算したものと，HOMFLY 多項式の定義に従って計算したものは，いずれも t の形式的冪級数になっているが，係数比較する事で，例えば関係式

$$\left(\frac{1}{2^{2n-2} - 1} \right) \zeta(2n) - \zeta(1, 2n-1) + \dots + \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{2n-2}, 2) = 0$$

が導かれる．

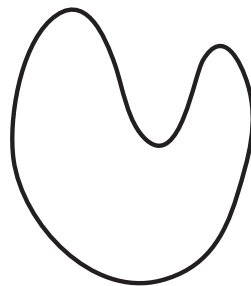


図 1: 自明な結び目の変種 K

1.3 多重ゼータ値のもう1つの重要な理解： $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群に入る構造

前節までは、まず多重ゼータ値を解析的な定義を与え、その表示を具に観察する事で、それらの値の間の関係式に関わる研究について見てきた。

多重ゼータ値には、もう1つ重要な側面がある；それは周期としての理解である。(周期については [KZ] を参照) この節では多重ゼータ値が $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群に入る混合 Hodge 構造の周期積分として理解できるという Kontsevich による発見と、ここで考える混合 Hodge 構造がモチーフ的 (motivic) である事を説明する。この事実は次の定理に集約される:

定理 1.9. 基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ の群環の増大イデアル J に関する完備化

$$\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]^\wedge = \lim_n \mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]/J^{n+1}$$

は $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフ (正確にはその副対象) であり、この上で定義される極限混合 Hodge-Tate 構造の周期全体は多重ゼータ値全体と一致する。ここで $\vec{01}$ は接基点を表す。

(混合 Tate) モチーフについては補遺 A を参照されたい。この定理で主張されている事は、 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上のある混合 Tate モチーフの周期が多重ゼータ値になる事である。

注意 1.10. 1.3.3 節ではこの定理の証明のスケッチをするが、この定理の証明 (及びこの節以降の議論) には本質的に、後の節 (例えば 2.1 節) で述べる Drinfel'd アソシエータが関わってくる事に注意する。(後の 2.2 節で述べるように、多重ゼータ値の母関数が Drinfel'd アソシエータである。)

注意 1.11. この定理からは少し逸れるが、混合 Tate モチーフと多重ゼータ値の関係に関して次の問いがある:
問い. 全ての $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上の (枠付き) 混合 Tate モチーフの周期は多重ゼータ値か。

この問いに対する部分的な答えとして、Goncharov-Manin ([GM]) は、種数 0 の n 点付き完備非特異代数曲線のモジュライ空間の安定コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ に対しては、その周期が多重ゼータ値になるような、標準的な枠付き混合 Tate モチーフが存在する事を示した。関連する最近の仕事としては [Bro] に議論の詳細がある。

1.3.1 接基点付き基本群の定義

定理 1.9 での基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})$ の定義 (言葉の準備) から始めよう。ここで紹介する定義は、元々は Deligne のアイデア [Del1] による。

代数多様体 X が素数 p で良い還元を持つとは、 $X \bmod p$ (X を整数係数で定義した時に、定義方程式を p を法として還元したもの) が \mathbb{F}_p 上の射影的非特異代数多様体となる事を言う。事実として、有限個の素数を除いて X は p で良い還元を持つ事が知られている。

X として射影直線から有限個の点を除いた $\mathbb{P}^1 - S$, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \infty\}$ を考えよう。この定義から、任意の素数に対して $X = \mathbb{P}^1 - S$ が良い還元を持つ事と、 $S = \{0, 1, \infty\}$ である事が同値である事が分かる。従って、今後は S として $S = \{0, 1, \infty\}$ の場合を考える事にする。

多様体の基本群を考える時、基点を選ぶ必要がある。私達が考えたい $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合、基点 x を $\mathbb{Z} - \{0, 1\}$ から選ぶとすると、 (X, x) は任意の素数に対して良い還元を持たない。可能ならば、 $0, 1$ に「十分近い点」に基点を取って、任意の素数に対して良い還元を持ちたい、すなわち $0, 1$ に十分近い基点をとった基本群 $\pi_1(X, x)$ を考えたい。これがこれから説明する接基点の考え方である。

$\vec{01} = \frac{\partial}{\partial z} \in T_0\mathbb{P}^1, \vec{10} = -\frac{\partial}{\partial z} \in T_1\mathbb{P}^1$ とおく。(z は \mathbb{P}^1 の座標とする。) 更に 2 点 $0, 1 \in \mathbb{P}^1$ において \mathbb{P}^1 を実爆発 (real blowup) させたものを $\tilde{\mathbb{P}}^1$ と書こう。この時、 $\vec{01}, \vec{10}$ はそれぞれ、 $\tilde{\mathbb{P}}^1 - \{\infty\}$ における $0, 1$ 上の例外円 (exceptional circle) 上の点 $[\vec{01}], [\vec{10}]$ を定める。 $\tilde{\mathbb{P}}^1 - \{\infty\}$ における $[\vec{01}]$ から $[\vec{10}]$ への道 (path) の空

間 $P_{[\vec{01}], [\vec{10}]}(\mathbb{P}^1 - \{\infty\})$ を考える事ができ, この空間の π_0 を $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}, \vec{10})$ と書く. これは基本亜群 (fundamental groupoid) であるが, $\vec{01}$ から $\vec{10}$ の道ではなく, $\vec{01}$ から $\vec{01}$ への道を考える場合, これを接基点 $\vec{01}$ 付きの基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})$ 定義とする:

定義 1.12. $\vec{01}$ を接基点 (tangential base point) とする $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})$ を,

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}) = \pi_0 \left(P_{[\vec{01}], [\vec{01}]}(\tilde{\mathbb{P}}^1 - \{\infty\}) \right)$$

で定める.

注意 1.13. このように定義される基本群は, 勿論他の接基点に対しても定義される. 接基点に関しては, ここで与えた説明以外にも, [Nak] にも別な説明がある.

1.3.2 完備化の構成

一般に離散群 G と (単位元付き) 可換環 R に対して, R 上の G の群環 (group algebra) $R[G]$ が定まる. 群環の要素は, 有限線形和 $\sum_{g \in G} a_g g$, $a_g \in R$ で書ける. 群環に対して次の準同型を考えよう:

$$\varepsilon : R[G] \rightarrow R, \quad \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g$$

この準同型を 増大準同型 (augmentation homomorphism) と呼び, この準同型の核 $\text{Ker } \varepsilon$ を 増大イデアル (augmentation ideal) と呼び, J_R 又は単に J と書く事にする. この J に関しては $R[G] = J^0 \supseteq J \supseteq J^2 \supseteq \dots$ が成り立ち, 群環 $R[G]$ に J -進位相を定めている. 従って, この J -進位相に関する完備化を考える事ができ, それを

$$R[G]^\wedge = \lim_n R[G]/J^n$$

と書く事にする. この構成を $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, 及び $G = \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})$ に対して適用して, 定理 1.9 の主人公を得る.

1.3.3 基本群に入る混合 Hodge 構造

この節では, 定理 1.9 の証明のスケッチをする.

Λ と書けば, \mathbb{Q}, \mathbb{Z} のいずれかを表すものとする. Λ -混合 Hodge 構造 (Λ -mixed Hodge structure) とは, 有限次元ベクトル空間 V , 増大するフィルトレーションであるウェイトフィルトレーション W_\bullet , 減少するフィルトレーションである Hodge フィルトレーション F^\bullet から成る $(V, W_\bullet, F^\bullet)$ の 3 つ組であり,

$$V \otimes_{\Lambda} \mathbb{C} =: V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^m V_{\mathbb{C}} \cap W_{2m} V_{\mathbb{C}}$$

が成り立つものの事を言う. 最も典型的な例は Hodge-Tate 構造と呼ばれる $\Lambda(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ である. これは Galois 加群 $\Lambda_{\ell}(n)$ の Hodge 理論的類似であり, テンソル積及び双対が定義され, 任意の $\Lambda(n)$ は $\Lambda(1) = H_1(\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\})$ をテンソル積と双対の操作を繰り返す事で構成できる. すなわち $\Lambda(n) = \Lambda(1)^{\otimes n}$ や $\Lambda(n)^* = \Lambda(-n)$ が成り立つ. \mathbb{P}^1 の Zariski 開集合である $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合, $H_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}) = \Lambda(1)^{3-1}$ が成り立つ. この場合 $\Lambda(1)$ の直和であり, 肩に乗っている 3 は \mathbb{P}^1 から除いている点の個数に対応している.

空間 $\mathbb{Z}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]/J^{n+1}$ に混合 Hodge 構造が入る, そして n に関して極限をとったものに入る混合 Hodge 構造が極限混合 Hodge-Tate 構造である, というのが主張であるが, まず極限を取る前の議論をする. 実際にはこの双対空間 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]/J^{n+1}, \mathbb{Z})$ が Chen の定義した次の空間と同一視できる為, この空間の構造を使って混合 Hodge-Tate 構造を定義する:

$$L_n(H^0(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log S))) = \left\{ \int w_1 \dots w_r : H^0(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\log S)) \rightarrow \mathbb{C} \mid r \leq n, w_j = \frac{dz}{z - a_j}, a_j \in \{0, 1\} \right\}$$

ここで $S = \{0, 1, \infty\}$ である．この空間には被積分関数内の w_j の数（‘長さ’）によって自然なウェイトフィルトレーションが定まり，Hodge フィルトレーションも同様に定義され， $F^m V_{\mathbb{C}} \cap W_{2m} V_{\mathbb{C}}$ は丁度 ‘長さ’ が m の反復積分から成る空間になっている．

次に，次の準同型写像 Θ を定める：

$$\Theta : \mathbb{C}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]^\wedge \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle, \quad \gamma \mapsto \langle\theta, \gamma\rangle$$

ここで， θ は

$$\theta = 1 + \sum_i \int w_i e_i + \sum_{i,j} \int w_i w_j e_i e_j + \dots$$

と表される元とする．実はこの準同型は同型である．従って $\mathbb{Z}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]/J^{n+1}$ に入る混合 Hodge-Tate 構造の周期⁵は，例えば

$$\int_\gamma w_{j_1} w_{j_2} \dots w_{j_r} \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})]/J^{n+1}$$

と書け，これは多重ゼータ値になっている．これと 2.2 節で述べる Drinfel'd アソシエータの性質から，命題の主張が従う．

注意 1.14. ここで述べた同型 Θ は，モチーフの観点から言えば，Betti 実現から de Rham 実現への比較同型だと理解できる．すなわち，モチーフ的基本群 $\pi_1^{\text{mot}}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ の Betti 実現は前節までで構成した $\pi_1^{\text{Betti}}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01})$ であり，de Rham 実現は $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ であり，上の Θ は比較同型 $\text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}}$ そのものである．（別の言い方をすれば，Betti 実現はこれまでの節で議論した方法で得られる冪単代数群であり，一方で de Rham 実現は，ここでは詳しく述べないが，冪零可積分接続付きベクトル束の分類に関わる冪単代数群である．これらについては本稿ではこれ以上深入りしないが，例えばラフな解説（スケッチ）としては，[Del2] が参考になる．）これ以後の節の議論の各所で，この比較同型は頻繁に現れる．

1.4 次元予想へのアプローチ 1：Deligne-Goncharov の方法

この節では，Zagier による次元予想の上限を示す，Deligne-Goncharov のアプローチの方法について，[DG] に従って簡単に述べる．以下の議論の中での括弧付きの命題ないし定理の番号は，論文 [DG] における番号を表す．以後の議論では，体は $k = \mathbb{Q}$ とする．

使う道具は [DG] で構成している，数体 k 上の整数環 \mathcal{O} 上の混合 Tate モチーフの圏 $\text{MTM}_{\mathcal{O}}^6$ であり，ここでは $k = \mathbb{Q}$ の場合を考える．（ \mathbb{Q} の整数環は \mathbb{Z} である．）この $\text{MTM}_{\mathbb{Z}}$ には次で定めるファイバー関手

$$\omega : \text{MTM}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}}, \quad M \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(\mathbb{Q}(n), \text{Gr}_{-2n}^w M), \quad \text{Gr}_{-2n}^w(M) = W_{-2n}(M)/W_{-2(n+1)}(M)$$

があり，この関手の自然変換全体 $G_\omega = \text{Aut}^\otimes(\omega)$ をモチーフ的 Galois 群 (motivic Galois group) と呼ぶ．この G_ω の $\omega(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}$ への作用を考える事によって得られる写像 $G_\omega \rightarrow \mathbb{G}_m$ の核 U_ω (冪単代数群) を用いて $G_\omega = U_\omega \times \mathbb{G}_m$ と書け，この \mathbb{G}_m の要素が U_ω の Lie 環 \mathcal{L}_ω の次数付けを与える．（ U_ω の $\omega(\mathbb{Q}(n))$ への作用は自明である．）この時得られる分裂の射 $\mathbb{G}_m \rightarrow G_\omega$ を τ と書く事にする．

混合 Tate モチーフの圏 $\text{MTM}_{\mathbb{Z}}$ には，Betti，de Rham の 2 つの実現関手 (realization functor)

$$\text{MTM}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow[\text{dR}]{\text{Betti}} \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$$

があり，この 2 つの間には比較同型がある．すなわち，任意の混合 Tate モチーフ M の Betti 実現 M_{Betti} と de Rham 実現 M_{dR} が，モチーフ的 Galois 群の要素 $a \in G_\omega$ を使って $a(M_{\text{dR}}) = M_{\text{Betti}}$ のように結ばれて

⁵ここでは紙面の関係から，混合 Hodge(-Tate) 構造の周期について述べる事ができなかった．例えば [Hai],[Hai2] が参考になると思う．

⁶この構成については本稿では述べない．詳しくは原論文を参照されたい．

いる．同様にして，(先程の節での注意 1.14 でも述べた) モチーフ的基本 (垂) 群 π_1^{mot} が存在し，その Betti 実現 π_1^{Betti} と π_1^{dR} の間に比較同型 $\text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}}$ がある． $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合，先程の接基点の考え方をを用いて，モチーフ的基本垂群 $\pi_1^{\text{mot}}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}, \vec{10})$ が，各 $x, y \in \{0, 1\}$ に対してモチーフ的道空間 (motivic path space) $P_{x,y}$ が定義され，これらの実現 $\omega(P_{x,y})$ を考える事ができ，この実現が π_1^{Betti} であったり π_1^{dR} であったりする．ここで比較同型 $\text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}}$

$$\text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}} : \pi_1^{\text{Betti}}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}, \vec{10})(\mathbb{C}) \rightarrow \pi_1^{\text{dR}}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \vec{01}, \vec{10})(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

の下で， $\text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}}([0, 1]) = \Phi_{\text{DR}}$ と書けることに注意する．ここで Φ_{DR} は 2.1 節で詳しく述べる Drinfel'd アソシエータと呼ばれる対象である．

これらの垂群 $\omega(P_{x,y})$ と次で定められる副幕単アファイン群スキーム Π とが‘同値’である：

$$\Pi = \varprojlim \exp(\mathcal{L}/\text{deg} \geq n)$$

ここで \mathcal{L} は e_0, e_1, e_∞ によって自由に生成される次数付き Lie 環である．この Π には Lie 環のレベルで，生成元の変換 $e_i \mapsto e_j$, $i, j \in \{0, 1\}$ で記述される群準同型 $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$ がある．従って， $\omega(P_{x,y})$ 達と Π の同値性から，自己同型群 $H_\omega = \text{Aut}(\{\pi_1^\omega(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, a, b)\}_{x,y=\vec{01},\vec{10}})$ を得る． $H_\omega \subset \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ である．この H_ω も，先程と同様にして $\omega(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}$ への作用を考える事によって $H_\omega = V_\omega \rtimes \mathbb{G}_m$ という表示を持つ．(V_ω は先程の U_ω に比べて‘非常に大きい’ことに注意する．) 自然な写像 $\iota : G_\omega \rightarrow H_\omega$ が存在し，これに伴う単射 $U_\omega \rightarrow V_\omega$ が存在する．この時得られる分裂の射 $\mathbb{G}_m \rightarrow H_\omega$ も τ と書く事にする．

今， $\langle\Phi_{\text{DR}}\rangle \tau(2\pi\sqrt{-1}) \in H_\omega(\mathbb{C})$ が π_1^ω に作用すると，その像は π_1^{Betti} になる事が知られている．(PROPOSITION 5.18) 従って， $v \in H_\omega(\mathbb{Q})$ が存在して， $\langle\Phi_{\text{DR}}\rangle \tau(2\pi\sqrt{-1}) = \iota(a)v$ が成り立つ．また， $a = a_0\tau(2\pi\sqrt{-1})$, $a_0 \in U_\omega(\mathbb{C})$ を用いると，

$$\langle\Phi_{\text{DR}}\rangle = \iota(a_0) (\tau(2\pi\sqrt{-1})v\tau(2\pi\sqrt{-1})^{-1})$$

が成り立ち， $\langle\Phi_{\text{DR}}\rangle$ の住み家は $(\iota(U_\omega) \times \mathbb{A}^1)(\mathbb{C})$ である．

以上の準備の下で，次の議論が行える：次数付き環 $A = \sum A_w$ が存在して $\iota(U_\omega) \times \mathbb{A}^1 = \text{Spec}(A)$ と書く事ができる．この環には各 n 毎 ($n \geq 3$) に次数が n の生成元 b_n が存在するが，これら以外に次数 2 の生成元 t_0 が存在する．この時，準同型 $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ であって，次数 2 の生成元 t_0 が $t_0 \mapsto \pi^2$ というように移るものが存在する．(THÉORÈME 5.24) 多重ゼータ値の定める各空間 L_w は $\varphi(A)$ に含まれる．ここで，各 A_w の次元を d_w とおいた時，

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_w t^n = \frac{1}{1-t^2} \frac{1}{1-(t^3+t^5+t^7+\dots)} = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

が成り立つので， d_w 達は関係式 $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_w = d_{w-2} + d_{w-3}$ ($3 \leq w$) を満たしており，次元予想への上からの評価ができています．

1.5 次元予想へのアプローチ 2：寺杣の方法

この節で紹介するのは，[Ter1]⁷による，Zagier の次元予想の上限の評価への，より具体的なアプローチの方法である．基本的な指針としては，多重ゼータ値の反復積分表示の被積分関数である対数的微分形式に注目し，多重ゼータ値の成す空間よりも大きな空間を各 n 毎に構成し，それらの空間の次元達が，次元予想で予想されている次元の関係式を満たす事を示す，という方法である．

このアプローチの(荒い)指針は，次の通りである：

(ステップ 1) このステップ 1 が最も重要な箇所である．

⁷この報告が [Ter2] にある．

多重ゼータ値を反復積分表示で実現する, 多様体 $X = \mathbb{A}^w$ 上の正則微分形式を ω とする. この ω が極を持つ箇所を適当に爆発させる事によって, ‘良い’ 多様体のペア (X, B) ($B \subset X$) を得る. 更に自然なペアリング

$$H_n(X, B; \mathbb{Q}) \times H_{\text{dR}}^n(X, j; \mathbb{Q}_U) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\text{サイクル}) \times \omega \mapsto \int_{\text{サイクル}} \omega$$

が定義される. ここで $H_n(X, B; \mathbb{Q})$ は相対ホモロジー, $U = X - B$, $j: U \hookrightarrow X$ であり, $H_{\text{dR}}^n(X, j; \mathbb{Q}_U)$ はある相対 de Rham コホモロジーである. この時, \mathbb{Q} -混合 Hodge 構造として, $H = (H_n(X, B; \mathbb{Q}), H_{\text{dR}}^n(X, j; \mathbb{Q}_U))$ を得る.

(ステップ 2) $H = (H^{\text{Betti}}, H_{\text{dR}})$ を先程の \mathbb{Q} -混合 Hodge 構造, $p_w(H)$ を $p_w(H) = \{ \langle \gamma, \omega \rangle \mid \gamma \in H_w^{\text{Betti}}, \omega \in F^w H_{\text{dR}} \}$ で定義される周期の空間とする時, 重さ w の多重ゼータ値の空間 L_w は次の包含関係を持つ事が分かる:

$$L_w \subset p_w(H) \cap \mathbb{R}$$

(ステップ 3) 更に, $N_w = \{ \{a_1, \dots, a_w\} \mid 0 \leq a_1 < \dots < a_w \leq w, a_{i+1} - a_i \text{ が } 1 \text{ 以上の奇数} \}$, $S = \{a_1 < \dots < a_\ell\}$, (ℓ は適当な自然数) $p_w(S) = \{S\text{-型混合 Hodge 構造 } H \text{ に関して } p_w(H) \text{ で生成されるもの} \}$ とする時, 次の包含関係が成り立つ:

$$p_w(H) \subset \sum_{S \in N_w} p_w(S)$$

ただし, S -型混合 Hodge 構造とは, 上で定めた集合 S に対して, S に属さない整数 n に対しては, $\text{Gr}_n^w = 0$ を満たすような混合 Hodge 構造の事を指す.

(ステップ 4) 自然数 a に対して, 次の数 (‘奇の分割’) を定義する:

$$d(a) = \# \left\{ (b_1, b_2, \dots) \mid \text{各 } b_i \text{ は } 1 \text{ 以上の奇数で, } \sum_i b_i = a \text{ を満たす} \right\}$$

この数 $d(a)$ に関して, 次の評価が成り立つ:

$$\dim \left(\sum_{S \in N_w, S \in [a, w]} p_w(S) \middle/ \sum_{S \in N_w, S \in [a+1, w]} p_w(S) \right) \leq d(w - a)$$

各 $d(w - a)$ に対して, 次の数 d_w を考える:

$$d_w = \sum_{0 \leq a \leq w, a \text{ は偶数}} d(w - a)$$

この d_w は関係式 $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_w = d_{w-2} + d_{w-3}$ ($3 \leq w$) を満たしている.

以上のステップにより, 次元予想に対する上からの評価 $\dim L_w \leq d_w$ が示された事になる.

1.6 ここで述べられなかった話題

本節での内容に関連する話題ではあるが, 本稿で述べられなかったものの中で, その幾つかを以下に簡単にまとめておきたい:

- 多重ゼータ値の p -進版 (p -進多重ゼータ値) が, 古庄氏によって考案され, 次元予想へのアプローチが山下氏によって同様に考案されている. 筆者はこの理論を語る力が無いが, 例えば [Fur2], [Yam] が, この方面の研究の方向性を知る上では参考になると思う. (ここで引用しているのはいずれも講義録の記事であるが, より詳細については, それらの記事で引用されている論文を参照して欲しい.)

- 多重ゼータ値と混合 Tate モチーフの圏が密接に関わる事をこれまでに見てきたが、更に混合 Tate モチーフの圏の淡中 Lie 環 $\mathcal{F}(3, 5, 7, \dots)$ (次数 $3, 5, 7, \dots$ の生成元が 1 つずつ存在する⁸) の包絡代数と多重ゼータ値の空間 (代数) とが双対同型である事が予想されている:

$$L \simeq \mathbb{Q}[\pi^2] \otimes \mathcal{UF}(3, 5, 7, \dots)^\vee$$

この予想から Zagier の次元予想も従う。

- 多重ゼータ値の重さと深さの概念から、多重ゼータ値の空間には次数とフィルターが定義され、各次数、各フィルターの‘各階層’に存在する生成元に関する予想として、Broadhurst-Kreimer の予想がある。([BK]; ここではこの予想に関する事は述べないので、この原論文か、もしくは [IhaK] を参照。) この予想へのアプローチとして、Goncharov, 井原-落合の仕事がある。後者については、[IhaK] がその報告である。

2 Drinfel'd アソシエータと Grothendieck-Teichmüller 群

この節では、Drinfel'd アソシエータと Grothendieck-Teichmüller 群の関係を述べ、この関係に関わりのある幾つかのトピックの紹介をする。2.1 節で Drinfel'd アソシエータ (及びそれを含むアソシエータ) の考え方を導入し、前節までに述べた正規化された双シャッフル関係式がアソシエータの言葉で定式化される事を見る。2.2 節で Drinfel'd アソシエータが多重ゼータ値の母関数である事 ([LM2]) の証明の概略を述べる。2.3 節において Grothendieck-Teichmüller 群の考え方を導入した後に、2.4 節で Drinfel'd アソシエータとの関わりについて述べる。更に 2.5 節では、量子化の理論の 1 つである変形量子化を巡る話題について述べる。

2.1 Drinfel'd アソシエータとは何か

Drinfel'd アソシエータについては、既に多くの優れた文献が存在する。([Oku],[Oht]) この節では、2.1.1 において 共形場理論における基礎方程式である Knizhnik-Zamolodchikov 方程式を導入した後、Drinfel'd アソシエータを定義する。2.1.2 において、その代数的な記述について述べ、これを用いた Racinet による (先の 1.2 において述べた) 正規化された双シャッフル関係式の再定式化の仕事について述べる。

2.1.1 Drinfel'd アソシエータ：解析的導入

$\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上の Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (以後、KZ 方程式と略す) とは、次の Fuchs 型微分方程式の事である:

$$\frac{dG(z)}{dz} = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) G(z)$$

ただし $\mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ は、非可換変数 $e_0 = \text{Res}_0, e_1 = \text{Res}_1$ に関する形式的冪級数全体を表す環であり、関数 $G = G(z)$ は $G : \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\} \rightarrow \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ とする。この方程式は次の性質を持つ 2 つの基本解 $G_0(z), G_1(z)$ を持つ:

$$\lim_{t \rightarrow +0} G_0(t)t^{-e_0} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} G_1(t)(1-t)^{-e_1} = 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

この性質を持つ基本解 $G_0(z), G_1(z)$ はそれぞれ一意である事に注意する。

⁸淡中 Lie 環の n 次の生成元の個数は $\dim K_{2n+1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$ 個である:

$$\dim K_{2n-1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数又は } n = 1 \\ 1 & n \text{ は } 1 \text{ 以外の奇数} \end{cases}$$

この Lie 環と安定導分環 (stable derivation algebra) との関係を論じたものが [Fur4] である。

定義 2.1. Drinfel'd アソシエータ $\Phi_{\text{DR}} = \Phi_{\text{DR}}(e_0, e_1) \in \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ を次で定義する:

$$\Phi_{\text{DR}}(e_0, e_1) = G_1^{-1}(z)G(z)$$

Drinfel'd アソシエータは z の値に依らず, 次の表示を持つ ([Kas],[Oht]):

$$\Phi_{\text{DR}}(e_0, e_1) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-e_1} \exp \left(\int_t^{1-t} \omega \right) t^{e_0}, \quad \omega = e_0 \frac{dt}{t} + e_1 \frac{dt}{t-1} \in \Omega^1(\log S), \quad S = \{0, 1\}$$

また, 2.2 節で示すように, Drinfel'd アソシエータに関して最も重要な性質の 1 つは, それが多重ゼータ値の母関数となっている事である. すなわち, k_1, \dots, k_{n-1} を自然数, k_n を 2 以上の整数とした時に, $e_0^{k_1} e_1 e_0^{k_1} e_1 \cdots e_0^{k_n} e_1$ の係数が多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ となっている事である. この証明は, 後の 2.2 節で述べる.

注意 2.2. (1) 上で与えた KZ 方程式は, より一般的な次の方程式

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} = \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} \frac{e_{ij}}{z_i - z_j} G, \quad G = G(z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

の $n = 3$ の場合になっている. この方程式は共形場理論の情報から構成される方程式である. その導出の詳細については, [Oht] を参照. Drinfel'd アソシエータの場合は多重ゼータ値が本質的に関わるが, 一般の n の場合には多重 L -値が本質的に関わる.

(2) 上の $\mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ は, 1.4 節で述べた $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の de Rham 基本群 $\pi_1^{\text{dR}}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ である. (繰り返しになるが,) Drinfel'd アソシエータは, 1.4 節で述べた比較同型 $\text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}}: \pi_1^{\text{Betti}} \rightarrow \pi_1^{\text{dR}}$ を用いると,

$$\Phi_{\text{DR}}(e_0, e_1) = \text{comp}_{\text{Betti}}^{\text{dR}}([0, 1])$$

を満たす.

2.1.2 Drinfel'd アソシエータ: 代数的定式化

Drinfel'd アソシエータ Φ_{DR} は次の関係式を満たす⁹:

i. (双対性) $\Phi_{\text{DR}}(e_0, e_1) = \Phi_{\text{DR}}(e_1, e_0)^{-1}$

ii. (群のような元) 環準同型

$$\Delta: \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \otimes \mathbb{C} \langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle, \quad e_i \mapsto e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i, \quad i = 0, 1$$

を用いると, 次の関係式が成り立つ:

$$\Delta(\Phi_{\text{DR}}(e_0, e_1)) = \Phi_{\text{DR}}(e_1, e_0) \otimes \Phi_{\text{DR}}(e_1, e_0)$$

これより, Φ_{DR} は群のような元 (group like element) と呼ばれる.

iii. (六角形関係式) $e_\infty = \text{Res}_\infty, e_0 + e_1 + e_\infty = 0$ を使って,

$$e^{e_0} \Phi_{\text{DR}}(e_1, e_0) e^{e_1} \Phi_{\text{DR}}(e_\infty, e_1) e^{e_\infty} \Phi_{\text{DR}}(e_0, e_\infty) = 1$$

と表される関係式を 六角形関係式 (hexagon relation) と呼ばれる.

⁹ これらの関係式の証明は, 日本語の文献だと, 例えば [Oku] を参照.

iv. (五角形関係式)

$$\Phi_{\text{DR}}(e_{23}, e_{12})\Phi_{\text{DR}}(e_{51}, e_{45})\Phi_{\text{DR}}(e_{34}, e_{23})\Phi_{\text{DR}}(e_{12}, e_{51})\Phi_{\text{DR}}(e_{45}, e_{34}) = 1$$

この五角形関係式 (pentagon relation) は $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\} = \mathcal{M}_{0,4}$ を, コンパクト化 $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ の境界 $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ の管状近傍に埋め込む埋め込み方から来る関係式であり, 各 e_{ij} は, (n の増加に伴う,) KZ 方程式に現れる非可換変数達である¹⁰.

注意 2.3. 最近古庄氏によって, 五角形関係式から六角形関係式が導かれる事が示された. ([Fur5])

Drinfel'd アソシエータの満たすべき関係式を列挙したが, 逆にこれらの関係式を公理とする $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の要素が定義できる.

定義 2.4. 上の i. から iv. を満たし, 1 から始まる $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の要素

$$\Phi = \Phi(e_0, e_1) \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

を アソシエータ (associator) と呼び, 「公理」i. から iv. を アソシエータ関係式 (associator relation) と呼び, アソシエータ全体の集合を Ass と書く事にする.

アソシエータの視点に立つと, Drinfel'd アソシエータはアソシエータの一例であり, かつ かなり具体的な記述を持つアソシエータである事が分かる.

2.1.3 正規化された双シャッフル関係式: 再訪

前節で Drinfel'd アソシエータの代数的な側面や, Drinfel'd アソシエータとは限らない一般のアソシエータの定義を述べたが, ここではそれらの言葉を使って, 正規化された双シャッフル関係式をもう一度理解し直し, それに関わる Deligne-寺杣の結果について, [DT] に従って述べたい.

$y_i = -e_0^{i-1}e_1$ ($i = 1, 2, \dots$), $\mathcal{W} = \mathbb{C}\langle\langle y_1, y_2, \dots \rangle\rangle$ とおく. また, Drinfel'd アソシエータ Φ_{DR} を展開して $1 + \varphi_1 e_1 + \varphi_0 e_0$ と書く時, $\Phi_{\text{DR}, Y} = 1 + \varphi_1 e_1$ とおくと, これは \mathcal{W} の要素になっている. この \mathcal{W} には 調和余積 (harmonic coproduct) と呼ばれる環準同型が定義できる:

$$\Delta_* : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}, \quad y_n \mapsto \sum_{i=0}^n y_i \otimes y_{n-i}$$

また, 先ほどの $\Phi_{\text{DR}, Y}$ を次のように修正する:

$$\Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{reg}} = (e^{\gamma y_1} \Gamma(y_1 + 1))^{-1} \Phi_{\text{DR}, Y}$$

ここで γ は Euler 定数である. この修正された $\Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{reg}}$ に関する主張が, 次である:

定理 2.5 ([Rac], 正規化された調和シャッフル関係式).

$$\Delta_*(\Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{reg}}) = \Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{reg}} \otimes \Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{reg}}$$

注意 2.6. この関係式と, 反復積分から得られるシャッフル関係式を合わせて, 正規化された双シャッフル関係式を得る.

次に, \mathcal{W} から可換な形式的冪級数環 $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ への自然な写像に関する, $\Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{reg}}$ の像を $\Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{ab}}$ と書く事にすれば, これは次のように特徴付けられる:

$$\Phi_{\text{DR}, Y}^{\text{ab}} = \frac{\Gamma_{\text{DR}}(-e_0)\Gamma_{\text{DR}}(-e_1)}{\Gamma_{\text{DR}}(-e_0 - e_1)}, \quad \Gamma_{\text{DR}}(s) = e^{\gamma s} \Gamma(1 + s) \in 1 + s^2 \mathbb{C}\llbracket s \rrbracket$$

ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数である.

Φ を任意のアソシエータとし, $\Phi = 1 + \varphi_1 e_1 + \varphi_0 e_0$ と表す時, 先程と同様にして $\Phi_Y = 1 + \varphi_1 e_1$ とおく. この時, 先程の Drinfel'd アソシエータと同じ状況が再現できる, というのが次の主張である:

¹⁰より詳しい解説は [Oku] を参照.

定理 2.7 ([DT]). アソシエータ関係式から, 全ての双シャッフル関係式が導かれる. すなわち, 関数 $\Gamma_\Phi(s) \in 1 + s^2\mathbb{C}[[s]]$ がただ 1 つ存在し, Φ_Y の可換な冪級数環 $\mathbb{C}[[e_0, e_1]]$ への像 Φ_Y^{ab} が,

$$\Phi_Y^{ab} = \frac{\Gamma_\Phi(-e_0)\Gamma_\Phi(-e_1)}{\Gamma_\Phi(-e_0 - e_1)}$$

で特徴付けられる. また, Φ_Y の修正を $\Phi_Y^{reg} = \Gamma(y_1)^{-1}\Phi_Y \in \mathcal{W}$ で定義する時, 次の関係式が成り立つ:

$$\Delta_*(\Phi_Y^{reg}) = \Phi_Y^{reg} \otimes \Phi_Y^{reg}$$

この結果から, 予想 1.7 が肯定的に解決されれば, 多重ゼータ値の間に成り立つ全ての \mathbb{Q} -線形関係式は, アソシエータ関係式から導かれる事になる.

注意 2.8. この結果を, 解析的な立場, すなわち 2.1.1 節での KZ 方程式との解の接続問題から見直した結果が [Uen] で報告されている.

2.2 多重ゼータ値の母関数としての Drinfel'd アソシエータ

この節では, Le-村上 ([LM2]) による Drinfel'd アソシエータは多重ゼータ値の母関数である, という事実の証明の概略を述べる. (これは 2.1.1 節で事実として述べた.)

証明の鍵となるのは, Drinfel'd アソシエータの「核」となる次の積分

$$\exp\left(\int_t^{1-t} e_0 \frac{dt}{t} + e_1 \frac{dt}{t-1}\right)$$

であり, これが次のような反復積分表示を持つ.

$$\exp\left(\int_t^{1-t} e_0 \frac{dt}{t} + e_1 \frac{dt}{t-1}\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1-t} \alpha_m \alpha_{m-1} \cdots \alpha_1, \quad \alpha_i = \left(\frac{e_0}{t_i} + \frac{e_1}{t_i-1}\right) dt_i$$

これを元に, 次のステップで証明をする:

(ステップ 1) $\omega_i = \frac{dt_i}{t_i - \varepsilon_i}$ とおく. ただし, $i = 0$ の時 $\varepsilon_i = 0$, $i = 1$ の時 $\varepsilon_i = 1$ とする.

自然な制限写像 $\psi: \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle / (e_1\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle, \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle e_0)$ を考え, e_0 を ω_0 , e_1 を ω_1 と見なす. この時, 次の極限

$$G = \lim_{t \rightarrow 0} \psi \exp\left(\int_t^{1-t} e_0 \frac{dt}{t} + e_1 \frac{dt}{t-1}\right)$$

を考える. G は $\mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$ の要素であり, これを積分表示した時, 各係数は多重ゼータ値となる.

(ステップ 2) 次の 2 つの写像を作る:

$$\phi_1: \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle[[A, B]], \quad e_0 \mapsto e_0 - A, \quad e_1 \mapsto e_1 - B$$

$$\phi_2: \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle[[A, B]] \rightarrow \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle, \quad A^p X B^q \mapsto e_0^p X e_1^q, \quad X \in \mathbb{C}\langle\langle e_0, e_1 \rangle\rangle$$

ただし, A, B は可換な変数とする.

(ステップ 3) 最後に $\phi_2 \circ \phi_1(G) = \Phi_{\text{DR}}$ となる事を示す.

2.3 Grothendieck-Teichmüller 群

Grothendieck-Teichmüller 群 \widehat{GT} は, Drinfel'd によって 擬三角擬 Hopf 量子化普遍包絡代数 (quasi-triangular quasi-Hopf quantized universal enveloping algebra) の構造 (或いはその変形) の研究の中で導入された ([Dri]) 対象であり, 絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ のある種のモデルとして理解される. $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の構造を知る方法としては, 数論幾何学では Galois 表現を研究するという方法がよく知られているが, Grothendieck-Teichmüller 群はより直接的に $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を理解したいという試みであり, その試み自体は Grothendieck にまで遡る. これについては, 既に多くの専門家による優れた解説が多く存在し (例えば [LS],[Schn],[Nak],[Fur3] など), 筆者はその全容を語る事はできないが, ここでは, その考え方の基本となる背景と, その (複雑に見える) 定義の紹介, 及びその意味について簡単に述べたい. (より詳細に興味を持たれた方は, これらの文献に当たってみると良いと思う. ここでの記述は [Schn] を参考にした.)

2.3.1 考え方の背景と定義

まずは定義を見てみよう.

定義 2.9. Grothendieck-Teichmüller 群 \widehat{GT} とは,

$$\widehat{GT} = \{(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}_2' \mid x \mapsto x^\lambda, y \mapsto f^{-1}y^\lambda f \text{ が } \widehat{F}_2 \text{ の自己同型を引き起こし, (条件) を満たす} \}$$

で定義される群の事である. ただし, (条件) とは, 次で定義される 3 つの条件の事である:

- (2 巡回関係式) $f(x, y)f(y, x) = 1$
- (3 巡回関係式) $f(x, y)x^m f(z, x)z^m f(y, z)y^m = 1$ ただし, $xyz = 1, m = \frac{\lambda - 1}{2}$
- (5 巡回関係式) $f(x_{12}, x_{23})f(x_{45}, x_{51})f(x_{23}, x_{34})f(x_{51}, x_{12})f(x_{34}, x_{45}) = 1$ ただし, x_{ij} は点 i, j を囲むループに沿っての Dehn の捻りを表す. (後で説明する.)

ここで, \widehat{F}_2 は自由群 $F_2 = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$ の副有限完備化であり, $\widehat{F}_2' = [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$ であり, $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は,

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \varprojlim (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \simeq \prod_p (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

であり, \mathbb{Q} の極大アーベル拡大を \mathbb{Q}^{ab} と書く事にすると, $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{\text{ab}}/\mathbb{Q}) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ である.

この節では, この定義で与えられる群 \widehat{GT} を考える起源を説明したい. この起源を説明する為に, Grothendieck による *Esquisse d'un Programme*¹¹まで遡ろう.

(1) 最初に, $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}_2'$ が $x \mapsto x^\lambda, y \mapsto f^{-1}y^\lambda f$ という \widehat{F}_2 の自己同型を引き起こす, という条件は何を意味している (考えている) のか, を説明する.

\mathbb{Q} の絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の構造を研究する手法の 1 つとして, 代数多様体, スキームやスタックのような幾何学的対象の基本群に作用させて, その様子を観察する事を考える. ここで特に幾何学的対象として想定しているのは, 種数 g で n 点付きの完備非特異代数曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ であり, その典型例は, これまで考えてきた $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ である.

Esquisse d'un Programme で述べられている問題の 1 つは, 各要素 $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して, 次の $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}_2'$ の要素を対応させる, というものである:

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}_2', \quad \sigma \mapsto (\chi(\sigma), f_\sigma)$$

¹¹この論説は, [LS] に, フランス語と英語版が掲載されている.

ただし, $\chi: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ は

$$\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\chi'(\sigma)}, \quad \chi'(\sigma) = \chi(\sigma) \bmod n, \quad \zeta_n = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}$$

で定める 円分指標 (cyclotomic character) である. これは次のように考えると実現される: X を $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ として, Belyi の定理より, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $\widehat{\pi}_1(X)$ への標準的な外 Galois 表現 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Out}(\widehat{\pi}_1(X))$ が存在する. ここで, $\widehat{\pi}_1(X)$ は位相的基本群 $\pi_1(X) = F_2$ の副有限化で得られる代数的基本群 \widehat{F}_2 である. 群拡大

$$1 \longrightarrow \widehat{F}_2 \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\phi} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1$$

における ϕ には Belyi 切断と呼ばれる切断が存在し, これによって Galois 表現

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}\widehat{F}_2$$

が定義される. これを外 Galois 表現の Belyi 持ち上げ (Belyi lift) と呼ぶ.

各 $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して $\alpha, \beta, \lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times, f, g \in \widehat{F}_2$ が存在し,

$$\sigma(x) = x^\alpha, \quad \sigma(y) = g^{-1}y^\beta g, \quad \sigma(z) = h^{-1}z^\lambda h$$

が, \widehat{F}_2 の, σ の標準的な外部作用の Belyi 持ち上げを与えるものが存在する. これを $\widehat{F}_2^{\text{ab}} = \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{\mathbb{Z}}$ に制限して考えると, $\alpha = \beta = \lambda$ となり, 適当な変数変換の下で,

$$\sigma(x) = x^\lambda, \quad \sigma(y) = f^{-1}y^\lambda f, \quad f \in \widehat{F}'_2$$

が σ の外 Galois 表現の Belyi 持ち上げとしてユニークに定まり, 対応 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}'_2$ が定まる. ここで, この写像は群準同型では無い事に注意しておく.

以上で述べた事は, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ のような途方もない対象が, $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}'_2$ のような幾分理解ができそうな対象を使って研究ができそうだと, という事である. 従って, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の構造を研究する上でとりあえず重要なのは, $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}'_2$ の要素であって, $x \mapsto x^\lambda, y \mapsto f^{-1}y^\lambda f$ なる自己同型を引きこすもの全体を研究する事であろう, と主張している訳である.

(2) 次に, 条件 () 中の (5 巡回関係式) の意味について簡単に述べる. 他の巡回関係式は, 組み紐群の言葉を用いた幾何学的な解釈があるが, ここでは省略する.

$\mathcal{M}_{g,n}$ の位相的基本群を 写像類群 (mapping class group) と呼び, $\Gamma_{g,n}$ と書く. この副有限化を $\mathcal{G}_{g,n}$ と書く事にする. 写像類群 $\Gamma_{g,n}$ は, 単純閉曲線に沿った Dehn の捻り (Dehn twist) と呼ばれる微分同相写像で生成されており, 例えば $g=0, n=4$ (4 点は $0, 1, \infty, x$ とする) の場合,

$$\pi_1(\mathcal{M}_{0,4}, x) = F_2 = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$$

であって, x, y, z はそれぞれ 0 と $1, 1$ と $\infty, 0$ と ∞ を囲む単純閉曲線上での Dehn の捻りに対応している. ([Nak] では「 $\mathcal{M}_{0,5}$ 内の無限遠正五角形」を使ってこの関係式に意味を与え, 更にこの観点から $g \geq 1$ の場合に延長している.)

定義 2.9 の (5 巡回関係式) は, 種数 0 の 5 点付きの場合における関係式であって, それは $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $\mathcal{G}_{0,4}$ への作用が, (忘却準同型 $\mathcal{G}_{0,5} \rightarrow \mathcal{G}_{0,4}$ に関して) $\mathcal{G}_{0,5}$ へ拡張できる為の必要十分条件となっている. 5 点をそれぞれ $1, 2, 3, 4, 5$ と番号付けた時に, 各 x_{ij} は, i と j を含む単純閉曲線に沿った Dehn の捻りを表している. (図 2)

以上の説明は, 次の事実 (とその証明) に集約される:

定理 2.10 ([IhaY]). 単射 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{GT}$ が存在する.

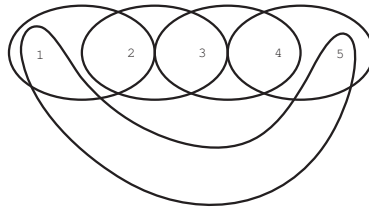


図 2: Dehn の捻りに対応する 5 本の単純閉曲線 x_{ij} 達 (各点を番号で書いてある.)

この事実は, Drinfel'd によって示唆され, 伊原によって証明された. (伊原による証明の解説は, [Fur] にもある.) なお, 全射性についての結果は知られていない.

ここでは述べられなかったが, Grothendieck-Teichmüller 群に関する重要な側面として, 子供のお絵描き (dessins d'enfants) と積み木遊び (game of Lego-Teichmüller) がある. これらについては, [Schn] もしくは [Nak] に詳しく書かれている.

Grothendieck-Teichmüller 群には, その次数付き版もある. ([Dri] 5 節で導入されたが, その解説が, 例えば [Fur3] 或いは [Bar] にある.) その考え方は, 大雑把に言えば, 先の群 \widehat{GT} の定義における \widehat{F}'_2 を, $\mathbb{C}\langle e_0, e_1 \rangle$ のある部分集合 L を使って $\exp([L, L])$ に取り替える事であり, ここで言う次数とは, e_0, e_1 の次数に由来する '自然な' 次数の事である.

2.4 Bar-Natan のプログラムの周辺: Drinfel'd アソシエータとの関わり

2.1 節 (特に 2.1.2 節) で述べた Drinfel'd アソシエータと Grothendieck-Teichmüller 群との関わりあいについて, [Bar] に従って述べる.

Drinfel'd [Dri] において, \mathbb{Q} -係数の Drinfel'd アソシエータの存在が示されたが, 明示的な表式が求められた訳では無かった. Bar-Natan [Bar] は [Dri] を Bar-Natan なりの理解で読み解く事を試み, 次の結果を得た:

定理 2.11 ([Bar] Theorem 4). 次数が m 以下の \mathbb{C} -係数アソシエータ全体の集合を Ass_m と書く事にする. この時, 自然な写像 $\text{Ass}_m \rightarrow \text{Ass}_{m-1}$ は全射である.

この定理は, \mathbb{Q} -係数のアソシエータを, 次数の低いものから反復的に構成できる事を意味しており, 定理の証明がその構成法 (の 1 つ) を与えていると考えられる. (が, 筆者は \mathbb{Q} -係数の Drinfel'd アソシエータの明示的式をまだ見たことが無い.) 証明には, 先の節で導入した次数付き Grothendieck-Teichmüller 群を使う. また, [Bar] Proposition 5.3. には, アソシエータの集合 Ass への Grothendieck-Teichmüller 群 \widehat{GT} の作用の明示的な式が与えられている.

また, 同じ種類の議論として, Drinfel'd アソシエータが現れる, 向き付けられた結び目の Vassiliev 不変量全体, 或いはコード図 (chord diagram) の空間にも Grothendieck-Teichmüller 群の作用がある事が知られている.

2.5 量子化の理論との関わり合い

最後に, これまで述べた幾つかの概念と変形量子化ないし形式的量子化と呼ばれる量子化の考え方について, 予想される関係を [Kon2] に従って述べておく. 変形量子化或いは形式的量子化とは, 数学的に定式化された量子化の形式の 1 つであり, 微分可能多様体の枠組みにおいては, この量子化は, 形式性という概念

を核として，一般の Poisson 多様体上での存在が [Kon1] において証明されている¹²¹³．代数多様体の枠組みにおいては，微分可能多様体の枠組みでのアプローチの類似以外に，層の変形理論を用いたスタック的アプローチが [Kon3] で提唱され，[Low],[Ber],[Yek] などでの視点での理解が進められている．

2.5.1 量子化とは何か

簡単の為，考える多様体 M は \mathbb{R}^n の場合のみを考える¹⁴．可換環 $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上には，可換な積 $\cdot : A \times A \rightarrow A$ が定まっているが，この積を次で定義する別の積 $*$ に置き換える：

$$f * g := f \cdot g + \hbar B_1(f, g) + \hbar^2 B_2(f, g) + \dots, \quad f, g \in A$$

ここで各 B_i は C^∞ 写像であり， \hbar はパラメータとする．積 $f * g$ の行き先は正確には $A[\hbar] = A \otimes \mathbb{R}[[\hbar]]$ があるので，この積の置き換え $\cdot \rightarrow *$ を考える為には，積 $*$ を $A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \rightarrow A[[\hbar]]$ と考える．ここで定義した可換とは限らない結合的積 $*$ を形式量子化 (formal quantization) と呼ぶ．各 B_i を取り替える事によって様々な形式量子化 $*$ を得るが，形式量子化全体には次の $A[[\hbar]]$ の自己同型群 (ゲージ群 (gauge group))

$$\text{Aut}(A[[\hbar]]) = \{ \alpha : A[[\hbar]] \rightarrow A[[\hbar]] \mid \alpha(f) = f \text{ mod } \hbar A[[\hbar]] \}$$

の作用がある．ある $\alpha \in \text{Aut}(A[[\hbar]])$ が存在して $\alpha(f * g) = \alpha(f) *' \alpha(g)$ を満たす 2 つの形式量子化 $*$, $*'$ はゲージ同値 (gauge equivalence) であると言う．

次の補題が成り立つ：

補題 2.12. 形式的量子化 $*$ として，結合的かつ非可換なものを考える．任意の $a, b \in A$ に対して， $\{, \}$: $A \times A \rightarrow A$ を $\{a, b\} = B_1(a, b) - B_1(b, a)$ と定める時， $\{, \}$ は Poisson 括弧であり，形式量子化 $*$ のゲージ同値類にのみ依存する．

この補題の主張する事は，次の写像

$$\{A \text{ の形式量子化のゲージ同値類} \} \rightarrow \{A \text{ 上の Poisson 構造} \}$$

が単射である，という事であるが，Kontsevich が [Kon1] で示した事は，これが全射でもある，(或いは切断を持つ) という事である．これが成り立つ事には， $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の無限次元である事が本質的である事が効いている¹⁵．

この証明を次の 2 ステップで行う：

(ステップ 1) 形式的量子化 $*$ は結合的である事が重要であり，先の $f * g$ を定義する際に用いた B_i 達を用いると， $*$ の結合性は，任意の 0 以上の整数 m に対して次が成り立つ事と同値である：

$$\sum_{i+j=m, i, j \geq 0} B_i(B_j(f, g), h) = \sum_{i+j=m, i, j \geq 0} B_i(f, B_j(g, h))$$

これを多重微分作用素の空間 $D_{poly}M$ の Hochschild コホモロジーを定義する Hochschild 余境界作用素 ∂ を用いて次のようにまとめられる：

$$\partial B_m = -\frac{1}{2} \sum_{i+j=m, i, j \geq 1} [B_i, B_j], \quad [B_i, B_j](f, g, h) = 2((B_i(B_j(f, g), h) - B_i(f, B_j(g, h))))$$

¹² 詳細まで踏み込んだ内容まで書かれたものは，日本語の文献だと [KM] がある．ここでの記述は概ね [KM] に沿っているが，完全に沿ってはいない．英語の文献であれば，[Kel] が良いと思う．

¹³ 確かに Kontsevich によるホモトピー代数的手法を使った解決は 1 つのブレイクスルーではあったが，変形量子化自体はそれ以前から，微分幾何学的手法を使ってシンプレクティック多様体上で考えられていた．例えば [KM] には Kontsevich 以前の変形量子化の考え方・研究に触れられている．

¹⁴ 実は $M = \mathbb{R}^n$ 以外の場合にはあまり理解されていない，という事情もある．

¹⁵ 有限次元の場合の反例が Mathieu [Mat] によって示されている．

従って、実際に $*$ を構成する時は、この方程式を解いていけば良い。更にこの方程式は、次数付き微分 Lie 代数 (DGLA) の言葉では、Maurer-Cartan 方程式と呼ばれる。

$T_{poly}M$ を M 上の多重ベクトル場の成す空間とする。形式量子化 $*$ が存在する必要十分条件は、 $*$ が上の方程式を満たす事であるが、実は、 $T_{poly}M, D_{poly}M$ のそれぞれを次数付き微分 Lie 代数と思つた時、 $T_{poly}M$ から $D_{poly}M$ への Maurer-Cartan 方程式の解を保つ写像が存在する事と同値である。いきなりこの写像を作る事は難しいが、Maurer-Cartan 方程式の解を保つ事を忘れた、自然な線形写像 $\mathcal{F}_1 : T_{poly}M \rightarrow D_{poly}M$ は定義できる。この \mathcal{F}_1 は $T_{poly}M$ と多重微分作用素の空間 $D_{poly}M$ の Hochschild コホモロジーの間の同型を導き、これは標数 0 の体 k 上の滑らかなアファイン多様体 X に対して、 \mathcal{O}_X の Hochschild コホモロジーが X 上の代数的多重ベクトル場の空間と自然に同型になる、という Hochschild-Kostant-Rosenberg の結果の C^∞ -類似になっている。

(ステップ 2) 先程の (ステップ 1) で述べた自然な線形写像 \mathcal{F}_1 は、Maurer-Cartan 方程式の解を保たない。従って、DGLA のレベルでは Maurer-Cartan 方程式の解を保つように線形写像を定める事が難しいので、DGLA を含む L_∞ -代数 (L_∞ -algebra) と呼ばれるホモトピー代数に議論を格上げして考える。 $(L_\infty$ -代数や、より一般的な A_∞ -代数は、特にホモロジー的ミラー対称性の文脈でよく登場する。 L_∞ -代数の基礎は、[KM] を参照。) 議論を格上げして得られる大きな主張は、次の形式性定理と呼ばれる定理である：

定理 2.13 (形式性定理). $T_{poly}M, D_{poly}M$ をそれぞれ含む L_∞ -代数を $(V_1, Q), (V_2, Q)$ と書く事にする。この時、 (V_1, Q) から (V_2, Q) への L_∞ -写像 \mathcal{F} であつて、その \mathcal{F}_1 -部分が、(Step 1) で与えたものと一致するものが存在する。

Kontsevich はグラフを使った驚くべき手法で L_∞ -写像を具体的に構成したが、その構成された L_∞ -写像の各‘係数’部分に現れる積分

$$w_\Gamma = \int_{C_{n,m}} \theta_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{\dim C_{n,m}}} \int_{C_{n,m}} \bigwedge_{\text{辺}} \text{darg} \left(\frac{z_j - z_i}{z_j - \bar{z}_i} \right)$$

が Drinfel'd アソシエータの係数に現れる積分と似ている事に気付いた。ここで、 Γ はグラフであり、各 z_i, z_j は各辺の端点であり、 $C_{n,m}$ は $n+m$ 点の配置空間を然るべき自己同型で割つたものであり、各グラフの‘住み家’である。(精密な議論をする際には、Fulton-MacPherson コンパクト化と類似のコンパクト化した空間 $\bar{C}_{n,m}$ 上で考える必要がある。) 形式的量子化の存在自体は上の 2 つのステップの証明で尽きているのだが、変形量子化の構成で本質的なこの構造と Drinfel'd アソシエータの構造との類似により、形式的量子化と、先に述べた Grothendieck-Teichmüller 群との関わりが気になるのは自然な興味であると思われる。いずれも周期 (period) と呼ばれるクラスの数である。

注意 2.14. (1) 上の形式性の定理には別証明が幾つか知られている。その内 Tamarkin によるオペラッドを使った証明 [Tam] では、Drinfel'd アソシエータが用いられている。

(2) 上では $M = \mathbb{R}^n$ の場合を扱っているが、例えば M として有限次元 Lie 環 \mathfrak{g} の双対 \mathfrak{g}^* を考える場合、上の形式性定理によって得られる写像の次数 0 の部分は

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \rightarrow Z(U(\mathfrak{g}))$$

であり、これは Duflo 同型 [Duf] である。([Kon1]) ただし、 $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ は \mathfrak{g} -不変な \mathfrak{g} 上の対称代数であり、 $Z(U(\mathfrak{g}))$ は \mathfrak{g} の普遍包絡環の中心を表す。この例は表現論の観点からも基本的でかつ重要である。

2.5.2 予想される関わり合い

この節では [Kon2] の後半の内容に従って、前節で述べた‘予想される関わり合い’の幾つかを述べる。ここで述べる事は、所謂‘思惑 (speculation)’に属するものであり、まだその殆どが理解されていない示唆的な内容であることを最初にお断りしておきたい。

変形量子化への Grothendieck-Teichmüller 群の作用の記述

変形量子化への Grothendieck-Teichmüller 群の作用の例が 2 つ [Kon2] では報告されているが、いずれも M が有限次元 Lie 環 \mathfrak{g} の場合である。ここでは初めの例だけを簡単に解説する。

先程の注意 2.14(2) で述べたように、 M が有限次元 Lie 環である場合は、形式性写像は Duflo 同型を意味する。この Duflo 同型を定義する際に現れる $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ の自己同型は、次の形式的冪級数 $f(x)$ で生成されるが、これを別の級数 $f'(x)$ で置き換えることを考えても Duflo 同型は「変わらない」事が指摘された:

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}}, \quad f'(x) = f(x) \cdot \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i+1}\right)$$

この $f(x)$ の取り替えの操作が Grothendieck-Teichmüller 群の作用であるが、Duflo 自身によって、この作用は「自明」である事が指摘されている。(Kontsevich 自身は [Kon2] において、有限次元 Lie 環ではなく、有限次元超 Lie 環 (Lie superalgebra) においては、非自明な例があるのではないかと述べている。)

Grothendieck-Teichmüller 群とモチーフ的 Galois 群の関係

Grothendieck-Teichmüller 群は、先に述べたように Galois 群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ を理解する為に、直接的に構成されたものであったが、その拡張であり、より大きな対称性を操るモチーフ的 Galois 群とどのような関係にあるのか、については定かではない。しかし、Kontsevich は、周期の成す環のスペクトラムにモチーフ的 Galois 群が作用する事に注目し、次の予想を立てた:

予想 2.15. \mathcal{P} を周期の成す代数とし、 $(2\pi\sqrt{-1})^{\pm}$ と $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上不分岐な混合 Tate モチーフの周期で生成される \mathcal{P} の部分代数を \mathcal{P}_{MTM} とする。 $\text{Spec } \mathcal{P}_{\text{MTM}}$ には $(\mathbb{Q}$ 上) 副可解かつ連結なモチーフ的 Galois 群の商が推移的に作用しており、なおかつこのモチーフ的 Galois 群の商は Grothendieck-Teichmüller 群 \widehat{GT} と一致する。更に、このモチーフ的 Galois 群の商は \mathbb{G}_m の副冪単群による拡大であり、かつその副冪単代数群の Lie 代数が \mathbb{G}_m の作用によって次数付けられた、次数が 3 以上の奇数 $(3, 5, 7, \dots)$ である要素達で生成される自由 Lie 代数になっている。Lie 代数である。

この予想の後半は、1.6 節で少しか述べた予想と関わる。実際には 1.3 節の最初で述べた問いに対する肯定的な予想も含まれていたが、ここではそれは省略した。この予想で最も示唆的な箇所は、モチーフ的 Galois 群の然るべき商が \widehat{GT} 群と一致する、という主張である。

この予想が正しいとすれば、状況証拠として提示されている変形量子化への Grothendieck-Teichmüller 群の作用を通じて、それらの変形量子化へモチーフ的 Galois 群が作用している事になる。また、(これまであまりこの点を強調しなかったが、) 多重ゼータ値の反復積分表示は、数学的にはその殆どが未解明である Feynman 積分 (Feynman integral) に現れると考えられており、従って、場の量子論 (quantum field theory) とモチーフ的 Galois 群との可能な関わり合いが上の予想から (幾つかの状況証拠を基に) 導かれるとも考えられる。(実際この方向での予想が [Kon2] には幾分曖昧な形で書かれているが、本稿では割愛した。) 巨大な対称性を操るモチーフ的 Galois 群が量子化の形式をも統制する、という夢のような描像を打ち出した訳である。現在の所、この視点がどの程度進められているのか、筆者は知らない。

一般の場の量子論の数学的な定式化はまだ無い訳だが、一つの試みとして、オペラッドを用いて定式化される d -代数 (d -algebra) という概念を使って考える事があり、その変形理論が [KS1], [KS2] で展開されている。この d -代数の概念は境界付き多様体上の場の理論と密接に関わっており、例えば物理におけるある種の AdS/CFT 対応 (AdS/CFT correspondence) (例えば $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上での弦理論と AdS_5 の境界上での $\mathcal{N} = 4$ 超対称 $SU(N)$ Yang-Mills 理論との対応を示唆する Maldacena 予想) の理解の道具としても使われる。(参考にならない(かもしれない)が、[Zoi] などもある。) これらの考えが、(代数的トポロジーを背景とした) Kontsevich 流の量子化の定式化 (の 1 つ) への出発点となる。これらの解説については、また別の機会に譲る。

2.5.3 ここで述べられなかった話題

本稿では、紙面と筆者の力量の都合上、量子化の理論の関わり合いについて、変形量子化しか取り上げられなかった。ここでは、述べられなかった話題の幾つかについて、以下に簡単にまとめておく：

- Etingof-Kazhdan による Lie 双代数 (Lie bialgebra) の量子化の形式においても、アソシエータが使われている。原論文は [EK] である。この結果は [GH] によって一般化された。
- Tamarkin-Tsygan ([TT]) に始まる 非可換微分計算 (noncommutative differential calculus) の理論は、Hochschild (コ) ホモロジー、及び巡回 (コ) ホモロジーを用いた微分形式、多重ベクトル場、密度などの非可換版の計算を扱う理論である。この理論は、その‘骨格’に Drinfel'd アソシエータが用いられており、Grothendieck-Teichmüller 群の作用を伴う。一方で Connes-Moscovici に始まる非可換幾何学の枠組みでも、非可換微分計算に相当する理論の枠組みがあり、この理論では、Grothendieck-Teichmüller 群の代わりに、繰り込み群 (renormalization group) が隠れた対称性として現れる。この繰り込み群と $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ とを統一的に扱う枠組みが期待されており、従って Tamarkin-Tsygan の理論との統一的な視点を探求する事が、研究課題の 1 つとなる。(この研究の流れを受けて、) 最近 Connes-Marcolli らによって、繰り込み群とモチーフ的 Galois 群の関係を探る試みが進展しているようである¹⁶。

謝辞. 第 1 回琵琶湖若手数学者勉強会に呼んで頂いた、主催者の尾國新一さん、山川大亮さんに感謝致します。また、原稿の締め切りの予定を大幅に過ぎてしまい、ご迷惑をお掛けした事を深くお詫び致します。

A モチーフ理論の基礎

この補遺では、第 1 節の議論で用いたモチーフ理論についての簡単な補足をする。具体的には、A.2 において混合 Tate モチーフの (淡中) 圏 MTM_k を幾つかの仮定の下で構成し、その性質について述べる。

具体的な議論を行う前に、最初にモチーフの考え方に慣れていない方の為に、その考え方の、おまじない程度の簡単な導入を次の節にまとめておく。既にご存知の方は、A.2 から読まれても差し支えない。

A.1 モチーフの考え方と起源

モチーフ (motive) の概念は、Weil 予想を証明/理解する過程で Grothendieck によって、「普遍的なコホモロジー論」或いは「種々のコホモロジーの根源となる概念」として考案された。すなわち、Weil 予想を解く過程で、Grothendieck は基礎体の標数とは異なる素数 ℓ に対する \mathbb{Q}_ℓ -係数のコホモロジー (エタール ℓ -進コホモロジー) を各 ℓ 毎に構成し、有限体上の代数多様体の合同ゼータ関数を、各エタール ℓ -進コホモロジーへの Frobenius 作用の固有多項式として表示した。最終的に Grothendieck は、Weil 予想を Frobenius 作用の固有値の絶対値に関する主張 (Riemann 予想の類似) を除いて証明したが、最後の箇所を解く為に注目したのが、各々のコホモロジーの構成そのものではなく、各コホモロジーにおける Poincaré 双対性や Künneth 公式、代数的サイクルの存在といった「コホモロジーの対称性」と呼ぶべき概念であった。このような概念を記述する数学的実在がモチーフである。

Grothendieck が (所謂標準予想を基に) 最初に考えたのは、非特異射影的多様体に対するモチーフであり、これは純モチーフ (pure motive) と呼ばれる。基礎体を k 、非特異射影的多様体の圏を Var_k 、純モチーフの圏を \mathcal{M}_k とした時に、自然な反変関手 $h : \text{Var}_k \rightarrow \mathcal{M}_k$ が存在する。一方で、 k 上ベクトル空間の圏を Vect_k とすれば、各コホモロジーは関手 $\text{Var}_k \rightarrow \text{Vect}_k$ であるが、その関手達は \mathcal{M}_k を経由し、各コホモロジーの持つ種々の対称性は、 \mathcal{M}_k 自身の持つ性質に由来する、と考える事ができる：

$$\text{非特異射影的多様体} \mapsto \text{純モチーフ} \mapsto \text{コホモロジー理論}$$

¹⁶ここでは具体的に文献を挙げないが、例えば arXiv に挙がっているここ数年の彼らの論文を参考にして欲しい。

2 つ目の矢印は実現 (realization) と呼ばれ, 考えるコホモロジー理論に応じて, de Rham 実現, Betti 実現, ℓ -進実現, クリスタリン実現などが知られている.

非特異とも射影的とも限らないような, より一般の多様体 (variety) に対しても同様のモチーフ (理論) が存在する事が Grothendieck によって予想され, 混合モチーフ (mixed motive) と呼ばれる. 混合モチーフ理論の枠組みも所謂標準予想を仮定して議論されるものであるが, 花村, Levine, Voevodsky らによって混合モチーフの圏を含む (と思われる) 三角圏 MM_k が独立に構成され, 互いに同値な枠組みである事が示されている. 純モチーフの圏 M_k が半単純であり, MM_k は M_k を自然に含むが, MM_k 自身は半単純ではない事が知られている. この非半単純性が高次 Ext 群を用いたモチーフ的コホモロジー (motivic cohomology) を生み, 高次 Chow 群, 代数的 K 理論 等を巻き込んで, 混合モチーフの圏の定式化に至った.

更に, モチーフの概念は, Deligne に始まる混合 Hodge 構造や周期の理論とも深い関わりを持つ. Deligne は Weil 予想を動機として, それを解く過程で得られた結果を複素多様体の枠組みで記述する事を試みた. その結果混合 Hodge 構造の理論を得, 今では周期の研究で欠かせない道具になっている. 混合 Hodge 構造の理論で定義される重み (weight) の概念と, Grothendieck の構想したモチーフの枠組みと合わせて混合モチーフの概念が明確になった. これらの関連は, 上の図式と合わせて, 次の (対応) 表で理解する事ができる:

| X | モチーフ | $H^*(X)$ |
|-----------|-------------------|-------------|
| 非特異射影的多様体 | 純モチーフ $\in M_k$ | 純 Hodge 構造 |
| 開/特異多様体 | 混合モチーフ $\in MM_k$ | 混合 Hodge 構造 |

A.2 混合 Tate モチーフの圏の構成

(当たり前かもしれないが,) モチーフ理論を構成する, とした場合には, 全てのクラス・次元の代数多様体を包括的に扱う理論を一挙に作る, という意味合いを持っている. 現在の所, モチーフの '標準的な' 定義は無いが, 幾つかの視点からの構成はある. この節の目標は, Voevodsky の方法に従って, 幾つかの仮定の下で混合 Tate モチーフの圏 MTM_k を構成する事である. 以下, k は基礎体で, k 上滑らかなスキーム (smooth scheme) の圏を Sm_k , 射影的滑らかなスキーム (projective smooth scheme) の圏を Psm_k と書く事にする. より詳細な議論は, 例えば圏論については [Mac] を, 代数的サイクルについては [Ful] を, 純モチーフについては [Scho] を, 混合モチーフについては [Lev] を参照して欲しい¹⁷.

A.2.1 MTM_k の構成

有限対応の圏 $Corr$ ¹⁸

任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ と $X, Y \in Psm_k$ に対して, 対応 (correspondence) とは, 次で定義されるものである:

$$Corr_{eq}^n(X, Y) = \bigoplus_i CH_{n+d_i}(X_i \times Y)/eq$$

ここで eq とは有理同値関係, ホモロジー同値関係, 数値的同値関係のいずれかであり, $CH_m(X, Y)$ は m 次 Chow 群を, X_i は X の連結成分への分解であり, $\dim X_i = d_i$ と書いている. この圏を用いて次の合成が定義できる:

$$Corr_{eq}^n(X, Y) \times Corr_{eq}^m(Y, Z) \rightarrow Corr_{eq}^{n+m}(X, Z), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \beta \circ \alpha = p_{XZ*}(p_{XY}^*(\alpha) \cdot p_{YZ}^*(\beta))$$

ここで, 例えば p_{XZ} は $p_{XZ}: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z$ を表し, p_{XY}, p_{YZ} も同様に定義できる. この圏は体 k と用いる同値関係を固定すれば定まり, この圏を射の空間として用いてモチーフの圏を構成する, というのが基本的な考え方である.

¹⁷ここでの文献の挙げ方は, 非常に偏っていると思われる事を注意しておく.

¹⁸例えば [MVW].

これらを Sm_k の中で実現したいが、それには上の対応の定義では幾つか問題点が生じる。例えば Y の射影的であるという条件を外すと、 p_{XZ*} が定義できない。 Sm_k において上のアイデアを実現する為に、この問題を克服したのが Voevodsky で、新たに次の有限対応という概念を導入する： $X \times Y$ の整閉部分スキーム (integral closed subscheme) W であって、(i) 射影 $p: W \rightarrow X$ が有限であり、(ii) W の像 $p(W)$ が X の既約成分となっている、もので生成される群を $c(X, Y)$ と書き、 $c(X, Y)$ の要素を有限対応 (finite correspondence) と呼ぶ。この有限対応の成す群に対しても次の合成射が定義でき、

$$c(X, Y) \times c(Y, Z) \rightarrow c(X, Z), (W_1, W_2) \mapsto p_{XZ*}(p_{XY}^*(W_1) \cdot p_{YZ}^*(W_2))$$

この $c(X, Y)$ を射の空間とするような圏を考える事ができる。すなわち、対象として Sm_k の対象、射として $c(X, Y)$ を、その合成を上で与えた合成射で定義される圏を Corr_k と書き、有限対応の圏と呼ぶ。この圏は k 上のスキームの積によってテンソル圏になる。

効果的幾何学的モチーフの圏 $\widehat{\text{DM}}_{\text{gm},k}^{\text{eff}}$

先の節で導入した有限対応のテンソル圏 Corr_k を三角テンソル圏として局所化して得られる有界ホモトピー圏 (bounded homotopy category) $\widehat{\text{DM}}_{\text{gm},k}^{\text{eff}}$ の擬アーベル凸 (pseudo-abelian hull) が、効果的幾何学的モチーフの圏 $\text{DM}_{\text{gm},k}$ である。ここで圏が擬アーベル的 (pseudo-abelian) であるとは、任意の射影子 (projector) ($p \in \text{End}(M), p \circ p = p$ (M は圏の対象) を満たすもの) が像と核を持つ事を意味する。

局所化するという操作は、ナイーブに言うと、どのクラスの写像を行き先のホモトピー圏で同型と思いたいか、という事と同じで、つまりどの写像に注目するか、を指定しなければならない。 Corr_k を局所化する場合、次の2つの写像に注目する:

- 任意の滑らかなスキーム $X \in \text{Sm}_k$ に対して定義される写像 $p_*: [X \times \mathbb{A}^1] \rightarrow [X]$
- 任意の滑らかなスキーム $X \in \text{Sm}_k$ に対して、Zariski 開部分スキームの和 $X = U \cup V$ を指定した時、次の標準的な射

$$\text{Cone}([U \cap V] \rightarrow [U] \oplus [V]) \rightarrow [X]$$

ただし、 $[U \cap V] \rightarrow [U] \oplus [V]$ は、2つの包含射

$$j_{U,U \cap V}: U \cap V \hookrightarrow U, \quad j_{V,U \cap V}: U \cap V \hookrightarrow V$$

に誘導される射 ($j_{U,U \cap V*}, -j_{V,U \cap V*}$) であり、 $\text{Cone}(\dots) \rightarrow [X]$ は、包含写像 $j_U: U \hookrightarrow X, j_V: V \hookrightarrow X$ を使って $j_{U*} + j_{V*}$ と書ける射である。(これは Mayer-Vietoris である。)

幾何学的モチーフの圏 $\text{DM}_{\text{gm},k}$

幾何学的モチーフの圏 (the category of geometric motives) $\text{DM}_{\text{gm},k}$ は、対象は効果的幾何学的モチーフの圏 $\widehat{\text{DM}}_{\text{gm},k}^{\text{eff}}$ と同じで、射の空間を次のものに取り替えたものを言う:

$$\text{Hom}_{\text{DM}_{\text{gm},k}}(X, Y) = \varinjlim \text{Hom}_{\widehat{\text{DM}}_{\text{gm},k}^{\text{eff}}}(X \otimes \mathbb{Z}(n), Y \otimes \mathbb{Z}(n))$$

混合 Tate モチーフの三角圏 DTM_k

体 k 上の混合 Tate モチーフの三角圏 (the triangulated category of mixed Tate motives) DTM_k は、Tate モチーフ $\mathbb{Z}(n), n \in \mathbb{Z}$ で生成される $\text{DM}_{\text{gm},k}$ の充満三角部分圏の事であり、この圏も三角テンソル圏になる。ここで Tate モチーフ $\mathbb{Z}(n)$ とは、 $\mathbb{Z}(1) = H^*(\mathbb{P}^1)$ のコピーを n 個テンソルしたものである。

混合 Tate モチーフの圏 MTM_k

先で定義したものは混合 Tate モチーフの三角圏であったが、実際にはアーベル圏が欲しい。実は「ある条件」下では、混合 Tate モチーフの圏 DTM_k にはウェイトフィルトレーションから定まる t -構造が定まり、その核 (heart) であるアーベルテンソル圏 MTM_k を定める事ができる。この「ある条件」は、次の Beilinson-Soulé による消滅予想 (vanishing conjecture) と呼ばれる予想である:

予想 A.1 (Beilinson-Soulé). 任意の $n > 0, j \leq 0$ に対して,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)[j]) = 0$$

が成り立つ. 或いは同じ n, j に対して, 同値な言い換えとして,

$$K_{2n-j}^{(n)}(k) = 0$$

が成り立つ, とも言える. ここで (n) は Adams 次数付けを意味する.

この予想は有限体や数体上では正しい事が知られている.

DTM_k の次の 2 つの充満部分圏 $DTM_k^{\leq 0}, DTM_k^{\geq 0}$ が定義されるが, 上の予想を仮定すると, DTM_k 上の t -構造 $(DTM_k^{\leq 0}, DTM_k^{\geq 0})$ が定まり, その核 $MTM_k = DTM_k^{\leq 0} \cap DTM_k^{\geq 0}$ が Tate モチーフ $\mathbb{Q}(n), n \in \mathbb{Z}$ を含み, なおかつそれらを含み拡大について閉じた最小のアーベル部分圏と一致する事が知られている. 従って, 幾つかの仮定の下ではあるが, MTM_k は混合 Tate モチーフの (アーベル) 圏と呼ばれる.

注意 A.2. 本論説では紹介していない重要な概念の 1 つとして, 枠付きモチーフ (framed motive) がある. 混合 Tate モチーフ版は, 混合 Tate モチーフ M と写像 $f: \mathrm{Gr}_n^w M \rightarrow \mathbb{Q} (n < 0)$, 及び $n < n'$ を満たす n' に対して定義される $v \in \mathrm{Gr}_{n'}^w M$ の三つ組 (M, f, v) の事である. これら全体を然るべき同値関係で割った全体 A を考えると, 次の同型が言える事が知られている: $U_\omega \simeq \mathrm{Spec} A$. ただし, U_ω は 1.4 節で現れるモチーフ的 Galois 群 G_ω に含まれる冪単代数群である.

また, これ以外にも, [KZ] や [GM] の議論でも用いられている¹⁹.

A.2.2 淡中圏とモチーフ的 Galois 群

1.4 節, および 2.5.2 節においてモチーフ的 Galois 群と呼ばれる対象が登場しているが, それが何であるのか, について, ここで少しまとめておきたい.

モチーフの圏は淡中圏になる事が期待されており, その起源は [DM] に遡る. K を標数 0 の体, L を K の拡大, \mathcal{T} を k -線形アーベルテンソル圏とした時に, L に値を持つファイバー関手 (fibre functor) $\omega: \mathcal{T} \rightarrow \mathrm{Vect}_L$ とは, それがテンソル忠実完全関手である事, と定義される. 元々の圏 \mathcal{T} とファイバー関手を使って, 淡中圏を定義する. より正確には, 次の 3 通りの概念がある:

- ニュートラル化された淡中圏 (neutralized Tannakian category): ペア (\mathcal{T}, ω) であって, K に値を持つもの. (この場合, 淡中圏の情報の中にファイバー関手が指定されている.)
- ニュートラル淡中圏 (neutral Tannakian category): アーベル圏 \mathcal{T} 上に K に値を持つファイバー関手 ω が存在する時.
- 淡中圏 (Tannakian category): アーベル圏 \mathcal{T} 上に L に値を持つファイバー関手 ω が存在する時.

ニュートラル化された淡中圏 (\mathcal{T}, ω) に対して, ファイバー関手の自然変換全体を $G_\omega = \mathrm{Aut}^\otimes(\omega)$ と書き, これをモチーフ的 Galois 群 (motivic Galois group) と呼ぶ. 淡中圏は一般には複雑な構造を持ったテンソル圏だと考えられ, このモチーフ的 Galois 群は, 古典的な Galois 群よりも遥かに多くの情報を統制している事が分かる. 冒頭でモチーフの圏が淡中圏になる事が期待されている, と述べたが, より正確に言えば, ファイバー関手が Weil コホモロジーで与えられるような淡中圏になる事を期待されている. (この期待を実現するには, Grothendieck による標準予想 (standard conjecture) などを解決する必要がある. Hodge 予想や Tate 予想などとも深い関わりがあるが, 筆者はそれを語る力が無いので, ここでは述べないことにさせて頂きたい.)

このモチーフ的 Galois 群に関して, 最も重要かつ著しい定理は次である:

¹⁹[KZ] で議論されている '抽象周期' に関わる議論が [Fri] にある.

定理 A.3. $\text{Rep}(G_\omega)$ を, G_ω の有限次元表現の圏とし, ω' を忘却関手 $\text{Rep}(G_\omega) \rightarrow \text{Vect}_\mathbb{Q}$ とする. この時, 圏同値 $\mathcal{T} \simeq \text{Rep}(G_\omega)$ ($\omega \mapsto \omega'$) が存在する.

更に, 幾つかの具体的な圏に対しては, モチーフ的 Galois 群が分かっている.

- \mathcal{T} が Artin モチーフ ($H^\bullet(\text{Spec } L)$ で生成されるモチーフ. ここで L は K の有限次拡大) の時, $G_\omega = \text{Gal}(L/K)$ である. (これは古典的な Galois 理論であり, この意味でモチーフ的 Galois 群が古典的な Galois 理論 (0 次元の多様体のモチーフ理論) の拡張であると言える. これより後の例は, 0 より大きな次元のモチーフの場合である.)
- \mathcal{T} が純 Tate モチーフ ($H^\bullet(\mathbb{P}^1)$ で生成されるモチーフ) の圏の場合, $G_\omega = \mathbb{G}_m$ である.

A.2.3 淡中圏としての MTM_k

A.2.1 節で構成した混合 Tate モチーフの圏 MTM_k は, 淡中圏としてはどのような構造になっているのか, という問いに答えておく. MTM_k の構成から, 以後 $k = \mathbb{Q}$ の場合を議論する. この場合 Beilinson-Soulé の消滅予想は成り立っている.

まずファイバー関手は, ウェイトフィルトレーションで定義する次の ω で与えられる:

$$\omega : \text{MTM}_k \rightarrow \text{Vect}_\mathbb{Q}, \quad M \mapsto \text{Gr}_\bullet^\omega M = \bigoplus_n \text{Gr}_n^\omega M$$

この時, G_ω は次の分裂

$$1 \longrightarrow U_\omega \longrightarrow G_\omega \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

を持ち, U_ω は冪単代数群である. U_ω の Lie 代数を \mathcal{L}_ω と書き, これをモチーフ的 Lie 代数 (motivic Lie algebra) と呼ぶ. 上の分裂によって \mathcal{L}_ω は \mathbb{G}_m の作用によって次数付けが存在する²⁰. これら $U_\omega, \mathcal{L}_\omega$ を代数的サイクルの立場から理解する事が重要である.

²⁰同値な別の説明を, 1.4 節で与えている.

参考文献

- [AK] 荒川恒男, 金子昌信, 多重ゼータ値および多重 L -値ノート, 立教大学 SFR 自由プロジェクト研究 講究録 7.
- [Bar] D.Bar-Natan, *On associators and the Grothendieck-Teichmuller group I*, Selecta Math. **4** (1998) p.183-212.
- [BL] A. Beauville and Y. Laszlo, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, 385–419.
- [Ber] Michel van den Bergh, *On global deformation quantization in the algebraic case*, math/0603200
- [BK] D.Broadhurst and D.Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. **B393** p.403-412.
- [Bou] L.Boutet de Monvel, *Remarques sur les séries logarithmiques divergentes*, lecture at ‘Polylogarithms et conjecture de Deligne-Ihara’, C.I.R.M. (Luminy) April 2000.
- [Bro] F.Brown, *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\mathcal{M}_{0,n}$* , math/0606419.
- [Del1] P.Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in *Galois groups over \mathbb{Q}* : MSRI Publ. vol.**16**, p.79-313.
- [Del2] P.Deligne 述, K.Kedlaya 記, *Periods for the Fundamental Group*, Arizona Winter School 2002 lecture note
available at <http://swc.math.arizona.edu/aws/notes/files/02DeligneKedlayaCN.pdf>.
- [DG] P.Deligne and A.B.Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **38** (2005) p.1-56.
- [DM] P.Deligne and J.Milne, *Tannakian categories*, in LNM **900**.
- [DT] P.Deligne and T.Terasoma, *Harmonic shuffle relation for associators*, preprint available at http://www2.lifl.fr/mzv2005/DOC/Terasoma/lille_terasoma.pdf.
- [Dri] V.G.Drinfel’d, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad J. **2** (1991) p.829-860.
- [Duf] M.Duflo, *Caracteres des algebres de Lie resolubles*, C.R.Acad.Sci. **269** (1969) p.437-438.
- [EK] P.Etingof and D.Kazhdan, *Quantization of Lie Bialgebras, I, II*, Selecta Math. **2** (1996) p.183-225; **4** (1998) p.213-231.
- [Ful] W.Fulton, *Intersection theory*, Springer.
- [Fur] 古庄英和, Grothendieck-Teichmüller 群
in 2004 年度整数論サマースクール「基本群と Galois 表現」報告集.
- [Fur2] 古庄英和, *Introduction to p -adic multiple zeta values*, 数理研講究録 **1324**.
- [Fur3] H.Furusho, *Multiple zeta values and Grothendieck-Teichmüller groups*, AMS Contemporary Math, Vol **416**, (2006), p.49-82.

- [Fur4] H.Furusho, *The multiple zeta value algebra and stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003) p.695-720.
- [Fur5] H.Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, preprint : math.QA/0702128.
- [GH] G.Ginot and G.Halbout, *A deformed version of Tamarkin's formality theorem*, A formality theorem for Poisson manifolds. Lett. Math. Phys. **66** (2003) p.37-64.
- [Fri] B. Friedrich, *Periods and algebraic deRham cohomology*, PhD thesis, math.AG/0506113.
- [GM] A.Goncharov and Y.Manin, *Multiple zeta-motives and moduli spaces $\mathcal{M}_{0,n}$* , math/0204102.
- [Gra] A.Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, LMS lecture note **247** (1997) p.95-101.
- [Hai] R.Hain, *Periods of limit mixed Hodge structures*, Current developments in mathematics (2002) p.113-133.
- [Hai2] R.Hain, *Lectures on the Hodge-de Rham theory of the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$* available at http://www.math.duke.edu/~hain/aws/lectures_provisional.pdf (Arizona winter school 2005).
- [Har] J. Harnad, *Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik-Zamolodchikov equations*, preprint, arXiv:hep-th/9406078.
- [Hit1] N. Hitchin, *The symplectic geometry of moduli spaces of connections and geometric quantization*, Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990). Progr. Theoret. Phys. Suppl. No. 102 (1990), 159–174 (1991).
- [Hit2] N. Hitchin, *Frobenius manifolds. With notes by David Calderbank*, Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995), 69–112, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 488, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [IhaK] 井原健太郎, 福岡数論研究集会 2006 年 8 月 報告集
available at <http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~trkomatu/fukuokaNT/minisymposium.html>.
- [IKZ] K.Ihara, M.Kaneko and D.Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006) p.307-338.
- [IhaY] Y.Ihara, *On embedding of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into \widehat{GT}* , in *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, LMS lecture note series **200** p.289-321.
- [Kas] C.Kassel, *Quantum Groups*, GTM **155**
- [Kel] B.Keller, *Notes for an Introduction to Kontsevich's quantization theorem*
available at <http://www.math.jussieu.fr/~keller>.
- [KM] 梶浦宏成, 前田吉昭, 変形量子化入門, 東大セミナーノート **20**.
- [Kan] 金子昌信, 多重ゼータ値, 数学 **54** (2002) p.404-415.
- [Koh] 河野俊文, 場の理論とトポロジー, 岩波講座現代数学の展開, 1998.
- [Kon1] M.Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I* Lett.Math.Phys. **66** (2003) pp.157-216.

- [Kon2] M.Kontsevich, *Operads and Motives in Deformation Quantization* Lett.Math.Phys. **48** (1999) pp.35-72.
- [Kon3] M.Kontsevich, *Deformation quantization of algebraic varieties* Lett.Math.Phys. **56** (2006) pp.271-294.
- [KS1] M.Kontsevich and Y.Soibelman, *Deformations of algebras over operads and Deligne's conjecture*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol.I p.255-307, Math. Phys. Stud. **21** Kluwer Acad.Publ., Dordrecht 2000.
- [KS2] M.Kontsevich and Y.Soibelman, *Deformation Theory I*, book in preparation available at <http://www.math.ksu.edu/~soibel/>.
- [KZ] M.Kontsevich and D.Zagier, *Periods*, Mathematics unlimited-2001 and beyond p.771-808.
- [LM1] T.Q.T.Le and J.Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, Topology Appl. **62** (1995) p.193-206.
- [LM2] T.Q.T.Le and J.Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math.J. **142** (1996) p.39-65.
- [Lev] M.Levine, *Mixed Motives*, Mathematical Surveys and Monographs **57** AMS.
- [Low] W.Lowen, *Algebroid prestacks and deformations of ringed spaces*, math/0511197.
- [LS] P.Loachak and L.Schneps, *Geometric Galois Actions 1*, LMS lecture note series **242**.
- [Mac] S.MacLane, *Categories for working mathematician*, GTM **5**.
- [Mat] O.Matheieu, *Homologies associated with Poisson structures*, Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996), Math.Phys.Stud. **20**, Kluwer Acad.Publ., Dordrecht, 1997 pp.177-199.
- [MW] E. Meinrenken and C. Woodward, *A symplectic proof of Verlinde factorization*, preprint, arXiv:dg-ga/9612018.
- [MVW] C.Mazza, V.Voevodsky and C.Weibel, *Lecture Notes on Motivic Cohomology*, Clay Mathematics Monographs.
- [Nak] 中村博昭 述, 大溪幸子, 長谷部寛之, 林真也, 山上敦士 記, ガロア・タイヒミュラー群の LEGO 理論, 1999 年度北海道大学講義レクチャーノート (北海道大学数学講究録 **65** (2000)) available at <http://www.math.okayama-u.ac.jp/~h-naka/hokudai99/hokudai99.pdf>.
- [Oku] 奥田順一, 多重ゼータ値の関係式 - ドリinfeld・アソシエイタの方向から -, 数理研講究録 **1549**.
- [Oht] T.Ohtsuki, *Quantum Invariants: A Study of Knots, 3-manifolds and Their Sets*, World Scientific Publishing (2001).
- [Rac] G.Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. IHÉS **95** (2002) p.185-231.
- [Res] N. Reshetikhin, *The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem*, Lett. Math. Phys. **26** (1992), no. 3, 167-177.
- [Schn] L.Schneps, *Grothendieck-Teichmueller theory, moduli spaces, and multi-zeta values* Arizona Winter School 2005 lecture note available at <http://swc.math.arizona.edu/aws/notes/files/05SchnepsNotes.pdf>.

- [Scho] A.Scholl, *Classical Motives*, and other materials in ‘Motives’ Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol.**55**(1)(2), AMS.
- [Ter1] T.Terasoma, *Multiple zeta values and mixed Tate motives*, Inv.Math. **149** (2002) p.339-369.
- [Ter2] 寺杣友秀, Mixed Tate motif の周期写像について, 第 47 回代数学シンポジウム報告集 (2002)
- [Tam] D.Tamarkin, *Another proof of M.Kontsevich’s formality theorem*, math.QA/9803025.
- [TT] D.Tamarkin and B.Tsygan, *Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures*, Methods Funct. Anal. Topology **6** (2000) p.85-100 or math.KT/0002116.
- [Tur] V.G.Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988) p.527-553.
- [Uen] 上野喜三雄, 2 変数多重対数関数の接続問題と多重ゼータ値の複シャッフル関係式及び 2 重対数関数の 5 項関係, 数理研講究録 **1549**.
- [US] 上野健壘, 清水勇二, モジュライ理論 3, 岩波講座現代数学の展開, 1999.
- [Yam] 山下剛, p -進多重ゼータ値, p -進多重 L -値, 次元予想, 数理研講究録 **1549**.
- [Yek] A.Yekutieli, *Deformation Quantization in algebraic geometry*, Adv. Math. **198** (2005) p.383-432.
- [Zag] D.Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol.II (Paris 1992) p.497-512.
- [Zoi] I. Zois, *Operads and Quantum Gravity* Repts on Math. Phys. **55**(3) (2005).