

導来圏から眺める代数多様体

第一回琵琶湖若手数学者勉強会代数幾何班*：

大橋 久範 (京都大学数理解析研究所)

岡田 拓三 (京都大学数理解析研究所)

瀧 真語 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

福山 浩司 (京都大学大学院理学研究科数学教室)

星 裕一郎 (京都大学数理解析研究所)

目次

0 序	3
1 Serre 関手	4
2 導来圏と標準束、及びコホモロジー理論 (福山 浩司)	6
2.1 豊富な (反) 標準束	6
2.2 $D^b(X)$ の自己同値	10
2.3 Orlov の定理	11
2.4 コホモロジー理論との関係	17
3 アーベル多様体の Fourier-向井対 (星 裕一郎)	22
3.1 アーベル多様体の一般論	22
3.2 普遍束による Fourier-向井変換	23
3.3 アーベル多様体の導来同値 (1)	25
3.4 アーベル多様体の導来同値 (2)	30
4 Derived equivalence of $K3$ surfaces (瀧 真語)	33
4.1 Introduction	33
4.2 What is a $K3$ surface?	33
4.2.1 $K3$ 格子	36
4.2.2 Torelli 型定理	36
4.3 Derived equivalence of $K3$ surfaces	38
4.3.1 向井格子	38
4.3.2 $K3$ 曲面の導来圏	39
5 フリップとフロップ (岡田 拓三)	41
5.1 概説	41
5.2 準備：閉移入と爆発	41
5.3 爆発と導来圏	45

*第 2・第 5 著者は、日本学術振興会から援助をいただいております (特別研究員 DC1)。

5.4	基本フリップ	48
5.5	向井フロップ	51
6	代数曲面の導来圏 (大橋 久範)	56
6.1	導入	56
6.2	楕円曲面の Fourier-向井対 (1)	57
6.3	Enriques 曲面の場合	58
6.4	Fourier-向井核の幾何学的性質	59
6.4.1	全射性	59
6.4.2	標準束の引き戻しの比較	59
6.4.3	K -同値	60
6.5	命題 6.1 の証明	61
6.6	命題 6.7 の証明	63
6.7	楕円曲面の Fourier-向井対 (2)	63
6.8	Appendix A: 安定層のモジュライ	64
6.8.1	Appendix A-1: モジュライの存在	64
6.8.2	Appendix A-2: p -安定性と μ -安定性	66
6.9	Appendix B: 小平次元	67
6.10	Appendix C: 標準環の同型	68
7	[Hu] の訂正表	70
	参考文献	71

0 序

本稿は、第一回琵琶湖若手数学者勉強会において代数幾何学班が勉強をした D. Huybrechts の「Fourier-Mukai transforms in Algebraic Geometry」(本稿内では [Hu] として引用) という教科書の内容をまとめたものです。勉強会では、代数幾何学班の五人が、(比較的) 適切だと思われる章を分担して、それらについて議論をしながら勉強をしました。勉強会が終わってから、それぞれに自分が担当した箇所についての解説を書いてもらい、それをまとめて編集したものが本稿です。本稿の具体的な構成は以下のようになっています:

- § 1: 五人の原稿を集めて編集を行った際、これは補足しておいた方が良いと判断して星が書いた部分です。「Serre 関手」という概念に関する事実がごくごく簡単に書かれた節です。
- § 2: 福山が書いた部分で、基本的には [Hu] の 4 章と 5 章をまとめた節です。
- § 3: 星が書いた部分で、基本的には [Hu] の 9 章をまとめた節です。
- § 4: 瀧が書いた部分で、基本的には [Hu] の 10 章をまとめた節です。
- § 5: 岡田が書いた部分で、基本的には [Hu] の 11 章をまとめた節です。
- § 6: 大橋が書いた部分で、基本的には [Hu] の 6 章と 12 章をまとめた節です。
- § 7: 勉強会の中で見つけた [Hu] の間違いのリストです。[Hu] を読む際の一助になればと考え、このように掲載することにしました。

上述したとおり、それぞれの節を違う人間が書いているため、節毎に記号の使い方や表現が若干違っていますが、大きな誤解を招くことはないと思います。また、五人がそれぞれ書いた原稿をまとめたために発生した誤植や間違いは、編集を行った星の責任であることをここに明記しておきます。

最後に、第一回琵琶湖若手数学者勉強会では、睡眠と食事と入浴とほんの少しの散歩の時間以外、ずっと [Hu] の勉強を行っていました。そのような環境を与えてくださった運営委員の皆様に感謝を述べたいと思います。本当にどうもありがとうございました。

第一回琵琶湖若手数学者勉強会代数幾何学班班長
星裕一郎

1 Serre 関手

本稿の導入として、ここでは、本稿の主役である数学的対象の一つである“ $D^b(X)$ ”と書かれるある圏を定義する：

定義 1.1. X を体 k 上の代数多様体とする。

- (i) X 上の接続 \mathcal{O}_X -加群の圏を $\mathbf{Coh}(X)$ と書く。このとき、よく知られているように $\mathbf{Coh}(X)$ はアーベル圏である。このアーベル圏に付随する有界な複体からなる導来圏 $D^b(\mathbf{Coh}(X))$ を $D^b(X)$ と書く、i.e., $D^b(X) \stackrel{\text{def}}{=} D^b(\mathbf{Coh}(X))$ 。
- (ii) Y を k 上の代数多様体とする。 k -線形三角圏としての圏同値 $D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ が存在するとき、 X と Y は**導来同値**、あるいは、 X と Y は**Fourier-向井対**であると言う。

注意 1.2. 「Fourier-向井対」という名前の由来については、系 2.21 を参照。

本稿を読むためには、導来圏や三角圏といった概念の他に、「Serre 関手」という概念に関するある程度の知識が必要となる（特に § 2 において）。以下では、その「Serre 関手」という概念に関する事実を簡単に復習する。また、導来圏や三角圏に関する詳しい事実は [Hu] の 1 章、2 章、3 章などを参照。以下では、 k を体とする。

定義 1.3. \mathcal{A} を k -線形圏とする。 \mathcal{A} の **Serre 関手**とは、 k -線形圏同値 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ で、任意の \mathcal{A} の対象 A と B に対して、 A と B に対して関手的な k 上の線形空間としての同型

$$\eta_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, S(A))^*$$

が存在するものである。

Serre 関手は次の性質を持っている：

補題 1.4. \mathcal{A} 、 \mathcal{B} を“Hom”が有限次元であるような k -線形圏、 S_A (respectively, S_B) を \mathcal{A} (respectively, \mathcal{B}) の Serre 関手とする。このとき、任意の k -線形圏同値 $F: \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ は Serre 関手と可換である、i.e., $F \circ S_A \simeq S_B \circ F$ 。

証明. X 、 Y を \mathcal{A} の対象とする。このとき、 F が充満忠実であることから、関手的な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, S_A(Y)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F \circ S_A(Y)); \quad \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(Y), F(X))$$

を得る。また、Serre 関手の定義から、関手的な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, S_A(Y)) \xrightarrow{\eta_{Y,X}^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X)^*; \quad \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(Y), F(X)) \xrightarrow{\eta_{F(Y),F(X)}} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), S_B \circ F(Y))^*$$

を得る。従って、上の同型を結合することにより、関手的な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F \circ S_A(Y)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), S_B \circ F(Y)) \tag{*}$$

を得る。今、 F は本質的全射であるので、主張は同型 (*) と米田の補題から従う。 \square

滑らかで射影的な代数多様体の上の接続層の有界な複体からなる導来圏 $D^b(X)$ (cf. 定義 1.1, (i)) の Serre 関手は以下で与えられる：

定理 1.5. X を k 上滑らかで射影的な n 次元代数多様体とする。このとき、以下の合成として得られる関手 S_X は $D^b(X)$ の Serre 関手である：

$$D^b(X) \xrightarrow{(\omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X}^L (-))} D^b(X) \xrightarrow{[n]} D^b(X)$$

証明. 定理 1.6 を $X = X; Y = \text{Spec } k; f = X$ の構造射; $\mathcal{E}^\bullet = \mathcal{O}_X$ から自然に定まる $D^b(X)$ の対象; $\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{O}_{\text{Spec } k}$ から自然に定まる $D^b(\text{Spec } k)$ の対象に対して適用することによって主張は従う。 \square

定理 1.6 (Grothendieck-Verdier 双対性). X, Y を k 上の滑らかなスキーム、 $f: X \rightarrow Y$ を k 上の双対次元 $\dim(f) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(X) - \dim(Y)$ の射、 $\omega_f \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \omega_{Y/k}^*$ とする。このとき、 $D^b(X)$ の任意の対象 \mathcal{F}^\bullet 、 $D^b(Y)$ の任意の対象 \mathcal{E}^\bullet に対して、関手的な同型

$$\mathbb{R}f_* \mathbb{R}\text{Hom}_{D^b(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{L}f^*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} \omega_f[\dim(f)]) \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{D^b(Y)}(\mathbb{R}f_* \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)$$

が存在する。

証明. 例えば [Ha1] を参照。 \square

2 導来圏と標準束、及びコホモロジー理論 (福山 浩司)

2.1 豊富な(反)標準束

X を体 k 上の非特異射影多様体とし、 X 上の接続層の有界な複体から成る導来圏を $D^b(X)$ と表す。
 $D^b(X)$ を X の不変量のひとつと考えることができるが、 X の構造をどの程度反映するものだろうか？
次元と標準束の位数は $D^b(X)$ で決まる。

命題 2.1. X, Y は非特異射影多様体で、圏同値 $F : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ が存在するとする。この時、 $\dim X = \dim Y$ 。更に ω_X と ω_Y の位数は等しい。

証明. 圏同値 F は Serre 関手 (定義 1.3、定理 1.5) と可換なので (補題 1.4)、閉点 $x \in X$ に対し、

$$\begin{aligned} F(k(x)) &= F(k(x) \otimes \omega_X) \\ &= F(k(x)) \otimes \omega_Y[\dim Y - \dim X]. \end{aligned}$$

$F(k(x)) \neq 0$ は有界な複体なので、 $\dim Y = \dim X$ でなければならない。

$\omega_X^k \simeq \mathcal{O}_X$ とすると、 F と Serre 関手が可換なので、任意の対象 $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ に対して、

$$\begin{aligned} F(\mathcal{E}^\bullet) &\simeq F(\mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X^k) \\ &\simeq F(\mathcal{E}^\bullet) \otimes \omega_Y^k[k \dim Y - k \dim X] \\ &\simeq F(\mathcal{E}^\bullet) \otimes \omega_Y^k. \end{aligned}$$

これより F が本質的に全射であることから、 $\omega_Y^k \simeq \mathcal{O}_Y$ となるので、 ω_X と ω_Y の位数は (∞ の場合も含め) 同じであることが分かる。 \square

導来圏ではなく、接続層の成すアーベル圏を不変量として考えると、この不変量は X を完全に決定する。つまり、接続層の成すアーベル圏が同値になるような非特異射影多様体は同型になる (系 2.29)。

導来圏の場合、アーベル圏よりは粗い不変量になり、同型ではない非特異射影多様体が同値な導来圏を持つこともある (系 3.8)。しかしある種の多様体は $D^b(X)$ で決定される。このことを示す Bondal-Orlov の結果がこの節のテーマである。

まず、Bondal-Orlov の結果を述べよう。

命題 2.2. X, Y を非特異射影多様体とし、 X の(反)標準束は豊富であるとする。もし、完全な圏同値 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ が存在すれば、 X と Y は同型である。特に、 Y の(反)標準束も豊富になる。

Bondal-Orlov の論文では、この定理を代数閉体とは限らない体 k について証明しているが、ここでは k を代数閉体とし、彼らの方法とは異なった方法を述べる。

この命題の証明の中で、(反)標準束が豊富であることにどのような利点があるかという、ひとつは多様体の「点」とその上の「直線束」を導来圏の対象として圏論の言葉で記述することができること、もうひとつは多様体 X を $\text{Proj} \bigoplus \mathbb{H}^0(X, \omega_X^n)$ という形に記述できることにある。前者の意味をこれから述べよう。(後者の意味は明らかだろう。)

定義 2.3. \mathcal{D} を k -線形三角圏、 S を \mathcal{D} の Serre 関手とする。 \mathcal{D} の対象 P が以下の性質を満たす時、 P を余次元 d の点対象と呼ぶ。

- (i) $S(P) \simeq P[d]$.
- (ii) 任意の $i < 0$ に対し、 $\text{Hom}(P, P[i]) = 0$.
- (iii) $k(P) := \text{Hom}(P, P)$ は体になる。(iii) を満たす対象を単純対象と呼ぶ。

(三角圏に不慣れな方は $\mathcal{D} = D^b(X)$ として読んでもらえればよい。また、Serre 関手については第 1 節で述べているが、ここでは $S(\bullet) = S_X(\bullet) = \bullet \otimes \omega_X[\dim X]$ (定理 1.5) として読んでもらって差し支えないだろう。)

閉点 $x \in X$ に対し、摩天楼層 $k(x)$ は $D^b(X)$ の (余次元 = $\dim X$) の点対象になる。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し、 $k(x)[n]$ も点対象なので、

$$\{X \text{ の閉点} \} \times \mathbb{Z} \subset \{D^b(X) \text{ の点対象} \}$$

と考えられる。しかし、両者は必ずしも一致しない。例えば $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ となる場合は、直線束のような単純層 ($\text{Hom}(L, L) = k$ となるような層) は $D^b(X)$ の点対象を定める。

一般に、閉点が定める単純対象 (をシフトしたもの) は、 $D^b(X)$ の対象として次の補題で特徴付けられる。

補題 2.4. \mathcal{F}^\bullet を $D^b(X)$ の単純対象で、台の次元が 0 のものとする。もし \mathcal{F}^\bullet が $\forall i < 0$ に対して $\text{Hom}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[i]) = 0$ を満たすならば、

$$\mathcal{F}^\bullet \simeq k(x)[m]$$

となるような閉点 $x \in X$ と $m \in \mathbb{Z}$ が存在する。

証明. [Hu] Lemma 4.5 を参照。 □

しかし ω_X もしくは ω_X^* が豊富になる場合は両者が一致する。 X の「点」を $D^b(X)$ の対象として捉えることができるというのは、このような意味である。

命題 2.5. X を非特異射影多様体とし、 ω_X もしくは ω_X^* が豊富であるとする。この時、 $D^b(X)$ の点対象は $k(x)[m]$ ($x \in X$ は閉点、 $m \in \mathbb{Z}$) の形の対象に同型である。

証明. P を $D^b(X)$ の単純対象とし、そのコホモロジー層を \mathcal{H}^i で表すことにする。

$S_X(P) = P \otimes \omega_X[\dim X] \simeq P[\dim X]$ から、 $\mathcal{H}^i \otimes \omega_X \simeq \mathcal{H}^i$ が得られる。これは ω_X もしくは ω_X^* の定める \mathcal{H}^i の Hilbert 多項式が定数になることを意味している。つまり $\mathcal{H}^i = 0$ もしくは \mathcal{H}^i の台の次元が 0 になる。よって、補題 2.4 によって主張が証明される。 □

次に直線束について述べる。

定義 2.6. \mathcal{D} を Serre 関手を持つ三角圏とし、 L をその対象とする。 \mathcal{D} の任意の点対象 P に対し、

$$\text{Hom}(L, P[i]) = \begin{cases} k(P) & \text{if } i = n_P \\ 0 & \text{if } i \neq n_P \end{cases}$$

となるような定数 $n_P \in \mathbb{Z}$ が存在する時、 P を **可逆対象** と呼ぶ。

命題 2.7. X を非特異射影多様体とする。 $D^b(X)$ の任意の可逆対象は $L[m]$ (L は X の上の直線束、 $m \in \mathbb{Z}$) の形の対象に同型である。逆に、 ω_X もしくは ω_X^* が豊富ならば、 $L[m]$ の形の対象は $D^b(X)$ の可逆対象になる。

証明. (概略) L を $D^b(X)$ の可逆対象とする。 $m \in \mathbb{Z}$ を $\mathcal{H}^m := \mathcal{H}^m(L) \neq 0$ となる最大のものとする。 x_0 を \mathcal{H}^m の台の点とすると、0 でない準同型 $\mathcal{H}^m \rightarrow k(x_0)$ が存在するので、

$$0 \neq \text{Hom}(\mathcal{H}^m, k(x_0)) = \text{Hom}(L, k(x_0)[-m]).$$

これを踏まえてスペクトル系列 ([Hu] Example 2.70 (ii) を参照)

$$E_2^{p,q} = \text{Hom}(\mathcal{H}^{-q}, k(x_0)[p]) \Rightarrow \text{Hom}(L, k(x_0)[p+q]) \quad (2.1)$$

を調べると、 $E_2^{1,-m} = 0$ なので、 $0 = \text{Hom}(\mathcal{H}^m, k(x_0)[1]) = \text{Ext}^1(\mathcal{H}^m, k(x_0))$ が分かる。

更に、 $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{H}^m, k(x_0))$ が x_0 のみを台とする層であることに注意して local-to-global スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q(\mathcal{H}^m, k(x_0))) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\mathcal{H}^m, k(x_0))$$

を調べると、 $p \neq 0$ の時 $E_2^{p,q} = 0$ なので $E_2^{0,1} = H^0(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{H}^m, k(x_0))) = 0$ が分かり、 $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{H}^m, k(x_0)) = 0$ が得られる。後述の補題 2.8 からこれは \mathcal{H}^m が x_0 の近傍で自由加群になっていることを意味している。よって、 \mathcal{H}^m は局所自由層であり、 $\text{Hom}(\mathcal{H}^m, k(x_0)) = k(x_0)$ から \mathcal{H}^m は直線束である。

$i < m$ に対して $\mathcal{H}^i(L) = 0$ となることを示すには、スペクトル系列 (2.1) において $E^{-i} = \text{Hom}(L, k(x_0)[-i]) = 0$ であることに注意して、 $E_2^{0,-i} = \text{Hom}(\mathcal{H}^i, k(x_0)) = 0$ となることを帰納法で示せばよい。

ω_X もしくは ω_X^* が豊富である時、直線束が可逆対象を定めることは、点対象が全て閉点 (とシフト) で定められること (命題 2.5) から従う。 \square

補題 2.8. (A, m) を Noether 局所環、 M を有限生成 A 加群とする。 $\text{Ext}_A^1(M, A/m) = 0$ であれば、 M は自由 A 加群である。

証明. N を任意の有限生成 A 加群とする。短完全列

$$0 \rightarrow m^\ell N / m^{\ell+1} N \rightarrow N / m^{\ell+1} N \rightarrow N / m^\ell N \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

と $m^\ell N / m^{\ell+1} N$ が A/m 加群であることから、帰納的に $\text{Ext}_A^1(M, N / m^{\ell+1} N) = 0$ ($\forall \ell \geq 0$) が従う。

M の自由加群による解消

$$\dots \rightarrow L^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} L^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} L^0 \xrightarrow{d^0} M \rightarrow 0 \quad (L_i : \text{有限階数自由 } A \text{ 加群})$$

を固定すると、次のような可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N/m^{\ell+1}N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L^0, N/m^{\ell+1}N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L^{-1}, N/m^{\ell+1}N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L^{-2}, N/m^{\ell+1}N) & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N/m^\ell N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L^0, N/m^\ell N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L^{-1}, N/m^\ell N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L^{-2}, N/m^\ell N) & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

(水平列は完全列。)

(2.2) の完全列に $\text{Hom}_A(M, \bullet)$ を作用させると、 $\text{Ext}_A^1(M, m^\ell N / m^{\ell+1} N) = 0$ なので、 $\text{Hom}_A(M, N / m^{\ell+1} N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N / m^\ell N)$ は全射になり、これにより上の可換図式から得られる自然な写像

$$\varphi : H^1(\varprojlim \text{Hom}_A(L^\bullet, N / m^{\ell+1} N)) \rightarrow \varprojlim H^1(\text{Hom}_A(L^\bullet, N / m^{\ell+1} N))$$

が単射になる。

実際、 $y \in H^1(\varprojlim \text{Hom}_A(L^\bullet, N / m^{\ell+1} N))$ に対し、 y の $H^1(\text{Hom}_A(L^\bullet, N / m^{\ell+1} N))$ への自然な射による像を y_ℓ とすると、 $\varphi(y) = 0$ は任意の ℓ に対して

$$\text{Hom}(L^0, N / m^{\ell+1} N) \ni x_\ell \mapsto y_\ell \in \text{Hom}(L^{-1}, N / m^{\ell+1} N)$$

なる x_ℓ が存在することを意味している。更に、各 ℓ に対して $(x_{\ell-1}$ を変えることなく) x_ℓ を適当に取り直すことで

$$\begin{array}{ccc}
x_\ell & \in & \text{Hom}_A(L^0, N/m^{\ell+1}N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
x_{\ell-1} & \in & \text{Hom}_A(L^0, N/m^\ell N)
\end{array}$$

とすることができるのだが、このことは $\text{Hom}_A(M, N/m^{\ell+1}N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N/m^\ell N)$ が全射であることを踏まえて上の可換図式を追えば容易に確かめられる。

よって $\{x_\ell\}$ は $\varprojlim \text{Hom}_A(L^0, N/m^{\ell+1}N)$ の元 x を定め、

$$\varprojlim \text{Hom}(L^0, N/m^{\ell+1}N) \ni x \mapsto y \in \varprojlim \text{Hom}(L^{-1}, N/m^{\ell+1}N)$$

つまり $H^1(\varprojlim \text{Hom}(L^\bullet, N/m^{\ell+1}N))$ の元としては $y = 0$ であることが分かる。

$H^1(\text{Hom}_A(L^\bullet, N/m^{\ell+1}N)) = \text{Ext}_A^1(M, N/m^{\ell+1}N) = 0$ なので $\varprojlim H^1(\text{Hom}_A(L^\bullet, N/m^{\ell+1}N)) = 0$ となり、 φ が単射であることを踏まえると、

$$0 = H^1(\varprojlim \text{Hom}_A(L^\bullet, N/m^{\ell+1}N)) \simeq H^1(\text{Hom}_A(L^\bullet, \varprojlim N/m^{\ell+1}N)) = \text{Ext}_A^1(M, N \otimes_A \hat{A}).$$

但し、 \hat{A} は A の m 進完備化である。更に A は Noether 局所環なので、 \hat{A} は忠実平坦な A 代数になり ([?] 定理 8.14)、 $\text{Ext}_A^1(M, N) \otimes \hat{A} \simeq \text{Ext}_{\hat{A}}^1(M, N \otimes_A \hat{A}) = 0$ から

$$\text{Ext}_A^1(M, N) = 0 \tag{2.3}$$

が得られる。

特に $N = \text{Ker } d^0$ とすれば、

$$0 \rightarrow \text{Ker } d^0 \rightarrow L^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

という短完全列が分裂することがわかる。これにより M は自由 (特に射影) 加群 L^0 の直和因子となり、 M は射影加群、よって自由加群である。 \square

命題 2.2 の証明

- 圏同値 $F : \text{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \text{D}^b(Y)$ で、 $F(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y$ を満たすものが存在する
- ω_X (resp. ω_X^*) が豊富で、 ω_Y (resp. ω_Y^*) も豊富

と仮定する。

F が Serre 関手と可換であること (補題 1.4) と、 $\dim X = \dim Y$ (命題 2.1)、 $F(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y$ から、 $F(\omega_X^n) \simeq \omega_Y^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) が従う。

よって、 $H^0(X, \omega_X^n) \simeq \text{Hom}(\mathcal{O}_X, \omega_X^n)$ から、次数環の同型

$$\bigoplus H^0(X, \omega_X^n) \simeq \bigoplus H^0(Y, \omega_Y^n)$$

が得られるので、(反) 標準束が豊富であることから、

$$X \simeq \text{Proj} \bigoplus H^0(X, \omega_X^n) \simeq \text{Proj} \bigoplus H^0(Y, \omega_Y^n) \simeq Y$$

となる。

次に $F : \text{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \text{D}^b(Y)$ を $F(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y$ となるようにとれることを示す。

まず F を 圏同値 $\text{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \text{D}^b(Y)$ としよう。 ω_X もしくは ω_X^* が豊富なので、命題 2.7 から \mathcal{O}_X は $\text{D}^b(X)$ の可逆対象になるので、 $F(\mathcal{O}_X)$ は $\text{D}^b(Y)$ の可逆対象であり、命題 2.7 から $F(\mathcal{O}_X) \simeq M[m]$ となる $M \in \text{Pic} X$ 、 $m \in \mathbb{Z}$ が存在する。よって、 F に $\text{D}^b(Y)$ の自己同型 $\otimes M^*$ と $[-m]$ (シフト) を合成すればよい。

残るは ω_Y の豊富性である。 ω_X^n が非常に豊富であるとして、 ω_Y^n が非常に豊富であることを示せばよい。示すべきことは

- 切断が点を分離すること、つまり、異なる閉点 $y_1, y_2 \in Y$ に対し、制限写像

$$H^0(Y, \omega_Y^n) \rightarrow \omega_Y^n(y_1) \oplus \omega_Y^n(y_2) \simeq k(y_1) \oplus k(y_2)$$

が全射であること

- 切断が接ベクトルを分離すること、つまり、閉点 y と \mathcal{O}_Y 加群の完全列

$$[0 \rightarrow k(y) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_y} \rightarrow k(y) \rightarrow 0] \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(y), k(y)) = \text{Hom}_{\mathbb{D}^b(Y)}(k(y), k(y)[1])$$

$$H^0(Y, \omega_Y^n) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_{Z_y})$$

が全射であること

である。

閉点 $y \in Y$ に対し、 $k(y)$ は $\mathbb{D}^b(Y)$ の点対象なので、 $\mathbb{D}^b(X)$ の点対象 P で $F(P) \simeq k(y)$ となるものが存在するが、補題 2.4 から $P \simeq k(x)[m]$ なる $x \in X, m \in \mathbb{Z}$ が存在する。さらに $F(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y$ から、 $F(k(x)) \simeq k(y)$ なる $x \in X$ が存在すること (つまり $m = 0$) がわかる。このことを踏まえると、 ω_Y^n が点や接ベクトルを分離するかどうかという問題は ω_X^n の同様の問題に帰着されるので、主張は ω_X^n が非常に豊富であることから従う。

□

この命題から、楕円曲線を除く非特異射影曲線は導来圏で決まることが分かる。

系 2.9. C を種数が 1 でない非特異射影曲線、 Y を非特異射影多様体とする。

この時、 $\mathbb{D}^b(C) \simeq \mathbb{D}^b(Y)$ となるのは C と Y が同型である時に限る。

実は複素数体上の場合には楕円曲線を除く必要は無いのだが、このことはこの節の最後に述べる (系 2.39)。

2.2 $\mathbb{D}^b(X)$ の自己同値

次に (反) 標準束が豊富な非特異射影多様体間の導来圏の圏同値がどのようにして実現されるか、という問題を考えてみる。これは $\mathbb{D}^b(X)$ の自己同値を考えることに他ならない。

$\mathbb{D}^b(X)$ の自己同値の同型類の成す群を $\text{Aut}(\mathbb{D}^b(X))$ で表す。

シフト、 X の自己同型による順 (または逆) 像、直線束のテンソル積は $\mathbb{D}^b(X)$ の自己同値になるので、 $\mathbb{Z} \times (\text{Aut}(X) \times \text{Pic}(X))$ を自然に $\text{Aut}(\mathbb{D}^b(X))$ の部分群と考えることができる。

命題 2.10. X を (反) 標準束が豊富な非特異射影多様体とする。この時、

$$\text{Aut}(\mathbb{D}^b(X)) \simeq \mathbb{Z} \times (\text{Aut}(X) \times \text{Pic}(X))。$$

この命題の証明の鍵は、 $\mathbb{D}^b(X)$ の充満部分圏 $\{\omega_X^{\otimes n}\}$ が $\mathbb{D}^b(X)$ の「基底」を成す、ということである。ベクトル空間の線形写像はその基底の像で一意的に決定されるのと同様に、 $\mathbb{D}^b(X)$ の自己同値もこの「基底」によって決定される。ここで言う $\mathbb{D}^b(X)$ の「基底」とは、次に定義する「豊富列」のことである。

定義 2.11. $L_i, i \in \mathbb{Z}$ を k -線形アーベル圏 \mathcal{A} の対象の列とする。任意の対象 $A \in \mathcal{A}$ に対してある整数 $i_0(A)$ が存在し、任意の $i < i_0(A)$ に対して次の条件を満たす時、 $\{L_i\}$ を豊富列と呼ぶ。

- (i) 自然な射 $\text{Hom}(L_i, A) \otimes_k L_i \rightarrow A$ は全射になる。
- (ii) 任意の $j \neq 0$ に対し、 $\text{Hom}(L_i, A[j]) = 0$ 。
- (iii) $\text{Hom}(A, L_i) = 0$ 。

\mathcal{A} が射影多様体の接続層の圏の時は、豊富な可逆層 \mathcal{L} の冪 $\{\mathcal{L}^{\otimes i}\}$ が豊富列を成す。

命題 2.12. \mathcal{A} をアーベル圏、 $F : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{A})$ を自己同値とする。

\mathcal{A} のある豊富列 $\{L_i\}$ が成す充満部分圏の自己同値の同型

$$f : \text{id}_{\{L_i\}} \xrightarrow{\sim} F|_{\{L_i\}}$$

は $D^b(\mathcal{A})$ の自己同値の同型

$$f : \text{id} \xrightarrow{\sim} F$$

に一意的に拡張される。

証明. [Hu] Proposition 4.23 を参照。 □

命題 2.10 の証明

$F \in \text{Aut}(D^b(X))$ とする。命題 2.2 の証明と同様の議論で、 $\text{Pic}(X)$ と \mathbb{Z} の作用で $F(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$ とすることができ、このような F は次数環 $\oplus H^0(X, \omega_X^n)$ の自己同型を与えるので、 $\varphi \in \text{Aut}(X)$ が得られる。

$F \circ \varphi^* \in \text{Aut}(D^b(X))$ は $F \circ \varphi^*(\omega_X^n) \simeq \omega^n$ を満たし、 $\oplus H^0(X, \omega_X^n)$ に恒等写像で作用するので、

$$\text{id}_{\{\omega_X^n\}} \simeq F \circ \varphi^*|_{\{\omega_X^n\}}.$$

よって、命題 2.12 から

$$\text{id}_{D^b(X)} \simeq F \circ \varphi^*$$

が得られる。 □

2.3 Orlov の定理

ここで [Hu] の主題である Fourier-向井変換を導入する。これは多様体の接続層の導来圏の間の完全関手である。最初にこの Fourier-向井変換が完全関手の中で良いクラスを成していることを述べた後、Orlov の定理を証明無しで述べ、その応用をいくつか挙げる。

X, Y を非特異射影多様体とし、

$$q : X \times Y \rightarrow X, p : X \times Y \rightarrow Y$$

を射影とする。

定義 2.13. $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ に対し、完全関手 $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ を

$$\mathcal{E}^\bullet \mapsto p_*(q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{P})$$

で定める。 \mathcal{P} を **Fourier-向井核** と呼び、 $\Phi_{\mathcal{P}}$ を **Fourier-向井変換** と呼ぶ。

(p_* 、 q^* 、 \otimes はそれぞれ導来関手 $\mathbf{R}p_*$ 、 $\mathbf{L}q^*$ 、 $\otimes^{\mathbf{L}}$ の意味。以後も同様。)

文献によってはこのような関手のことを積分関手と呼び、圏同値になっている時に Fourier-向井変換と呼ぶものもある。

同様の方法で関手 $D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$ を定めることもできる。そのため $\Phi_{\mathcal{P}}$ という表記ではどちらからどちらへの関手なのかかわからない場合もあるので、 $D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ であることを明確にするため、 $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ という記号を使うこともある。

例 2.14. 基本的な関手の多くは Fourier-向井変換として捉えることができる。

i) 対角射 $\Delta \subset X \times X$ での構造層の順像 $\mathcal{O}_\Delta \in D^b(X \times X)$ の定める Fourier-向井関手 $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$ は

$$\text{id} : D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

と同型になる。

ii) $f : X \rightarrow Y$ を射とし、 $\Gamma_f \subset X \times Y$ をそのグラフとすると、

$$\Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}^{X \rightarrow Y} \simeq f_*, \quad \Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}^{Y \rightarrow X} \simeq f^*.$$

iii) $L \in \text{Pic}(X)$ の定める自己同値 $D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ は、 $\iota_*(L) \in D^b(X \times X)$ ($\iota : X \rightarrow X \times X$ は対角射) が定める Fourier-向井変換と同型になる。

iv) シフト関手 $D^b(X) \ni \mathcal{E}^\bullet \mapsto \mathcal{E}^\bullet[N] \in D^b(X)$ は、 $\mathcal{O}_\Delta[N]$ を核とする Fourier-向井変換と考えることができる。

証明. [Hu] Example 5.4 を参照。 □

Fourier-向井変換は必ずしも圏同値になるとは限らないが、左随伴と右随伴を必ず持つ、という利点がある。上の例を見てみると i)、iii)、iv) は自己同値なので当然随伴は存在する。ii) の場合も f^* が f_* の左随伴であり、Grothendieck-Verdier 双対性 (定理 1.6) から、

$$f^! : D^b(Y) \ni \mathcal{E}^\bullet \mapsto f^*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes \omega_f[\dim f] \in D^b(X)$$

が f_* の右随伴になる。 ($\omega_f := \omega_X \otimes f^*\omega_Y^*$, $\dim f := \dim X - \dim Y$)

定義 2.15. 対象 $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ に対し、 $D^b(X \times Y)$ の対象 $\mathcal{P}_L, \mathcal{P}_R$ を

$$\mathcal{P}_L := \mathcal{P}^\vee \otimes p^*\omega_Y[\dim Y], \quad \mathcal{P}_R := \mathcal{P}^\vee \otimes q^*\omega_X[\dim X]$$

で定める。 ($\mathcal{P}^\vee := \mathbf{R}Hom(\mathcal{P}, \mathcal{O})$)

命題 2.16. $F = \Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ を Fourier-向井変換とする。この時、

$$G := \Phi_{\mathcal{P}_L} : D^b(Y) \rightarrow D^b(X), \quad H := \Phi_{\mathcal{P}_R} : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$$

がそれぞれ F の左随伴、右随伴になる。

この命題は Grothendieck-Verdier 双対性の他、導来双対 \mathcal{P}^\vee の性質や $p^* \dashv p_*$ といったことを踏まえて計算すれば証明できる (詳しくは [Hu], Proposition 5.9 を参照)。

Fourier-向井変換は随伴がまた Fourier-向井変換として得られるので、圏同値になっているかどうかを考える際には、Fourier-向井変換と Fourier-向井変換の合成 (が恒等関手と同型になっているかどうか) を考えることになる。この点でも、Fourier-向井変換は合成したものがまた Fourier-向井変換になる、という利点がある。

X, Y, Z を非特異射影多様体とし、 $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ 、 $\mathcal{Q} \in D^b(Y \times Z)$ に対して $\mathcal{R} \in D^b(X \times Z)$ を

$$\mathcal{R} := \pi_{XZ*}(\pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})$$

で定める。 ($\pi_{XY}, \pi_{YZ}, \pi_{XZ}$ はそれぞれ $X \times Y \times Z$ から $X \times Y, Y \times Z, X \times Z$ への射影)

命題 2.17.

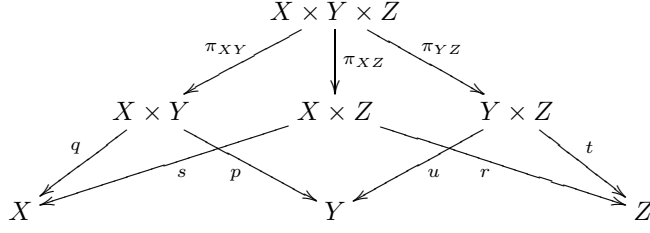
$$D^b(X) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} D^b(Y) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{Q}}} D^b(Z)$$

の合成は

$$\Phi_{\mathcal{R}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Z)$$

と同型である。

証明. 次のような自然な射影から成る図式を考える。



$\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ とすると、

$$\begin{aligned}
 \Phi_Q \circ \Phi_P(\mathcal{E}^\bullet) &= t_*(u^*(p_*(q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{P})) \otimes \mathcal{Q}) \\
 &\simeq t_*(\pi_{YZ*}(\pi_{XY}^*(q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{P})) \otimes \mathcal{Q}) \quad (\text{平坦基底変換}) \\
 &\simeq t_*(\pi_{YZ*}(\pi_{XY}^*(q^*\mathcal{E}^\bullet) \otimes \pi_{XY}^*\mathcal{P}) \otimes \mathcal{Q}) \\
 &\simeq t_*(\pi_{YZ*}(\pi_{XZ}^*(s^*\mathcal{E}^\bullet) \otimes \pi_{XY}^*\mathcal{P}) \otimes \mathcal{Q}) \\
 &\simeq t_*(\pi_{YZ*}(\pi_{XZ}^*(s^*\mathcal{E}^\bullet) \otimes \pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})) \quad (\text{射影公式}) \\
 &\simeq r_*(\pi_{XZ*}(\pi_{XZ}^*(s^*\mathcal{E}^\bullet) \otimes \pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})) \\
 &\simeq r_*(s^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \pi_{XZ*}(\pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})) \quad (\text{射影公式}) \\
 &\simeq r_*(s^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{R}) = \Phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}^\bullet)
 \end{aligned}$$

□

注意 2.18. 一般に $\Phi_Q \circ \Phi_P$ を与える Fourier-向井核が一意的に存在するわけではないので、上の \mathcal{R} はそのような核の中から自然なものを選んできているのである。例えばこの選び方だと \mathcal{R} の定め方と同様に、 $\mathcal{R}_R \simeq \pi_{XZ*}(\pi_{XY}^*\mathcal{P}_R \otimes \pi_{YZ}^*\mathcal{Q}_R)$ (\mathcal{R}_L も同様) となり、随伴を保つ。

他にも、Fourier-向井変換には次のような簡明な性質がある。

命題 2.19. $\mathcal{P}_i \in D^b(X_i \times Y_i)$ ($i = 1, 2$) とする。

i) $\mathcal{F}_i \in D^b(X_i)$ とすると、

$$\Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \simeq \Phi_{\mathcal{P}_1}(\mathcal{F}_1) \boxtimes \Phi_{\mathcal{P}_2}(\mathcal{F}_2).$$

ii) $\mathcal{R} \in D^b(X_1 \times X_2)$ 、 $\mathcal{S} = \Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}(\mathcal{R})$ とする。この時、次の図式

$$\begin{array}{ccc}
 D^b(X_1) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{P}_1}} & D^b(Y_1) \\
 \Phi_{\mathcal{R}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{S}} \\
 D^b(X_2) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}_2}} & D^b(Y_2)
 \end{array}$$

は可換になる。

証明. i) 次の図式の中の射は全て自然な射影である。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & X_1 \times X_2 \times Y_1 \times Y_2 & & & \\
 & & \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 & & \\
 & X_1 \times Y_1 \times Y_2 & & & & X_2 \times Y_1 \times Y_2 & \\
 & \swarrow b & & & & \swarrow d & \\
 X_1 \times Y_1 & & & Y_1 \times Y_2 & & & X_2 \times Y_2 \\
 \swarrow q & & \searrow p & & \swarrow s & & \searrow r \\
 X_1 & & & Y_1 & & & Y_2 \\
 & & & & & & \swarrow u & \\
 & & & & & & & X_2 \\
 & & & & & & & \searrow t
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) &\simeq a_* \pi_{1*} ((\pi_1^* b^* \mathcal{P}_1 \otimes \pi_2^* c^* \mathcal{P}_2) \otimes (\pi_1^* b^* q^* \mathcal{F}_1 \otimes \pi_2^* c^* t^* \mathcal{F}_2)) \\
 &\simeq a_* \pi_{1*} (\pi_1^* b^* (q^* \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{P}_1) \otimes \pi_2^* c^* (t^* \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{P}_2)) \\
 &\simeq a_* (b^* (q^* \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{P}_1) \otimes \pi_{1*} \pi_2^* c^* (t^* \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{P}_2)) \quad (\text{射影公式}) \\
 &\simeq a_* (b^* (q^* \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{P}_1) \otimes a^* d_* c^* (t^* \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{P}_2)) \quad (\text{平坦基底変換定理}) \\
 &\simeq a_* b^* (q^* \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{P}_1) \otimes d_* c^* (t^* \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{P}_2) \quad (\text{射影公式}) \\
 &\simeq s^* p_* (q^* \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{P}_1) \otimes r^* u_* (t^* \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{P}_2) \quad (\text{平坦基底変換定理}) \\
 &\simeq \Phi_{\mathcal{P}_1}(\mathcal{F}_1) \boxtimes \Phi_{\mathcal{P}_2}(\mathcal{F}_2).
 \end{aligned}$$

ii) 自然な射影からなる次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Y_1 \times X_1 \times Y_2 \times X_2 & & & \\
 & & \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 & & \\
 & Y_1 \times X_1 \times X_2 & & & & Y_1 \times X_2 \times Y_2 & \\
 & \swarrow r & & \downarrow q & & \swarrow u & \\
 Y_1 \times X_1 & & X_1 \times X_2 & & Y_1 \times X_2 & & X_2 \times Y_2 \\
 & & & & & & \downarrow t & \\
 & & & & & & & Y_1 \times Y_2 \\
 & & & & & & & \swarrow s
 \end{array}$$

命題 2.17 により、 $\Phi_{\mathcal{P}_2} \circ \Phi_{\mathcal{R}} \circ \Phi_{\mathcal{P}_1}$ は

$$s_*(u^* p_*(r^* \mathcal{P}_1 \otimes q^* \mathcal{R}) \otimes t^* \mathcal{P}_2)$$

を核とする Fourier-向井変換になるので、

$$\Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}(\mathcal{R}) \simeq s_*(u^* p_*(r^* \mathcal{P}_1 \otimes q^* \mathcal{R}) \otimes t^* \mathcal{P}_2)$$

となることを示せばよい。実際、

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}(\mathcal{R}) &\simeq s_* \pi_{2*} (\pi_1^* (r^* \mathcal{P}_1 \otimes q^* \mathcal{R}) \otimes \pi_2^* t^* \mathcal{P}_2) \\
 &\simeq s_* (\pi_{2*} \pi_1^* (r^* \mathcal{P}_1 \otimes q^* \mathcal{R}) \otimes t^* \mathcal{P}_2) \quad (\text{射影公式}) \\
 &\simeq s_*(u^* p_*(r^* \mathcal{P}_1 \otimes q^* \mathcal{R}) \otimes t^* \mathcal{P}_2) \quad (\text{平坦基底変換定理})
 \end{aligned}$$

となる。 □

ここで Orlov の定理を述べる ($[0]$)。

定理 2.20. X, Y を非特異射影多様体とし、

$$F : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

を忠実充満な完全関手とする。もし F が右随伴と左随伴を持つならば、 F と同型な Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}}$ を与える $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ が一意的に存在する。

圏同値であれば忠実充満であり、随伴が必ず存在するので、

系 2.21. $F : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ を非特異射影多様体の導来圏の圏同値とする。この時 F はある対象 $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ の与える Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}}$ と同型であり、この核は一意的に定まる。

次の基本的な事実は、この Orlov の定理を用いて証明することができる。

命題 2.22. X_i, Y_i ($i = 1, 2$) を非特異射影多様体とする。もし $D^b(X_i) \simeq D^b(Y_i)$ ($i = 1, 2$) であれば、 $D^b(X_1 \times X_2) \simeq D^b(Y_1 \times Y_2)$ である。

導来圏の同値を与える関手は Fourier-向井変換として記述できるので、この命題を示すには、次の命題を示せばよい。

命題 2.23. $\mathcal{P}_i \in D^b(X_i \times Y_i)$ が導来圏の同値

$$\Phi_{\mathcal{P}_i} : D^b(X_i) \xrightarrow{\sim} D^b(Y_i)$$

を与えるとす。この時、 $\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2 \in D^b(X_1 \times X_2 \times Y_1 \times Y_2)$ は導来圏の同値

$$\Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2} : D^b(X_1 \times X_2) \xrightarrow{\sim} D^b(Y_1 \times Y_2)$$

を与える。

証明. この命題は次の補題から従う。

補題 2.24. i) Z_i を非特異射影多様体、 $\mathcal{Q}_i \in D^b(Y_i \times Z_i)$ とし、 $\mathcal{R}_i \in D^b(X_i \times Z_i)$ を命題 2.17 の方法で $\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_i$ から得られる対象とする (つまり $\Phi_{\mathcal{Q}_i} \circ \Phi_{\mathcal{P}_i} \simeq \Phi_{\mathcal{R}_i}$)。この時

$$\Phi_{\mathcal{Q}_1 \boxtimes \mathcal{Q}_2} \circ \Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2} \simeq \Phi_{\mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2}.$$

ii) $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ とし、 $\Gamma_{f_i} : X_i \rightarrow X_i \times Y_i$ をグラフ埋め込み、 $\mathcal{O}_{\Gamma_{f_i}} = \Gamma_{f_i*} \mathcal{O}_{X_i} \in D^b(X_i \times Y_i)$ とする。この時、

$$\mathcal{O}_{\Gamma_{f_1 \times f_2}} \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_{f_1}} \boxtimes \mathcal{O}_{\Gamma_{f_2}}.$$

実際、 $\Phi_{\mathcal{Q}_i} = \Phi_{\mathcal{P}_i}^{-1}$ とすると、Orlov の定理から $\mathcal{R}_i \simeq \mathcal{O}_{\Delta_{X_i}} = \mathcal{O}_{\Gamma_{\text{id}_{X_i}}}$ となり、この補題から $\Phi_{\mathcal{Q}_1 \boxtimes \mathcal{Q}_2} = \Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}^{-1}$ となることがわかる。

i) の証明 $u_i : X_i \times Y_i \times Z_i \rightarrow X_i \times Y_i$ 、 $v_i : X_i \times Y_i \times Z_i \rightarrow Y_i \times Z_i$ を自然な射影とし、 $\mathcal{S}_i = u_i^* \mathcal{P}_i \otimes v_i^* \mathcal{Q}_i$ とする。自然な射影からなる次のような図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 \times Y_1 \times Z_1 \times X_2 \times Y_2 \times Z_2 & & \\
 & \swarrow \pi_1 & \downarrow \phi & \searrow \pi_2 & \\
 X_1 \times Y_1 \times Z_1 \times X_2 \times Z_2 & & & & X_1 \times Z_1 \times X_2 \times Y_2 \times Z_2 \\
 \downarrow a & \searrow b & & \swarrow c & \downarrow d \\
 X_1 \times Y_1 \times Z_1 & & X_1 \times Z_1 \times X_2 \times Z_2 & & X_2 \times Y_2 \times Z_2 \\
 \downarrow p & \swarrow q & & \searrow r & \downarrow s \\
 X_1 \times Z_1 & & & & X_2 \times Z_2
 \end{array}$$

命題 2.17 から $\Phi_{\mathcal{Q}_1 \boxtimes \mathcal{Q}_2} \circ \Phi_{\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2}$ の核は $\phi_*(\pi_1^* a^* \mathcal{S}_1 \otimes \pi_2^* d^* \mathcal{S}_2)$ で与えられ、

$$\begin{aligned} \phi_*(\pi_1^* a^* \mathcal{S}_1 \otimes \pi_2^* d^* \mathcal{S}_2) &\simeq b_*(a^* \mathcal{S}_1 \otimes \pi_{1*} \pi_2^* d^* \mathcal{S}_2) \quad (\text{射影公式}) \\ &\simeq b_*(a^* \mathcal{S}_1 \otimes b^* c_* d^* \mathcal{S}_2) \quad (\text{平坦基底変換定理}) \\ &\simeq b_* a^* \mathcal{S}_1 \otimes c_* d^* \mathcal{S}_2 \quad (\text{射影公式}) \\ &\simeq q^* p_* \mathcal{S}_1 \otimes r^* s_* \mathcal{S}_2 \quad (\text{平坦基底変換定理}) \\ &= \mathcal{R}_1 \boxtimes \mathcal{R}_2 \end{aligned}$$

となるので、主張が従う。

ii) の証明 $\pi : X_1 \times Y_1 \times X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times Y_1$ を自然な射影とすると、 $\mathcal{O}_{\Gamma_{f_1}} \boxtimes \mathcal{O}_{\Gamma_{f_2}} \simeq (1_{X_1 \times Y_1} \times \Gamma_{f_2})^* \pi^* \mathcal{O}_{\Gamma_{f_1}}$ だが、 $\pi \circ (1_{X_1 \times Y_1} \times \Gamma_{f_2}) : X_1 \times Y_1 \times X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times Y_1$ は自然な射影であり、特に平坦なので、 $\forall n \neq 0$ に対して

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{O}_{\Gamma_{f_1}} \boxtimes \mathcal{O}_{\Gamma_{f_2}}) = 0$$

となる。0 次のコホモロジー層が同型になるのは明らか。

□

同値な導来圏を持つ多様体は次元が等しいことを命題 2.1 で証明したが、この Orlov の定理を使うと次のような別証明ができる。

系 2.25. X, Y を非特異射影多様体とする。 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ であれば、 $\dim X = \dim Y$ 。

証明. Orlov の定理から圏同値になる Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ ($\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$) が存在する。この $\Phi_{\mathcal{P}}$ の左随伴、右随伴 $D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$ はそれぞれ

$$\mathcal{P}_L = \mathcal{P}^\vee \otimes p^* \omega_Y[\dim Y], \mathcal{P}_R = \mathcal{P}^\vee \otimes q^* \omega_X[\dim X]$$

で与えられるが (命題 2.16)、共に $\Phi_{\mathcal{P}}$ の擬逆を与えるので、核の一意性から、 $\mathcal{P}_L \simeq \mathcal{P}_R$ となる。よって、

$$\mathcal{P}^\vee \simeq \mathcal{P}^\vee \otimes (p^* \omega_Y \otimes q^* \omega_X^*)[\dim Y - \dim X]$$

となるが、 \mathcal{P}^\vee は有界な複体なので、 $\dim X = \dim Y$ でなければならない。

□

注意 2.26. この証明から $\Phi_{\mathcal{P}}$ が圏同値であるためには

$$\mathcal{P} \otimes q^* \omega_X \simeq \mathcal{P} \otimes p^* \omega_Y$$

でなければならないことがわかるが、実は $\Phi_{\mathcal{P}}$ が忠実充満の場合、この条件は $\Phi_{\mathcal{P}}$ が圏同値になるための十分条件にもなっている (命題 3.5, (ii))。

Orlov の定理を応用すると次のような結果が得られる。

系 2.27. $\Phi : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ を圏同値とし、任意の閉点 $x \in X$ に対して

$$\Phi(k(x)) \simeq k(f(x))$$

となるような閉点 $f(x) \in Y$ が存在するとする。この時、 $f : X \rightarrow Y$ は同型を定め、 Φ はこの f とある Y 上の直線束 M から

$$\Phi \simeq (M \otimes \bullet) \circ f_*$$

で得られる。

証明. Φ を Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}}$ と考えると、仮定から \mathcal{P} は X 上平坦な $X \times Y$ 上の接続層になる (補題 2.28)。 $\mathcal{P}|_{x \times Y} \simeq k(f(x))$ なので、 \mathcal{P} は閉点 $x \in X$ を $f(x) \in Y$ に移すような射のグラフになっていることが分かる。この射も f で表すことにする。

次に f が全射であることを示す。閉点 $y \in Y$ に対し、 $\Phi^{-1}(k(y)) \neq 0$ なので、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(\Phi^{-1}(k(y))[m], k(x)) \neq 0$$

となるような $x \in X$ 、 $m \in \mathbb{Z}$ が存在する。 Φ が忠実充満であることから

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(\Phi^{-1}(k(y))[m], k(x)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(Y)}(k(y)[m], \Phi(k(x))) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(Y)}(k(y)[m], k(f(x)))$$

だが、 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(Y)}(k(y)[m], k(f(x))) \neq 0$ となるのは $y = f(x)$ 、 $m = 0$ の時に限る。よって f は全射。

f が単射であることも同様に示せる。

標数 0 の場合はこれで f が同型であることが証明できたことになる。正標数の場合は擬逆 Φ^{-1} を使って逆写像 f^{-1} を作ればよい。

\mathcal{P} をその台の上の接続層と考えると、ファイバーの次元が常に 1 なので、 \mathcal{P} は直線束である。また、射影を通じて $\mathrm{supp}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} Y$ なので、これにより Y 上の直線束 M が得られた。 \square

補題 2.28. $S \rightarrow X$ を非特異射影多様体の射、 \mathcal{Q} を $\mathrm{D}^b(S)$ の対象とする。このとき、任意の閉点 $x \in X$ に対して、 $i_x^* \mathcal{Q} \in \mathrm{D}^b(S_x)$ が層ならば、 \mathcal{Q} は X 上平坦な層と同型。ただし、 S_x は f の $x \in X$ 上のファイバー、 $i_x : S_x \hookrightarrow S$ は自然な閉移入。

証明. [Hu], Lemma 3.31 を参照。 \square

遠回りな証明になるが、Orlov の結果を使って、接続層の成すアーベル圏がスキームを決定するという Gabriel の定理を証明することもできる。

系 2.29. X 、 Y を非特異射影多様体とする。圏同値 $\mathbf{Coh}(X) \simeq \mathbf{Coh}(Y)$ が存在すれば $X \simeq Y$ である。

証明. アーベル圏の圏同値

$$\Phi_0 : \mathbf{Coh}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Coh}(Y)$$

から導来圏の圏同値

$$\Phi : \mathrm{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^b(Y)$$

が得られる。

同型と 0 への射以外に全射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が存在しないような対象 $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X)$ のことを直既約対象と呼ぶが、これは閉点 $x \in X$ の摩天楼層 $k(x)$ に他ならない。このように接続層のアーベル圏では閉点 (の摩天楼層) を圏論の言葉で特徴付けることができるので、 Φ_0 が系 2.27 の条件を満たすことが分かり、 $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ が得られる。更に、 Φ_0 は $(M \otimes \bullet) \circ f_*$ 、 $M \in \mathrm{Pic}(Y)$ という形になっていることも分かる。 \square

2.4 コホモロジー理論との関係

ここでは \mathbb{C} 上の非特異射影多様体を扱う。

X 上の接続層の同型類が生成する自由アーベル群に、

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow 0$$

なる完全列の存在する \mathcal{E}^0 、 \mathcal{E}^1 、 \mathcal{E}^2 に対して $[\mathcal{E}^0] + [\mathcal{E}^2] = [\mathcal{E}^1]$ という関係を与えて得られる群を Grothendieck 群と呼び、 $K(X)$ で表す。 X が非特異射影多様体であれば、 X 上の任意の接続層は局所自由層による長さ有

限の分解を持つので、 $K(X)$ の元は全て局所自由層の線形和 $\sum a_i[\mathcal{E}^i]$ で表すことができ、局所自由層 $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ に対し、

$$[\mathcal{E}_0] \cdot [\mathcal{E}_1] = [\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}_1]$$

と定めることで、 $K(X)$ に環の構造を与えることができる。

非特異射影多様体の間の射 $f: X \rightarrow Y$ に対して、Grothendieck 群の間の引き戻し、順像を

$$\begin{aligned} f^*: K(Y) &\rightarrow K(X) & [\mathcal{E}] &\mapsto [f^*\mathcal{E}] \quad (\mathcal{E}: \text{局所自由層}) \\ f_!: K(X) &\rightarrow K(Y) & [\mathcal{F}] &\mapsto \sum (-1)^i [R^i f_* \mathcal{F}] \end{aligned}$$

で定める。すると導来圏の Fourier-向井関手と全く同様に、Grothendieck 群の Fourier-向井変換を定義することができる。 $e \in K(X \times Y)$ に対し

$$\Phi_e^K: K(X) \rightarrow K(Y) \quad f \mapsto p_!(e \cdot (q^* f))$$

と定める。(これを **K 理論的 Fourier-向井変換** と呼ぶ。)

$\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対し、 $[\mathcal{F}^\bullet] = \sum (-1)^i [\mathcal{F}^i] \in K(X)$ と定義する。この $[\]: D^b(X) \rightarrow K(X)$ は引き戻し、順像と可換になることが分かる。このため $\mathcal{P} \in D^b(X)$ が定める導来圏の Fourier-向井変換と Grothendieck 群の Fourier-向井変換は下の図式

$$\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} & D^b(Y) \\ \downarrow [\] & & \downarrow [\] \\ K(X) & \xrightarrow{\Phi_{[\mathcal{P}]}} & K(Y) \end{array}$$

を可換にする。

これで導来圏の間の Fourier-向井変換から Grothendieck 群の間の射を導くことができたわけだが、ここから更に \mathbb{Q} 係数コホモロジー群の間の射を導くことができる。(コホモロジー論的 Fourier-向井変換)

$f: X \rightarrow Y$ を非特異射影多様体の間の射とすると、これから引き戻し

$$f^*: H^*(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

が得られ、これと Poincaré 双対性

$$H^i(X, \mathbb{Q}) \simeq H^{2 \dim X - i}(X, \mathbb{Q})^*$$

から

$$f_*: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{*-2 \dim X + 2 \dim Y}(Y, \mathbb{Q})$$

が得られる。また $H^*(X, \mathbb{Q})$ は環の構造を持つので、 $\alpha \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ に対し、

$$\Phi_\alpha^H: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Q}) \quad \beta \mapsto p_*(\alpha \cdot q^* \beta)$$

を定義することができる。

コホモロジー論的 Fourier-向井変換と K 理論的 Fourier-向井変換の整合性を検証するためには Grothendieck 群の元からコホモロジー群の元を対応させなければならない。そのためには Chern 指標

$$ch: K(X) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$$

を考えるのが一般的だが、生憎 Chern 指標では Fourier-向井変換が整合しない。しかし Todd 類 $td(X) = td(\mathcal{T}_X)$ による補正を加えると Fourier-向井変換がうまく整合する。

定義 2.30. $e \in K(X)$ 、 $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ に対し、 $v(e)$ 、 $v(\mathcal{E}^\bullet) \in H^*(X, \mathbb{Q})$ を

$$v(e) = ch(e)\sqrt{td(X)}, \quad v(\mathcal{E}^\bullet) = v([\mathcal{E}^\bullet])$$

で定める。これを向井ベクトルと呼ぶ。

次に述べる Grothendieck-Riemann-Roch の定理により、Chern 指標の代わりに向井ベクトルを考えるとコホモロジーと K 群の Fourier-向井変換が整合することが保証される。

定理 2.31. $f: X \rightarrow Y$ を非特異射影多様体間の射とする。この時、任意の $e \in K(X)$ に対して、

$$ch(f_!(e)) \cdot td(Y) = f_*(ch(e) \cdot td(X))$$

が成立する。

系 2.32. 任意の $e \in K(X)$ に対し、次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\Phi_e^K} & K(Y) \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ H^*(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\Phi_{v(e)}^H} & H^*(Y, \mathbb{Q}) \end{array}$$

注意 2.33. コホモロジー論的 Fourier-向井変換は (核が向井ベクトルであったとしても) コホモロジー環の積も次数も保たない。

今後は $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ の向井ベクトルが導く Fourier-向井変換 $\Phi_{v(\mathcal{P})}^H$ を単に $\Phi_{\mathcal{P}}^H$ と表す。

コホモロジー論的 Fourier-向井変換の合成も、導来圏の場合 (命題 2.17) と同様に計算できる。

補題 2.34. $\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ 、 $\Phi_{\mathcal{Q}}: D^b(Y) \rightarrow D^b(Z)$ を Fourier-向井変換とし、 $\Phi_{\mathcal{R}}: D^b(X) \rightarrow D^b(Z)$ を命題 2.17 で与えた合成とする。この時、

$$\Phi_{\mathcal{R}}^H = \Phi_{\mathcal{Q}}^H \circ \Phi_{\mathcal{P}}^H。$$

さらに、導来圏の圏同値を与える Fourier-向井変換から導かれるコホモロジー論的 Fourier-向井変換はコホモロジー群の同型を与える。

命題 2.35. $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ が圏同値

$$\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$$

を与えるならば、コホモロジー論的 Fourier-向井変換

$$\Phi_{\mathcal{P}}^H: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q})$$

は全単射である。

証明. (概略) $\Phi_{\mathcal{Q}}$ を $\Phi_{\mathcal{P}}$ の擬逆とすると、

$$\Phi_{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{\mathcal{P}} \simeq \text{id} \simeq \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}, \quad \Phi_{\mathcal{P}} \circ \Phi_{\mathcal{Q}} \simeq \text{id} \simeq \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$$

なので、

$$\Phi_{\mathcal{Q}}^H \circ \Phi_{\mathcal{P}}^H = \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}^H, \quad \Phi_{\mathcal{P}}^H \circ \Phi_{\mathcal{Q}}^H = \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}^H$$

となる。よって、 $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}^H = \text{id}$ となることを示せばよい。これは対角射 $X \rightarrow X \times X$ に対する Grothendieck-Riemann-Roch の定理から示される。 \square

K 理論的 Fourier-向井変換に対しても同様のことが言えるが、 $[\] : D^b(X) \rightarrow K(X)$ は全射なので、 $D^b(X)$ で $K(X)$ が統御できてさほど不思議ではない。これに対し、 $v : K(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ は全射ではないので、 $D^b(X)$ 、 $K(X)$ で $H^*(X, \mathbb{Q})$ が統御できるというのは驚くべきことである。

次に $H^*(X, \mathbb{Q})$ の Hodge 構造を考える。 X が非特異射影多様体の場合、Hodge 理論から

$$H^n(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X) \quad (\bar{H}^{p,q} = H^{q,p}, H^{p,q}(X) \simeq H^q(X, \Omega^p))$$

と分解できる。

Chern 類は (p, p) 型なので、向井ベクトルの像が

$$v(K(X)) \subset \bigoplus H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X, \mathbb{Q})$$

となることに注意すると、次が分かる。

命題 2.36. $\Phi_p : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ が圏同値であるとすると、そのコホモロジー論的 Fourier-向井変換 $H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q})$ は $i = -\dim X, \dots, 0, \dots, \dim X$ に対して

$$\bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(X) \simeq \bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(Y)$$

という同型を与える。

証明. [Hu] Proposition 5.39 を参照。 □

$H^*(X, \mathbb{Q})$ に自然な 2 次形式を与えて、圏同値 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ から導かれるコホモロジー群の同型 $H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H^*(Y, \mathbb{Q})$ がこの 2 次形式に対して等長になるようにすることができる。

その 2 次形式というのは、 $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対して、

$$\chi(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) = \sum (-1)^i \text{Ext}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$$

という量を対応させることができるが、これを向井ベクトルを通じて $H^*(X, \mathbb{Q})$ 上のペアリングにしたものである。具体的には

$$\langle v, v' \rangle_X = \int_X \exp\left(\frac{c_1(X)}{2}\right) \cdot (v^\vee \cdot v)$$

と定義する。ただし v^\vee とは次のようなものである。

定義 2.37. $v = \sum v_j \in \bigoplus H^j(X, \mathbb{Q})$ に対し、

$$v^\vee = \sum \sqrt{-1}^j v_j \in \bigoplus H^j(X, \mathbb{Q})$$

を v の双対と呼ぶ。

\langle, \rangle_X を向井ペアリングと呼ぶ。向井ベクトルに対しては

$$\langle v(\mathcal{E}^\bullet), v(\mathcal{F}^\bullet) \rangle_X = \chi(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \quad (\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in D^b(X))$$

となる。

命題 2.38. $\Phi_p : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ を圏同値とする。この時

$$\Phi_p^H : H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q})$$

は向井ペアリングに対して等長になる。つまり、任意の $v, v' \in H^*(X, \mathbb{Q})$ に対し、

$$\langle v, v' \rangle_X = \langle \Phi_p^H(v), \Phi_p^H(v') \rangle_Y$$

となる。

証明. [Hu] Proposition 5.44 を参照。 □

これらを用いて、同値な導来圏を持つ楕円曲線が同型であることを示すことができる。

E, E' を楕円曲線とし、 $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(E) \xrightarrow{\sim} D^b(E')$ を圏同値とする。 $v(\mathcal{P}) \in \oplus H^{2i}(E, \mathbb{Q})$ であることから $\Phi_{\mathcal{P}}^H : H^*(E, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(E', \mathbb{Q})$ は H^* の偶奇を保つので、 $\Phi_{\mathcal{P}}^H : H^1(E, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(E', \mathbb{Q})$ が得られる。一方、楕円曲線は重さ 1 の Hodge 構造で決定されるので、この 1 次のコホモロジー群の同型が \mathbb{Z} 上で定義されていること、つまり $\Phi_{\mathcal{P}}^H(H^1(E, \mathbb{Z})) \subset H^1(E', \mathbb{Z})$ を示せばよい。(逆向きの包含関係は $(\Phi_{\mathcal{P}}^H)^{-1}$ を考えればよい。)

実際、 $\text{td}(E \times E') = 1$ 、 $ch(\mathcal{P}) = r + c_1(\mathcal{P}) + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)(\mathcal{P})$ で、 $ch(\mathcal{P})$ の 4 次の項に問題が残るが、この項は $\Phi_{\mathcal{P}}^H : H^1(E, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(E', \mathbb{Q})$ には寄与していないので、考えなくてもよい。

これと系 4.13 を合わせると、次の結果が得られる。

系 2.39. C を非特異複素射影曲線、 Y を非特異複素射影多様体とする。この時、

$$D^b(C) \simeq D^b(Y) \iff C \simeq Y.$$

3 アーベル多様体の Fourier-向井対 (星 裕一郎)

§ 3 ではアーベル多様体上の接続な加群の有界な複体からなる導来圏についての簡単な解説を行う。§ 3.1 では § 3 で用いるアーベル多様体の一般論を紹介する。§ 3.2 では代数多様体とその Albanese 多様体の積の上にある普遍束による Fourier-向井変換について考察をする。§ 3.3; § 3.4 では導来同値なアーベル多様体の対がどのような性質を持つか、という問題を考察する (cf. 系 3.20; 定理 3.26)。

§ 3 では記号を以下のように定める。

[記号]

(基礎体) k を標数 0 の代数的閉体とする。

(導来圏) k 上滑らかで射影的な代数多様体 X に対し、 $D^b(X)$ を X 上の接続 \mathcal{O}_X -加群の有界な複体からなる導来圏とする (cf. 定義 1.1, (i))。また、 k 上滑らかで射影的な代数多様体 X と Y 、 $D^b(X \times_k Y)$ の対象 \mathcal{P} に対し、

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$$

を \mathcal{P} を核とする Fourier-向井変換とする (cf. 定義 2.13)。つまり、 $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ は $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}p_*(\mathcal{P} \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{L}q^*\mathcal{F})$ で定められた関手である。ここで、 $q : X \times_k Y \rightarrow X$ (respectively, $p : X \times_k Y \rightarrow Y$) は第一 (respectively, 第二) 射影。

(アーベル多様体) k 上のアーベル多様体 A (i.e., 射影的で連結な k 上の可換代数群) に対し、 g_A をその次元とする。

射 $m_A : A \times_k A \rightarrow A$ (respectively, $i_A : A \rightarrow A$; respectively, $e_A : \text{Spec } k \rightarrow A$; respectively, $t_a : A \rightarrow A$ [$a \in A$]) を $(a, b) \mapsto (a+b)$ (respectively, $a \mapsto -a$; respectively, 単位元切断; respectively, $x \mapsto x+a$) として定義する。また、記号の乱用ではあるが、 $e_A \subseteq A$ で A の単位元切断 e_A のスキーム論的像をあらわす。

\widehat{A} で A の双対アーベル多様体、 \mathcal{P}_A で $A \times_k \widehat{A}$ 上の普遍束をあらわす。 $a \in A$ (respectively, $\widehat{a} \in \widehat{A}$) に対し、それによって定まる \widehat{A} (respectively, A) 上の直線束の同型類のある代表元を $\mathcal{P}_A(a)$ (respectively, $\mathcal{P}_A(\widehat{a})$) とあらわす。

3.1 アーベル多様体の一般論

§ 3.1 では、§ 3 で用いるアーベル多様体の一般論を紹介する。証明はどれも [Mum] を参照。

命題 3.1. A を k 上のアーベル多様体とする。そのとき、 A の k 上の標準束 $\omega_{A/k}$ は自明である。

証明. [Mum], pp 42, (iii) を参照。□

命題 3.2. A を k 上のアーベル多様体、 \mathcal{L} を A 上の直線束で $t_a^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ が任意の $a \in A$ に対して成立するもの (つまり、双対アーベル多様体 \widehat{A} でパラメトライズされる直線束) とする。このとき、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し、 $H^i(A, \mathcal{L}) = 0$ が成立する。

証明. [Mum], pp 76, (vii) を参照。□

命題 3.3. A を k 上のアーベル多様体、 \mathcal{L} を A 上の直線束とする。このとき、 \mathcal{L} が双対アーベル多様体 \widehat{A} でパラメトライズされる直線束であることと、 $A \times_k A$ 上の直線束 $m_A^*\mathcal{L}$ と $q^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}} p^*\mathcal{L}$ が同型であることは同値。ただし、 $q : A \times_k A \rightarrow A$ (respectively, $p : A \times_k A \rightarrow A$) は第一 (respectively, 第二) 射影。

証明. [Mum], pp 74, (i) を参照。□

最後に、アーベル多様体に対する一般論ではないが、§ 3 で用いる事実をもう一つ紹介しておく。

命題 3.4. X を k 上完備な代数多様体、 T を k 上の代数多様体、 \mathcal{L} を $X \times_k T$ 上の直線束とする。もしも $\mathcal{L}|_{X \times_k \{t\}}$ が任意の $t \in T$ に対して自明であるとすると、ある T 上の直線束 \mathcal{M} が存在して、 $\mathcal{L} \simeq p^* \mathcal{M}$ となる。ただし、 $p: X \times_k T \rightarrow T$ は第二射影。

証明. [Mum], §5, Corollary 6 を参照。 □

3.2 普遍束による Fourier-向井変換

§3.2 では、代数多様体とその Albanese 多様体の積の上にある普遍束による Fourier-向井変換について考察をする。まず次の一般論を認めてしまう。

命題 3.5. X, Y を k 上滑らかで射影的な代数多様体、 \mathcal{P} を $D^b(X \times_k Y)$ の対象とする。そのとき次が成立する：

(i) $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ が充満忠実であることと、任意の X の閉点 x, y に対して

$$\mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}(k(x)), \Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}(k(y))[i]) \simeq \begin{cases} k & (\text{if } x = y \text{ and } i = 0) \\ 0 & (\text{if } x \neq y \text{ or } i < 0 \text{ or } \dim(X) < i) \end{cases}$$

となることは同値。ただし、 $k(x)$ (respectively, $k(y)$) は連接 \mathcal{O}_X -加群 $(\mathrm{Spec} k(x) \xrightarrow{x} X)_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k(x)}$ (respectively, $(\mathrm{Spec} k(y) \xrightarrow{y} X)_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k(y)}$) によって自然に定まる $D^b(X)$ の対象。

(ii) $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ が充満忠実であるとき、 $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ が本質的全射であることと

$$\dim(X) = \dim(Y); \quad \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}q^* \omega_{X/k} \simeq \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}p^* \omega_{Y/k}$$

となることは同値。ただし、 $q: X \times_k Y \rightarrow X$ (respectively, $p: X \times_k Y \rightarrow Y$) は第一 (respectively, 第二) 射影。

証明. [Hu], Propositions 7.1; 7.6 を参照。 □

注意 3.6. 命題 3.5, (i) より次の事実が直ちに従う：

\mathcal{F} を X 上平坦な $X \times_k Y$ 上の連接 $\mathcal{O}_{X \times_k Y}$ -加群、 \mathcal{F}^\bullet を \mathcal{F} から自然に定まる $D^b(X \times_k Y)$ の対象とする。そのとき、 $\Phi_{\mathcal{F}^\bullet}^{X \rightarrow Y}$ が充満忠実となることと以下が成立することは同値：

(i) 任意の閉点 $x \in X$ に対して、

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_{\{x\} \times_k Y}, \mathcal{F}|_{\{x\} \times_k Y}) \simeq k$$

(ii) $x, y \in X$ に対し、もしも $x \neq y$ ならば、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\mathbb{R}^i \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}|_{\{x\} \times_k Y}, \mathcal{F}|_{\{y\} \times_k Y}) = 0$$

実際、平坦性から $\Phi_{\mathcal{F}^\bullet}^{X \rightarrow Y}(k(x)) \simeq \mathcal{F}|_{\{x\} \times_k Y}$ であるので、この事実は命題 3.5, (i) より直ちに従う。

命題 3.5 より、次の一般論が得られる。

命題 3.7. X を k 上滑らかで射影的な代数多様体、 A_X を X の Albanese 多様体、 \mathcal{P}_X を $X \times_k A_X$ 上の普遍束とする。このとき、 $\Phi_{\mathcal{P}_X}^{A_X \rightarrow X}: D^b(A_X) \rightarrow D^b(X)$ が圏同値であることと以下の三つの条件が成立することは同値：

(i) 任意の $i \in \mathbb{Z}$ 、 $[\mathcal{L}] \in A_X(k)$ に対して、 $(i, [\mathcal{L}]) \neq (0, [\mathcal{O}_X])$ ならば $H^i(X, \mathcal{L}) = 0$

(ii) $\omega_{X/k} \simeq \mathcal{O}_X$ (iii) $\dim(X) = \dim(A_X)$ 証明. x, y を A_X の閉点とすると、定義より

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(\Phi_{\mathcal{P}_X}^{A_X \rightarrow X}(k(x)), \Phi_{\mathcal{P}_X}^{A_X \rightarrow X}(k(y))[i]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X)}(\mathcal{P}_X(x), \mathcal{P}_X(y)[i]) \simeq H^i(X, \mathcal{P}_X^{-1}(x) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}_X(y))$$

(ただし、“ $\mathcal{P}_X(-)$ ” は A_X の閉点 “ $(-)$ ” から決まる X 上の直線束) 従って、命題 3.5 の (i) より、 $\Phi_{\mathcal{P}_X}^{A_X \rightarrow X}$ が充満忠実であることと命題 3.7 の (i) が成立することは同値である。これにより、命題 3.7 の (i)、(ii)、(iii) を仮定すると $\Phi_{\mathcal{P}_X}^{A_X \rightarrow X}$ が圏同値となることは命題 3.5 より直ちに従う。

一方、 $\Phi_{\mathcal{P}_X}^{A_X \rightarrow X}$ が圏同値であると仮定すると、命題 3.5 の (ii) より命題 3.7 の (iii) が従い、また、 $\omega_{A_X/k}$ が自明であること (cf. 命題 3.1) と再び命題 3.5 の (ii) から、 $\mathbb{L}q^*\omega_{X/k} \simeq \mathcal{O}_{X \times_k A_X}$ を得る。ここで、同型 $\mathbb{L}q^*\omega_{X/k} \simeq \mathcal{O}_{X \times_k A_X}$ を $A_X \rightarrow \mathrm{Spec} k$ の単位元切断から誘導される $X \times_k A_X \rightarrow X$ の切断に制限することによって、命題 3.7 の (ii) が従う。 \square

X を k 上滑らかで射影的な曲線、 J_X をその Jacobian 多様体 (\simeq Albanese 多様体) とすると、よく知られているように J_X の次元は X の種数に等しい。よって、命題 3.7 より、 X の種数が 1 でないと仮定すると、 $X \times_k J_X$ 上の普遍束 \mathcal{P}_X を核とする Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}_X}^{J_X \rightarrow X} : \mathrm{D}^b(J_X) \rightarrow \mathrm{D}^b(X)$ は圏同値にはならない。また、この事実は命題 3.7 ではなく、命題 2.2 から従う。実際、 X の種数が 0 のときは $\omega_{X/k}^{\otimes -1}$ 、 X の種数が 0 でないときは $\omega_{X/k}$ は豊富な直線束である。従って、命題 2.2 より ($\Phi_{\mathcal{P}_X}^{J_X \rightarrow X}$ に限らない) 任意の関手 $\mathcal{F} : \mathrm{D}^b(J_X) \rightarrow \mathrm{D}^b(X)$ に対して、 \mathcal{F} は圏同値にはなり得ない。

命題 3.7 とアーベル多様体の一般論より、次の系が直ちに得られる。

系 3.8. A を k 上のアーベル多様体、 \widehat{A} を A の双対アーベル多様体、 \mathcal{P}_A を $A \times_k \widehat{A}$ 上の普遍束とする。このとき、 $\Phi_{\mathcal{P}_A}^{A \rightarrow \widehat{A}} : \mathrm{D}^b(A) \rightarrow \mathrm{D}^b(\widehat{A})$ は圏同値。

証明. 命題 3.1; 3.2; 3.7 より直ちに従う。 \square

また、系 3.8 で得られた圏同値に対して、直接的な計算によって次の命題が得られる。

命題 3.9. 系 3.8 の仮定の下、合成

$$\mathrm{D}^b(A) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}_A}^{A \rightarrow \widehat{A}}} \mathrm{D}^b(\widehat{A}) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A}} \mathrm{D}^b(A)$$

として得られる圏同値は $\mathbb{L}i_A^*[-g_A]$ と同型。

証明. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A \times_k \widehat{A} & \xleftarrow{\pi_{12}} & A \times_k \widehat{A} \times_k A & \xrightarrow{\pi_{23}} & A \times_k \widehat{A} \\ & \searrow \pi_{13} & & \swarrow m_{13} & \\ & A \times_k A & & A \times_k \widehat{A} & \\ & \searrow m_A & & \swarrow q & \\ & & A & & \end{array}$$

の下 (ただし、 π_{12} は第一第二射影、 π_{23} は第二第三射影、 π_{13} は第一第三射影、 m_{13} は第一成分と第三成分の A の群構造から決まる射、 q は第一射影)、 $\mathcal{R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}\pi_{13*}(\mathbb{L}\pi_{12}^*\mathcal{P}_A \otimes_{\mathbb{L}\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A} \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_{23}^*\mathcal{P}_A)$ とすると、命題 2.17 より、結合 $\Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A} \circ \Phi_{\mathcal{P}_A}^{A \rightarrow \widehat{A}}$ は \mathcal{R} を核とする Fourier-向井変換と同型である。一方、上の図式の四角形がカルテシアンであることはすぐに確認することができるので、同型

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\simeq \mathbb{R}\pi_{13*}\mathbb{L}m_{13}^*\mathcal{P}_A \quad (\text{補題 3.10}) \\ &\simeq \mathbb{L}m_A^*\mathbb{R}q_*\mathcal{P}_A \quad (\text{平坦底変換定理}) \end{aligned}$$

を得る。

ここでまず、

$$\text{supp}(\mathbb{R}^i q_* \mathcal{P}_A) \subseteq e_A (\subseteq A)$$

であることを主張する。実際、命題 3.2 より、 $H^i(\widehat{A}, \mathcal{P}_A(a)) = 0$ ($e_A \neq a \in A(k)$) となることから、この主張は従う。

次に、

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, \mathbb{R}^i q_* \mathcal{P}_A) \simeq \begin{cases} k & (\text{if } i = g_A) \\ 0 & (\text{if } i \neq g_A) \end{cases}$$

であることを主張する。実際、上の主張から

$$\mathbb{R}^r \text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, \mathbb{R}^s q_* \mathcal{P}_A) \simeq 0 \quad (r \neq 0)$$

であるので、スペクトル系列

$$E_2^{r,s} = \mathbb{R}^r \text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, \mathbb{R}^s q_* \mathcal{P}_A) \implies \mathbb{R}^{r+s} \text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, q_* \mathcal{P}_A)$$

の存在を考慮すると、

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, \mathbb{R}^r q_* \mathcal{P}_A) \simeq \mathbb{R}^r \text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, q_* \mathcal{P}_A)$$

という同型が得られる。また、

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r \text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, q_* \mathcal{P}_A) &\simeq \text{Hom}_{\text{D}^b(A)}(\mathcal{O}_A, \mathbb{R} q_* \mathcal{P}_A[r]) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{D}^b(A)}(\Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A}(k(e_{\widehat{A}})), \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A}(\mathcal{O}_{\widehat{A}})[r]) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{D}^b(\widehat{A})}(k(e_{\widehat{A}}), \mathcal{O}_{\widehat{A}}[r]) \quad (\text{系 3.8}) \\ &\simeq \text{Hom}_k(H^{g_A-r}(\widehat{A}, k(e_{\widehat{A}})), k) \end{aligned}$$

であるので、同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A, \mathbb{R}^r q_* \mathcal{P}_A) \simeq \text{Hom}_k(H^{g_A-r}(\widehat{A}, k(e_{\widehat{A}})), k) \simeq \begin{cases} k & (\text{if } r = g_A) \\ 0 & (\text{if } r \neq g_A) \end{cases}$$

を得る。

これらの主張により、 $\mathbb{R} q_* \mathcal{P}_A \simeq k(e_A)[-g_A]$ であることがわかるので、 $\mathcal{R} \simeq \mathbb{L} m_A^* \mathbb{R} q_* \mathcal{P}_A \simeq \mathbb{L} m_A^* k(e_A)[-g_A] \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_{i_A}}[-g_A]$ (ただし、 $\Gamma_{i_A} \subseteq A \times_k A$ は射 $i_A : A \rightarrow A$ のグラフ) という同型が得られ、主張は従う。 \square

補題 3.10. 命題 3.9 の記号の下、 $\mathbb{L} \pi_{12}^* \mathcal{P}_A \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A} \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L} \pi_{23}^* \mathcal{P}_A \simeq \mathbb{L} m_{13}^* \mathcal{P}_A$

証明. $\pi_2 : A \times_k \widehat{A} \times_k A \rightarrow \widehat{A}$ を第二射影とすると、任意の閉点 $\widehat{a} \in \widehat{A}$ に対し、 $\mathbb{L} \pi_{12}^* \mathcal{P}_A \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A} \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L} \pi_{23}^* \mathcal{P}_A$ の $\pi_2^{-1}(\widehat{a})$ への制限は $p_1^*(\mathcal{P}_A(\widehat{a})) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}} p_2^*(\mathcal{P}_A(\widehat{a}))$ と同型であり (ただし、 $p_i : A \times_k A \rightarrow A$ は第 i 射影)、命題 3.3 よりこれは $m_A^*(\mathcal{P}_A(\widehat{a}))$ と同型である。また、 $\mathbb{L} m_{13}^* \mathcal{P}_A$ の $\pi_2^{-1}(\widehat{a})$ への制限も $m_A^*(\mathcal{P}_A(\widehat{a}))$ と同型である。一方、 $\mathbb{L} \pi_{12}^* \mathcal{P}_A \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A} \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L} \pi_{23}^* \mathcal{P}_A$ と $\mathbb{L} m_{13}^* \mathcal{P}_A$ の $e_A \times_k \widehat{A} \times_k e_A$ への制限はどちらも自明な直線束と同型である。従って、命題 3.4 によって $\mathbb{L} \pi_{12}^* \mathcal{P}_A \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A} \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L} \pi_{23}^* \mathcal{P}_A \simeq \mathbb{L} m_{13}^* \mathcal{P}_A$ である。 \square

3.3 アーベル多様体の導来同値 (1)

A, B を導来同値な k 上のアーベル多様体の対、つまり、 k -線形三角圏としての圏同値

$$\Phi : \text{D}^b(A) \longrightarrow \text{D}^b(B)$$

が存在する二つのアーベル多様体とする (cf. 定義 1.1, (ii)). § 3.3 では、このようなアーベル多様体の対がどういった性質を持つかという問題について考察をする。

今、命題 2.1 より $g_A = g_B$ である (以下、 $g \stackrel{\text{def}}{=} g_A = g_B$ とする)。一方、系 2.21 より、ある $D^b(A \times_k B)$ の対象 \mathcal{E} が同型を除いて一意的に定まり、それを核とした Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}$ が、与えられた圏同値 Φ と同型になる。また、アーベル多様体の一般論よりアーベル多様体の標準束は自明なので (cf. 命題 3.1)、命題 2.16 より、 $\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}$ の擬逆を与える関手は $\mathcal{E}_R \simeq \mathcal{E}^\vee[g]$ を核とする Fourier-向井変換

$$\Phi_{\mathcal{E}^\vee[g]}^{B \rightarrow A} : D^b(B) \longrightarrow D^b(A)$$

である。

定義 3.11. X, Y, Z, W を k 上滑らかで射影的な代数多様体、 \mathcal{P} を $D^b(X \times_k Y)$ の対象、 \mathcal{Q} を $D^b(Z \times_k W)$ の対象、 $\pi_{XY} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X \times_k Y$ を第一第二射影、 $\pi_{YZ} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow Y \times_k Z$ を第二第三射影、 $\pi_{XZ} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X \times_k Z$ を第一第三射影、 $\pi'_{YZ} : Y \times_k Z \times_k W \rightarrow Y \times_k Z$ を第一第二射影、 $\pi_{ZW} : Y \times_k Z \times_k W \rightarrow Z \times_k W$ を第二第三射影、 $\pi_{YW} : Y \times_k Z \times_k W \rightarrow Y \times_k W$ を第一第三射影とする。

(i) 関手

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \times \text{id} : D^b(X \times_k Z) \longrightarrow D^b(Y \times_k Z)$$

を

$$(\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \times \text{id})(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}(\pi_{YZ})_*((\mathbb{L}\pi_{XZ}^* \mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} (\mathbb{L}\pi_{XY}^* \mathcal{P}))$$

と定義する。

(ii) 関手

$$\text{id} \times \Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \rightarrow W} : D^b(Y \times_k Z) \longrightarrow D^b(Y \times_k W)$$

を

$$(\text{id} \times \Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \rightarrow W})(\mathcal{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}(\pi_{YW})_*((\mathbb{L}(\pi'_{YZ})^* \mathcal{R}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times_k Z \times_k W}}^{\mathbb{L}} (\mathbb{L}\pi_{ZW}^* \mathcal{Q}))$$

と定義する。

(iii) 関手

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \times \Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \rightarrow W} : D^b(X \times_k Z) \longrightarrow D^b(Y \times_k W)$$

を

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \times \Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \rightarrow W} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{Q}}^{Z \rightarrow W}) \circ (\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} \times \text{id})$$

と定義する。

補題 3.12. X, Y, Z を k 上滑らかで射影的な代数多様体、 $\pi_{XY} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X \times_k Y$ を第一第二射影、 $\pi_{YZ} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow Y \times_k Z$ を第二第三射影、 $\pi_X : X \times_k Y \rightarrow X$ を第一射影、 $\pi_Y : X \times_k Y \rightarrow Y$ を第二射影、 $\pi'_X : X \times_k Z \rightarrow X$ を第一射影、 $\pi'_Z : X \times_k Z \rightarrow Z$ を第二射影、 \mathcal{F} を $D^b(X)$ の対象、 \mathcal{G} を $D^b(Y)$ の対象、 \mathcal{P} を $D^b(Y \times_k Z)$ の対象とする。このとき、

$$(\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow Z})(\mathbb{L}\pi_X^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_Y^* \mathcal{G}) \simeq \mathbb{L}(\pi'_X)^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}(\pi'_Z)^* \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow Z}(\mathcal{G})$$

という同型が存在する。

証明. $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow Z})(\mathbb{L}\pi_X^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_Y^* \mathcal{G})$ 、 $\pi_{XZ} : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X \times_k Z$ を第一第三射影、 $\tilde{\pi}_X : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow X$ を第一射影、 $\tilde{\pi}_Y : X \times_k Y \times_k Z \rightarrow Y$ を第二射影、 $\pi''_Y : Y \times_k Z \rightarrow Y$ を第一射影、

$\pi_Z'' : Y \times_k Z \rightarrow Z$ を第二射影とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &\simeq \mathbb{R}(\pi_{XZ})_*(\mathbb{L}\pi_{XY}^*(\mathbb{L}\pi_X^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_Y^*\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_{YZ}^*\mathcal{P}) \quad (\text{定義 3.11, (ii)}) \\
&\simeq \mathbb{R}(\pi_{XZ})_*(\mathbb{L}\tilde{\pi}_X^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\tilde{\pi}_Y^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_{YZ}^*\mathcal{P}) \\
&\simeq \mathbb{R}(\pi_{XZ})_*(\mathbb{L}\pi_{XZ}^* \circ \mathbb{L}(\pi_X')^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\tilde{\pi}_Y^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_{YZ}^*\mathcal{P}) \\
&\simeq \mathbb{L}(\pi_X')^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}(\pi_{XZ})_*(\mathbb{L}\tilde{\pi}_Y^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}\pi_{YZ}^*\mathcal{P}) \quad (\text{射影公式}) \\
&\simeq \mathbb{L}(\pi_X')^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}(\pi_{XZ})_*\mathbb{L}\pi_{YZ}^*(\mathbb{L}(\pi_Y'')^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathcal{P}) \\
&\simeq \mathbb{L}(\pi_X')^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}(\pi_Z'')^*\mathbb{R}(\pi_Y'')_*(\mathbb{L}(\pi_Y'')^*\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathcal{P}) \quad (\text{射影公式}) \\
&\simeq \mathbb{L}(\pi_X')^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_k Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}(\pi_Z'')^*\Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow Z}(\mathcal{G})
\end{aligned}$$

□

定義 3.13. § 3.3 の冒頭の状況の下、圏同値

$$F_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} : D^b(A \times_k \hat{A}) \longrightarrow D^b(B \times_k \hat{B})$$

を以下の結合で定義する：

$$\begin{aligned}
D^b(A \times_k \hat{A}) &\xrightarrow{\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}^A}^{\hat{A} \rightarrow A}} D^b(A \times_k A) \xrightarrow{\mathbb{R}(\mu_A)^*} D^b(A \times_k A) \\
&\xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \times \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[\mathcal{G}]}^{A \rightarrow B}} D^b(B \times_k B) \xrightarrow{\mathbb{L}\mu_B^*} D^b(B \times_k B) \xrightarrow{(\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}^B}^{\hat{B} \rightarrow B})^{-1}} D^b(B \times_k \hat{B})
\end{aligned}$$

ただし、 $\mu_A : A \times_k A \rightarrow A \times_k A$ 、 $\mu_B : B \times_k B \rightarrow B \times_k B$ はそれぞれ $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ で与えられる射。

補題 3.14. A 、 B 、 C を k 上のアーベル多様体、 \mathcal{P} (respectively, \mathcal{Q}) を、それを核とする Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}}^{A \rightarrow B} : D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(B)$ (respectively, $\Phi_{\mathcal{Q}}^{B \rightarrow C} : D^b(B) \xrightarrow{\sim} D^b(C)$) が圏同値を与えるような $D^b(A \times_k B)$ (respectively, $D^b(B \times_k C)$) の対象、 \mathcal{R} を

$$\Phi_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow C} \simeq \Phi_{\mathcal{Q}}^{B \rightarrow C} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{A \rightarrow B}$$

で定まる $D^b(A \times_k C)$ の対象とする (cf. 命題 2.17; 系 2.21)。このとき、

$$F_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow C} \simeq F_{\mathcal{Q}}^{B \rightarrow C} \circ F_{\mathcal{P}}^{A \rightarrow B}$$

が成立する。

証明. 定義に従った直接的な計算から従う。 □

補題 3.14 より、次の系が直ちに得られる。

系 3.15. “ $\text{Aut}(D^b(-))$ ” を “ $D^b(-)$ ” の圏同値の同型類からなる群とする。このとき、対応

$$\begin{array}{ccc}
\text{Aut}(D^b(A)) & \longrightarrow & \text{Aut}(D^b(A \times_k \hat{A})) \\
\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow A} & \longmapsto & F_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow A}
\end{array}$$

は群の射。

§ 3.3 の目標は以下の定理である：

定理 3.16. §3.3 の冒頭の状況を仮定すると、 $B \times_k \hat{B}$ 上の可逆層 $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ とアーベル多様体の間の同型射 $f_{\mathcal{E}} : A \times_k \hat{A} \xrightarrow{\sim} B \times_k \hat{B}$ が存在して、

$$F_{\mathcal{E}} \simeq (\mathcal{N}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \hat{B}}}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(f_{\mathcal{E}})_*$$

となる。

この定理の証明のために、いくつかの補題を準備する。

補題 3.17. $q: A \times_k \widehat{A} \rightarrow A$ (respectively, $p: A \times_k \widehat{A} \rightarrow \widehat{A}$) を第一 (respectively, 第二) 射影とする。このとき、任意の閉点 $a \in A$ 、 $\widehat{a} \in \widehat{A}$ に対して、

$$\mathbb{R}(\mu_A)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A})(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a})) \simeq \mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-a}}$$

という同型が存在する。ただし、 $\Gamma_{-a} \subseteq A \times_k A$ は $t_{-a}: A \rightarrow A$ のグラフ。特に、

$$\mathbb{R}(\mu_A)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A})(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a}))$$

を核とする Fourier-向井変換は

$$(\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_A} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-a})_*: \mathbb{D}^b(A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^b(A)$$

と同型。

証明. $i_a: A \rightarrow A \times_k A$ を $x \mapsto (a, x)$ で定義すると、

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\mu_A)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A})(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a})) &\simeq \mathbb{R}(\mu_A)_*(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*\mathcal{P}_A(\widehat{a})) \quad (\text{補題 3.12}) \\ &\simeq \mathbb{R}(\mu_A)_* \circ \mathbb{R}(i_a)_*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \\ &\simeq \mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-a}} \end{aligned}$$

□

補題 3.18. 定理 3.16 の仮定の下、

$$F_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}(\mathbb{L}q^*k(e_A) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(e_{\widehat{A}})) \simeq \mathbb{L}q^*k(e_B) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(e_{\widehat{B}})$$

という同型が存在する。

証明. 補題 3.17 により、

$$\mathbb{R}(\mu_A)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A})(\mathbb{L}q^*k(e_A) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(e_{\widehat{A}})) \simeq \mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(e_{\widehat{A}}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-e_A}} \simeq \mathcal{O}_{\Delta_A}$$

という同型が存在する。ただし、 Δ_A は対角射 $A \rightarrow A \times_k A$ のスキーム論的像。 $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} (\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \times \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B})(\mathcal{O}_{\Delta_A})$ とする。すると、 $\Phi_{\mathcal{G}}^{B \rightarrow B}$ が結合

$$\mathbb{D}^b(B) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}^{B \rightarrow A}} \mathbb{D}^b(A) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{O}_{\Delta_A}}^{A \rightarrow A} = \text{id}} \mathbb{D}^b(A) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B}} \mathbb{D}^b(B)$$

と同型となることはすぐに確認できるが、この結合は id と同型なので、 $\mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_{\Delta_B}$ を得る。従って、 $F_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}$ の定義から、再び補題 3.17 を用いることによって主張は従う。 □

補題 3.19. 定理 3.16 の仮定の下、 $(e_A, e_{\widehat{A}}) \in A \times_k \widehat{A}$ のある開近傍 $U \subseteq A \times_k \widehat{A}$ が存在して、任意の閉点 $(a, \widehat{a}) \in U$ に対して、ある閉点 $(b, \widehat{b}) \in B \times_k \widehat{B}$ とある同型

$$F_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a})) \simeq \mathbb{L}(q')^*k(b) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}} \mathbb{L}(p')^*k(\widehat{b})$$

が存在する。ただし、 $q': B \times_k \widehat{B} \rightarrow B$ (respectively, $p': B \times_k \widehat{B} \rightarrow \widehat{B}$) は第一 (respectively, 第二) 射影。

証明. 補題 3.18 と [Hu], Corollary 6.14 から直ちに従う。 □

これらの準備の下、定理 3.16 の証明を行う。

定理 3.16 の証明. $U \subseteq A \times \widehat{A}$ を補題 3.18 にあらわれる $(e_A, \widehat{e}_A) \in A \times \widehat{A}$ の開近傍とする。このとき、任意の閉点 $(a, \widehat{a}) \in A \times \widehat{A}$ に対して、ある閉点 $(a_1, \widehat{a}_1), (a_2, \widehat{a}_2) \in U \subseteq A \times \widehat{A}$ が存在して、 $(a, \widehat{a}) = (a_1, \widehat{a}_1) + (a_2, \widehat{a}_2)$ となる。実際、もしも $(a, \widehat{a}) \in U$ ならば、 $(a_1, \widehat{a}_1) \stackrel{\text{def}}{=} (a, \widehat{a}), (a_2, \widehat{a}_2) \stackrel{\text{def}}{=} (e_A, \widehat{e}_A)$ とすれば良く、また、もしも $(a, \widehat{a}) \notin U$ であるならば、 $(A \times_k \widehat{A})$ の既約性から U の同型射 $t_{(a, \widehat{a})} \circ i_{A \times_k \widehat{A}}$ による U の像 V は必ず U と交わりを持つので、ある閉点 $(a_1, \widehat{a}_1), (a_2, \widehat{a}_2) \in U$ が存在して $t_{(a, \widehat{a})} \circ i_{A \times_k \widehat{A}}((a_2, \widehat{a}_2)) = (a_1, \widehat{a}_1)$ となるが、これは $(a, \widehat{a}) = (a_1, \widehat{a}_1) + (a_2, \widehat{a}_2)$ を意味する。従って、 $(a, \widehat{a}) = (a_1, \widehat{a}_1) + (a_2, \widehat{a}_2)$ となるような閉点 $(a_1, \widehat{a}_1), (a_2, \widehat{a}_2) \in U \subseteq A \times \widehat{A}$ は存在する。

このとき、 U の定義により、ある閉点 $(b_i, \widehat{b}_i) \in B \times_k \widehat{B}$ ($i = 1, 2$) と同型

$$F_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}(\mathbb{L}q^*k(a_i) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a}_i)) \simeq \mathbb{L}(q')^*k(b_i) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}(p')^*k(\widehat{b}_i)$$

が存在する。

今、 $D^b(B \times_k B)$ の対象 \mathcal{G} を以下で定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\stackrel{\text{def}}{=} (\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \times \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B}) \circ \mathbb{R}(\mu_A)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A})(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a})) \\ &\simeq (\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \times \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B})(\mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-a}}) \quad (\text{補題 3.17}) \end{aligned}$$

このとき、直接的な計算によって、この \mathcal{G} を核とする Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{G}}^{B \rightarrow B}$ は以下の結合で得られる関手と同型であることがわかる (cf. 補題 3.17)：

$$D^b(B) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}^{B \rightarrow A}} D^b(A) \xrightarrow{(\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-a})_*} D^b(A) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B}} D^b(B)$$

従って、 $(a, \widehat{a}) = (a_1, \widehat{a}_1) + (a_2, \widehat{a}_2)$ より

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{G}}^{B \rightarrow B} &\simeq \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B} \circ (\mathcal{P}_A(\widehat{a}_2) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-a_2})_* \circ (\mathcal{P}_A(\widehat{a}_1) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-a_1})_* \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{B \rightarrow A} \\ &\simeq \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B} \circ (\mathcal{P}_A(\widehat{a}_2) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-a_2})_* \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{B \rightarrow A} \circ \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[g]}^{A \rightarrow B} \circ (\mathcal{P}_A(\widehat{a}_1) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-a_1})_* \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{B \rightarrow A} \\ &\simeq (\mathcal{P}_B(\widehat{b}_2) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-b_2})_* \circ (\mathcal{P}_B(\widehat{b}_1) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-b_1})_* \\ &\simeq (\mathcal{P}_B(\widehat{b}_2) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ (\mathcal{P}_B(\widehat{b}_1) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-b_2})_* \circ \mathbb{R}(t_{-b_1})_* \\ &\simeq (\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(t_{-b})_* \\ &\simeq \Phi_{\mathbb{L}(q')^*\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-b}}}^{B \rightarrow B} \quad (\text{補題 3.17}) \end{aligned}$$

従って、系 2.21 より、

$$\mathcal{G} \simeq \mathbb{L}(q')^*\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-b}}$$

つまり、

$$F_{\mathcal{E}}(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a})) \simeq (\mathbb{L}q^*k(b) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{b}))$$

を得る。これより、主張は系 2.27 から従う。 \square

定理 3.16 より、次の系が得られる。

系 3.20. 導来同値なアーベル多様体の同型類のなす集合は有限集合。

証明. B をアーベル多様体 A と導来同値なアーベル多様体とすると、定理 3.16 より、 B は $A \times_k \widehat{A}$ のアーベル多様体としての直和因子と同型になる。一方、同型を除いて、アーベル多様体は直和因子を有限個しか持たない (cf. [Mi], Theorem 18.7)。 \square

3.4 アーベル多様体の導来同値 (2)

§ 3.4 では、§ 3.3 に引き続き、導来同値な k 上のアーベル多様体の対、つまり、 k -線形三角圏としての圏同値

$$\Phi : D^b(A) \longrightarrow D^b(B)$$

が存在するアーベル多様体の対 (A, B) に対して、そのような対がどのような性質を持つかという問題について考察をする。

定理 3.16 より、そのようなアーベル多様体の対に対して、同型射

$$f_{\mathcal{E}} : A \times_k \widehat{A} \longrightarrow B \times_k \widehat{B}$$

が存在する。一般に、同型射

$$f : A \times_k \widehat{A} \longrightarrow B \times_k \widehat{B}$$

が与えられたとすると、

$$f_1 \stackrel{\text{def}}{=} q' \circ f|_{A \times_k e_{\widehat{A}}} : A \longrightarrow B ; f_2 \stackrel{\text{def}}{=} p' \circ f|_{A \times_k e_{\widehat{A}}} : A \longrightarrow \widehat{B} ;$$

$$f_3 \stackrel{\text{def}}{=} q' \circ f|_{e_A \times_k \widehat{A}} : \widehat{A} \longrightarrow B ; f_4 \stackrel{\text{def}}{=} p' \circ f|_{e_A \times_k \widehat{A}} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$$

と定義することにより、 f を

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$$

と書くことができる (つまり、

$$\begin{array}{ccc} A \times_k \widehat{A} & \longrightarrow & B \times_k \widehat{B} \\ (a, \widehat{a}) & \mapsto & (a, \widehat{a}) \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} = (f_1(a) + f_3(\widehat{a}), f_2(a) + f_4(\widehat{a})) \end{array}$$

また、 $A \simeq \widehat{\widehat{A}}$ 、 $B \simeq \widehat{\widehat{B}}$ という自然な同型を用いることによって、同型射

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} : A \times_k \widehat{A} \longrightarrow B \times_k \widehat{B}$$

に対して、

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \widehat{f}_4 & -\widehat{f}_2 \\ -\widehat{f}_3 & \widehat{f}_1 \end{pmatrix} : B \times_k \widehat{B} \longrightarrow A \times_k \widehat{A}$$

という同型射を考えることができる。

定義 3.21. 体 k 上のアーベル多様体 A 、 B に対して、 $U(A \times_k \widehat{A}, B \times_k \widehat{B})$ を $\tilde{f} = f^{-1}$ を満たす同型射 $f : A \times_k \widehat{A} \xrightarrow{\sim} B \times_k \widehat{B}$ のなす集合とする。

定義 3.22. A を k 上のアーベル多様体とする。

(i) 閉点 $(a, \widehat{a}) \in A \times_k \widehat{A}$ に対して、 $\Phi_{(a, \widehat{a})} : D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(A)$ を以下で定義される圏同値とする :

$$\Phi_{(a, \widehat{a})} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_A} (-)) \circ \mathbb{R}(t_a)_* : D^b(A) \longrightarrow D^b(A)$$

(ii) 閉点 $(a, \widehat{a}) \in A \times_k \widehat{A}$ に対して、 $F_{(a, \widehat{a})} : D^b(A \times_k \widehat{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(A \times_k \widehat{A})$ を、(i) で定義された圏同値 $\Phi_{(a, \widehat{a})}$ に対して、定義 3.13 で定義される圏同値とする。

補題 3.23. A, B を k 上のアーベル多様体、 $\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} : D^b(A) \rightarrow D^b(B)$ を圏同値、 $f_{\mathcal{E}} : A \times_k \widehat{A} \xrightarrow{\sim} B \times_k \widehat{B}$ を定理 3.16 によって得られる同型射とする。このとき、 $f_{\mathcal{E}}(a, \widehat{a}) = (b, \widehat{b})$ であることと

$$\Phi_{(b, \widehat{b})} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \simeq \Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \circ \Phi_{(a, \widehat{a})}$$

となることは同値。

証明. 補題 3.17 より、任意の閉点 $a \in A$ 、 $\widehat{a} \in \widehat{A}$ に対して、

$$\mathbb{R}(\mu_A)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_A}^{\widehat{A} \rightarrow A})(\mathbb{L}q^*k(a) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}} \mathbb{L}p^*k(\widehat{a})) \simeq \mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-a}}$$

また、同様に、補題 3.17 より、任意の $b \in B$ 、 $\widehat{b} \in \widehat{B}$ に対して、

$$\mathbb{R}(\mu_B)_* \circ (\text{id} \times \Phi_{\mathcal{P}_B}^{\widehat{B} \rightarrow B})(\mathbb{L}(q')^*k(b) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}} \mathbb{L}(p')^*k(\widehat{b})) \simeq \mathbb{L}(q')^*\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-b}}$$

従って、 $F_{\mathcal{E}}(k(a, \widehat{a})) \simeq k(b, \widehat{b})$ (つまり、 $f_{\mathcal{E}}(a, \widehat{a}) = (b, \widehat{b})$) であることと

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \times \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[-g]}^{A \rightarrow B}(\mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-a}}) \simeq \mathbb{L}(q')^*\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-b}}$$

となることは同値である。ここで、補題 3.17 と簡単な計算によって、同型

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} \times \Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[-g]}^{A \rightarrow B}(\mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k A}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-a}}) \simeq \mathbb{L}(q')^*\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k B}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\Gamma_{-b}}$$

の存在と図式

$$\begin{array}{ccc} D^b(A) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[-g]}^{B \rightarrow A}} & D^b(B) \\ \Phi_{(a, \widehat{a})} \downarrow & & \downarrow \Phi_{(b, \widehat{b})} \\ D^b(A) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B}} & D^b(B) \end{array}$$

の可換性は同値である。よって、 $\Phi_{\mathcal{E}^{\vee}[-g]}^{B \rightarrow A} \simeq (\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B})^{-1}$ という同型から主張は従う。 \square

命題 3.24. A, B を k 上のアーベル多様体、 $\Phi_{\mathcal{E}}^{A \rightarrow B} : D^b(A) \rightarrow D^b(B)$ を圏同値とする。このとき、定理 3.16 によって得られる同型射 $f_{\mathcal{E}} : A \times_k \widehat{A} \xrightarrow{\sim} B \times_k \widehat{B}$ は $U(A \times_k \widehat{A}, B \times_k \widehat{B})$ の元。

証明. (a, \widehat{a}) を $A \times_k \widehat{A}$ の閉点、 $(b, \widehat{b}) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\mathcal{E}}(a, \widehat{a})$ とする。そのとき、系 3.15; 補題 3.23 により、

$$F_{\mathcal{E}} \circ F_{(a, \widehat{a})} \simeq F_{f_{\mathcal{E}}(a, \widehat{a})} \circ F_{\mathcal{E}} : D^b(A \times_k \widehat{A}) \longrightarrow D^b(B \times_k \widehat{B})$$

となる。

$$\mathcal{P}_A(a, \widehat{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}q^*\mathcal{P}_A(\widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}p^*(\mathcal{P}_A(a)^{\otimes -1});$$

$$\mathcal{P}_B(b, \widehat{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}(q')^*\mathcal{P}_B(\widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}}^{\mathbb{L}} \mathbb{L}(p')^*(\mathcal{P}_B(b)^{\otimes -1});$$

とすると、 $F_{\mathcal{E}}$ 、 $F_{(a, \widehat{a})}$ 、 $F_{f_{\mathcal{E}}(a, \widehat{a})}$ の定義により、上の同型

$$F_{\mathcal{E}} \circ F_{(a, \widehat{a})} \simeq F_{f_{\mathcal{E}}(a, \widehat{a})} \circ F_{\mathcal{E}}$$

は

$(\mathcal{N}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(f_{\mathcal{E}})_* \circ (\mathcal{P}_A(a, \widehat{a}) \otimes_{\mathcal{O}_{A \times_k \widehat{A}}}^{\mathbb{L}} (-)) \simeq (\mathcal{P}_B(b, \widehat{b}) \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}}^{\mathbb{L}} (-)) \circ (\mathcal{N}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{B \times_k \widehat{B}}}^{\mathbb{L}} (-)) \circ \mathbb{R}(f_{\mathcal{E}})_*$ であること、つまり、

$$\mathbb{R}(f_{\mathcal{E}})_*(\mathcal{P}_A(a, \widehat{a})) \simeq \mathcal{P}_B(b, \widehat{b})$$

更に言い換えれば

$$\widehat{f}_{\mathcal{E}}(\widehat{b}, -b) = (\widehat{a}, -a)$$

であることを示している。従って $\widehat{f}_{\mathcal{E}} = f_{\mathcal{E}}^{-1}$ を得る。 \square

命題 3.24 より、次の系が直ちに従う：

系 3.25. A, B を k 上のアーベル多様体とする。そのとき、 A と B が導来同値であることと $U(A \times_k \widehat{A}, B \times_k \widehat{B}) \neq \emptyset$ であることは同値。

A を k 上のアーベル多様体とすると、 $A \times_k \widehat{A}$ の第一コホモロジー群 $H^1(A \times_k \widehat{A}, \mathbb{Z})$ は Künneth の公式により $H^1(A, \mathbb{Z}) \oplus H^1(\widehat{A}, \mathbb{Z}) \simeq H^1(A, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(A, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ と同型である。従って、 $H^1(A \times_k \widehat{A}, \mathbb{Z})$ は以下で定義される自然な形式を持つ：

$$\begin{aligned} q_A : H^1(A \times_k \widehat{A}, \mathbb{Z}) &\simeq H^1(A, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(A, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) &\longrightarrow &\mathbb{Z} \\ z = (x, y) & &\longmapsto &2y(x) \end{aligned}$$

定理 3.26. k 上のアーベル多様体 A, B が導来同値であることと、Hodge 等長射

$$H^1(f) : H^1(A \times_k \widehat{A}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(B \times_k \widehat{B}, \mathbb{Z})$$

を誘導する同型射

$$f : A \times_k \widehat{A} \longrightarrow B \times_k \widehat{B}$$

(i.e., 任意の $x \in H^1(A \times_k \widehat{A}, \mathbb{Z})$ に対して $q_B(H^1(f)(x)) = q_A(x)$ を満たす同型射) が存在することは同値。

証明. $H^1(A, \mathbb{Z})$ と $H^1(B, \mathbb{Z})$ の基底を適当に選ぶことによって、 q_A と q_B の表現行列をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としても良い。そのとき、

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$$

が Hodge 等長射を誘導することと

$$\begin{pmatrix} H^1(f_1)^t & H^1(f_3)^t \\ H^1(f_2)^t & H^1(f_4)^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H^1(f_1) & H^1(f_2) \\ H^1(f_3) & H^1(f_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となることは同値。従って、

$$H^1(f_1)^t = H^1(\widehat{f_1}) ; H^1(f_2)^t = -H^1(\widehat{f_2}) ; H^1(f_3)^t = -H^1(\widehat{f_3}) ; H^1(f_4)^t = H^1(\widehat{f_4})$$

であるので、 $\widetilde{f} = f^{-1}$ であることと $H^1(f)$ が Hodge 等長射であることは同値である。よって、主張は定理 3.16; 命題 3.24; 3.25 から従う。 \square

4 Derived equivalence of $K3$ surfaces (瀧 真語)

4.1 Introduction

川又雄二郎先生が書かれた導来圏の解説記事 [K] がある。これは「標語的にいえば、代数多様体上の接続層のなすアーベル圏は双正則幾何に対応し、その導来圏は双有理幾何に対応する。」という出だしで始まっている。ここ数年は高次元の双有理幾何が物凄い勢いで研究されている。そんななか、高次元の双有理幾何の専門家である川又先生が書かれたこのフレーズは含蓄がある。

双有理幾何で手取り早く勉強でき、なお且そこそこ面白い次元は2だと思う。つまり曲面論だ。代数曲面を(双有理)不変量によって分類する、という問題は20世紀初頭にEnriques, Castelnuovo, Severi, Fanoらに代表されるイタリア学派によってとりあえず解決された。しかしそれは $K3$ 曲面と楕円曲面の構造論に関して些か不完全さが残るものであった。実は $K3$ 曲面と楕円曲面は代数曲面だけを考えているよりも、一般のコンパクト複素曲面を導入する事でより良く見えてくるものなのである。(アーベル曲面についても似たような事情があるが、複素多様体としての構造がハッキリしているので、特に支障を感じることはなかった。)そしてその後、イタリア学派による分類理論は小平邦彦によって非代数的なものも含めた複素多様体の立場から再構築された。

このような曲面の分類理論を導来圏を通して眺めてみる事は、なかなかオシャレではないだろうか。実際に導来圏は曲面の分類において良い不変量であると言うことができる。しかし、上で名前が挙がった $K3$ 曲面や楕円曲面などは、導来圏を通して曲面の分類理論を眺めなおしたときに微妙な振る舞いをするのである。

本稿ではこの微妙な振る舞いをする $K3$ 曲面の導来圏同値について解説する。Torelliの定理(定理4.14)によると、第2コホモロジーの間のHodge等長同型によって $K3$ 曲面の同型は与えられるものであった。これの類似が $K3$ 曲面の導来圏同値についても成り立つのである。それが本稿の目標である。

また本稿では複素数体 \mathbb{C} 上で議論を行う事にする。

Section 4.2ではTorelliの定理など、 $K3$ 曲面の基本事項について触れる。とは言うものの、基本事項を全て網羅しているワケではないので、 $K3$ 曲面を本格的に勉強したい方は下で挙げた文献にあたって貰いたい。ある程度格子や $K3$ 曲面に慣れている人は読み飛ばして頂いて構わない。

Section 4.3では $K3$ 曲面の導来圏版Torelliの定理の紹介をする。 $K3$ 曲面のTorelliの定理が「 $K3$ 曲面の同型とはどういうことか?」という問に答えるように、この導来圏版Torelliの定理は「 $K3$ 曲面の導来圏同値とはどういうことか?」という問に答えてくれる。

4.2 What is a $K3$ surface?

$K3$ 曲面は複素曲面の中で最も面白いクラスの一つであり、古くは4次曲面やKummer曲面という形で研究されてきた、由緒正しい複素多様体である。これに関して詳しく勉強するならば、フランス語ではあるが[Be]が一番良いテキストだと思う。曲面の分類などにも触れられている。Beauvilleを中心として数名で書かれているのだが、 $K3$ 曲面の肝心な部分は全部Beauvilleが書いている。実際は彼が書いた部分だけで十分だと思う。

[BHPV]もよく引用される文献である。曲面論を勉強するにはこの本、と言った感じだが、 $K3$ 曲面に関してはやっぱり[Be]に軍配があがる。

さて、 $K3$ 曲面を特徴付ける性質には幾つか同値なものが存在する。ここでは次のように定義する：

定義 4.1. X をコンパクト複素曲面とする。標準束 K_X が自明であり、 $q := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ のとき X を $K3$ 曲面という。

このように $K3$ 曲面は数値的な量のみで定義されるが、一般に $K3$ 曲面は必ずしも代数的ではない。(ここに代数曲面にとどまらない複素曲面としての分類理論の構築の必然性がある。)さらにSiuによる大結果が次の [Siu].

定理 4.2. $K3$ 曲面は Kähler 多様体である.

$K3$ 曲面の由来として Kummer, Kähler, Kodaira の名が挙がる. しかし何の皮肉か, この定理の主張が示されたのは 1980 年に入ってからと, 随分最近である. 以上余談.

ここで $K3$ 曲面の幾つかの例を挙げておく. 何れも重要な例である.

例 4.3 (完全交叉).

- \mathbb{P}^3 中の非特異 4 次曲面は $K3$ 曲面である.
- \mathbb{P}^4 中の 2 次超曲面 Q と 3 次超曲面 D が横断的に交わり, 共通部分 $X := Q \cap D$ が非特異なとき, X は $K3$ 曲面である.
- \mathbb{P}^5 中の 3 つの 2 次超曲面 S_1, S_2, S_3 が横断的に交わり, 共通部分 $X := S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が非特異なとき, X は $K3$ 曲面である.

これら 3 つの例については, Bertini の定理によって完全交叉が滑らかで連結になるような超曲面を取ることができることに注意する.

添加公式により次が成り立つ:

補題 4.4. S を \mathbb{P}^{r+2} 内の次数 d_1, d_2, \dots, d_r の超曲面 S_1, S_2, \dots, S_r による完全交叉とする. このとき

$$\Omega_S^2 = \mathcal{O}_S \left(\sum_{i=1}^r d_i - (r+3) \right)$$

が成り立つ. ■

これによって射影空間内の超曲面の完全交叉によって得られる $K3$ 曲面の可能性は例 4.3 の 3 つだけである. 実際それら 3 つの候補は $K3$ 曲面になっている. すなわち次が成り立つ.

補題 4.5. S を射影空間内の完全交叉とする. $p \in \mathbb{Z}$ と $1 \leq i \leq \dim S - 1$ に対し, $H^i(S, \mathcal{O}_S(p)) = 0$ が成り立つ.

証明. Y を \mathbb{P}^n の d 次超曲面とする. このとき完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

によって得られるコホモロジーの完全列を利用し, さらに S を定める方程式の数の帰納法を用いる事で $H^i(S, \mathcal{O}_S(p)) = 0$ を得る. □

例 4.6 (分岐被覆). 非特異な 6 次曲線で分岐する \mathbb{P}^2 の 2 重被覆は $K3$ 曲面である.

\mathbb{P}^2 内の非特異な 6 次曲線 C で分岐する 2 重被覆 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ は

$$\begin{aligned} K_X + \tilde{C} &= \pi^*(K_{\mathbb{P}^2} + C) \\ &= \pi^*K_{\mathbb{P}^2} + 2\tilde{C} \end{aligned}$$

を満たす. これより $K_X = -3H + \tilde{C}$ であるから, $2K_X = 0$ を得る.

ここで $K_X \neq 0$ と仮定する. このとき $H^0(X, \Omega_X^2) = 0$ なので $p_g = 0$ である. \mathbb{P}^2 内の非特異な 6 次曲線の種数は $(6-1)(6-2)/2 = 10$ であるので,

$$\begin{aligned} \chi_{\text{top}}(X) &= 2\chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^2) - \chi_{\text{top}}(C) \\ &= 2 \times 3 - (2 - 2g(C)) \\ &= 24 \end{aligned}$$

を得る. ここで $\chi_{\text{top}}(X), \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^2), \chi_{\text{top}}(C)$ で X, \mathbb{P}^2, C の Euler 数を, $g(C)$ で C の種数を表す.

以上の事と, Noether の公式:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_X) &= \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X)) \\ &= (0 + 24)/12 \\ &= 2\end{aligned}$$

によって $1 - q + p_g = 2$ を得る. 仮定より今は $p_g = 0$ であるが, これは $q \geq 0$ に反する. 以上より X が $K3$ 曲面であることがわかる.

次に構成する Kummer 曲面は $K3$ 曲面の最も重要な例の一つである.

例 4.7 (Kummer 曲面). T を複素トーラス, i を -1 倍する対合; $(z \mapsto -z)$ とする. このとき $T/\langle i \rangle$ は 16 個の特異点を持つ. これらの特異点を解消して得られる曲面を Kummer 曲面と呼ぶ. この Kummer 曲面は $K3$ 曲面である.

固定点の近傍を $U := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ とし, $\tilde{U} := \{((x, y), [\xi_0 : \xi_1]) \in U \times \mathbb{P}^1 \mid x\xi_1 = y\xi_0\}$ を考える. $s = \xi_1/\xi_0, t = \xi_0/\xi_1$ とおき, $V_0 := \{(x, s) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < 1, |xs| < 1\}, V_1 := \{(y, t) \in \mathbb{C}^2 \mid |y| < 1, |yt| < 1\}$ とすれば $\tilde{U} = V_0 \cup V_1$ とできる. これらを \tilde{U} の局所座標近傍とみなすことができる.

これによって $\epsilon: \tilde{U} \rightarrow U$ が $(x, s) \mapsto (x, xs)$ と $(y, t) \mapsto (yt, y)$ で与えられる. このとき \tilde{i} を $(x, s) \mapsto (-x, s), (y, t) \mapsto (-y, t)$ と定めると, これは \tilde{U} 上の対合になる. 従って 16 点の固定点でのブローアップ $\epsilon: \tilde{T} \rightarrow T$ に対し, 対合 i の \tilde{T} への拡張 \tilde{i} を得ることができた. 従って $\tilde{T}/\langle \tilde{i} \rangle$ を考える事が出来る. 特異点のタイプ (実は 16 個の特異点は A_1 型特異点である.) など色々チェックすべきことはあるが, この $\tilde{T}/\langle \tilde{i} \rangle$ が Kummer 曲面である.

$$\begin{array}{ccc}\tilde{T} & \xrightarrow{\epsilon} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T}/\langle \tilde{i} \rangle & \longrightarrow & T/\langle i \rangle \\ \parallel & & \\ \text{Kummer 曲面} & & \end{array}$$

特に注意すべき点は V_0 の局所座標 (x, s) に対し, $V_0/\langle \tilde{i} \rangle$ の局所座標は (x^2, s) であることである. これを考慮しつつ, 至る所で消えない正則 2 形式が存在することを示す.

U 上の局所座標 (x, y) に対し, V_0 上では

$$\epsilon^*(dx \wedge dy) = dx \wedge d(xs) = xdx \wedge ds,$$

同様に V_1 上では

$$\epsilon^*(dx \wedge dy) = d(yt) \wedge dy = -ydy \wedge dt,$$

である. $\tilde{T}/\langle \tilde{i} \rangle$ 上ではそれぞれ $\frac{1}{2}d(x^2) \wedge ds, -\frac{1}{2}d(y^2) \wedge dt$ と見なす事によって, $\tilde{T}/\langle \tilde{i} \rangle$ 上に至る所消えない正則 2 形式を定める事ができる.

実際 $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ 上では

$$\begin{aligned}-ydy \wedge dt &= -xsd(xs) \wedge d\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= -xs^2dx \wedge \left(-\frac{1}{s^2}ds\right) \\ &= xdx \wedge ds\end{aligned}$$

となっている.

次に上のようにして得られた Kummer 曲面 X の不正則数が 0 であることを示す.

$\eta (\neq 0) \in H^0(X, \Omega_X^1)$ とすると, η は \tilde{T} で \tilde{i} で不変な正則 1 形式を引き起こす. ブローアップ $\epsilon: \tilde{T} \rightarrow T$ によって $H^0(\tilde{T}, \Omega_{\tilde{T}}^1) \simeq H^0(T, \Omega_T^1)$ であるから, η は $H^0(T, \Omega_T^1)$ 上で i で不変な正則 1 形式を引き起こす. しかし $H^0(T, \Omega_T^1)$ は dx, dy によって生成され, 対合 i によって $i(dx) = -dx, i(dy) = -dy$ が成り立つ. 以上によって $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$ を得る. 従って Kummer 曲面は $K3$ 曲面である.

4.2.1 $K3$ 格子

定理 4.2 より Hodge 分解: $H^2(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ が成り立つ. これによって $K3$ 曲面の情報が得られることを期待される. 実際, $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p)$ と定めると, K_X が自明であることと Serre の双対定理から $h^{2,0} = h^{0,2} = 1$ である. また $b_2 = 22 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2}$ であるから, $h^{1,1} = 20$ を得る.

なお $b_2 = 22$ については $K3$ 曲面の Euler 数が 24 であることからわかる. 実際 $K3$ 曲面 X に対して Noether の公式: $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{Top}}(X))$ を用いることで, $K3$ 曲面 X の Euler 数は 24 であることがわかる. さらに $K3$ 曲面のトポロジーに関する著しい性質としては次がある.

命題 4.8. X を $K3$ 曲面とする. このとき次:

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = H^1(X, \mathbb{Z}) = H_3(X, \mathbb{Z}) = H^3(X, \mathbb{Z}) = 0.$$

が成り立つ.

これと普遍係数定理によって $H^2(X, \mathbb{Z})$ は階数 22 の自由 \mathbb{Z} 加群であることがわかる. 特に $H^2(X, \mathbb{Z})$ はカップ積によって格子の構造が入る. この格子は Hirzebruch の符号定理から符号が $(3, 19)$ であること, Poincaré 双対定理からユニモジュラーであること, Wu の公式から偶格子であることがわかる.

次の定理からこの格子は符号が $(3, 19)$ でユニモジュラーな偶格子として一意的に特徴付けられる. これに関しては [Se] の第 5 章に丁寧な解説がある. 言葉遣いは幾分違う.

定理 4.9. 不定符号でユニモジュラーな偶格子は階数と指数によって同型をのぞいて一意的に定まる. つまり L を不定符号でユニモジュラーな偶格子とする. (r_+, r_-) をその符号とするとき

- $r_+ - r_- \equiv 0 \pmod{8}$
- $L \simeq U^s \oplus E_8^t$

ただし, $s = \min\{r_+, r_-\}$, $t = |r_+ - r_-|/8$ である. ここで U は \mathbb{Z}^2 とその上の行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって定義される双線型形式との組で定まる格子, E_8 は Dynkin 図形 E_8 から定まる, 符号が $(0, 8)$ とした負定値な格子である. ■

従って, $H^2(X, \mathbb{Z})$ を格子と見ると $U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$ と同型である. この格子は $K3$ 曲面の研究で中心的な役割を果たす. しばしばこの格子は $K3$ 格子とも呼ばれる.

4.2.2 Torelli 型定理

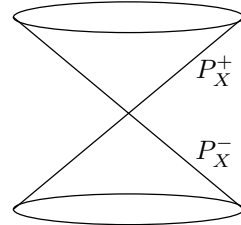
定理 4.2 から分かるように, $K3$ 曲面は必ずしも代数的ではないので, 具体的に代数方程式で書き上げることは不可能である.

実際 $K3$ 曲面を扱うにあたって, 幾何学的な情報を格子の言葉へ翻訳することによって理解されることが多い. この翻訳の道具として, 特に Torelli 型定理は最も重要な定理になり得る. そのために幾つかの準備を行う.

命題 4.10. X を Kähler 曲面とし, $(,)$ を $H^2(X, \mathbb{R})$ 上のカップ積とする. この $(,)$ を $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) := H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X)$ に制限したとき, $(,)|_{H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)}$ の符号は $(1, h^{1,1} - 1)$ である. ■

これはまさに Hodge の指数定理である. すなわち X を $K3$ 曲面とすれば, $(,)|_{H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)}$ の符号は $(1, 19)$ である. $K3$ 曲面の特殊事情を用いると, これは $H^2(X, \mathbb{Z})$ の符号が $(3, 19)$ であることと, $H^0(X, \Omega_X^2)$ の生成元 ω_X に対して, その実部と虚部で生成される空間の符号が $(2, 0)$ であることから導かれる.

次に $P_X := \{x \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) | x^2 > 0\}$ を考える.
 上で求めたように P_X の符号は $(1, 19)$ なので,
 $x^2 = (x, x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{19}^2$ となる.
 これより P_X は右図のように 2 つの連結成分 P_X^+, P_X^- を持つ.



補題 4.11. $x, y \in \overline{P_X^+} - \{0\}$ のとき $(x, y) \geq 0$ であり, x, y の何れかが P_X^+ に含まれるならば $(x, y) > 0$ である. これはもちろん P_X^- についても成り立つ.

証明. Cauchy-Schwarz の不等式 :

$$(x_0^2 + \dots + x_r^2)(y_0^2 + \dots + y_r^2) \geq (x_0 y_0 + \dots + x_r y_r)^2$$

に注意すれば容易である. □

以下しばしばコホモロジー類を扱うが, そのコホモロジー類は何れも $K3$ 曲面上の因子から定まるもののみを考える.

定義 4.12. P_X^+, P_X^- で, Kähler 類を含む方を **正錐** と呼ぶ. 以下 P_X^+ を正錐とする. また,

$$C_X := \{x \in P_X^+ | (x, d) > 0, \forall d \in H_{\mathbb{R}}^{1,1} : \text{有効類}, d \neq 0\}$$

を **Kähler 錐** と呼ぶ.

もちろん Kähler 類は Kähler 錐に含まれる.

$K3$ 曲面上の既約曲線 C は $C^2 < 0$ ならば $C \simeq \mathbb{P}^1$ であることから, Kähler 錐 C_X は, $C_X = \{x \in P_X^+ | (x, C) > 0, \forall C \simeq \mathbb{P}^1\}$ と表すことが出来る.

また豊富類も Kähler 錐に含まれる事がわかる. 従って代数的な $K3$ 曲面を扱う場合には豊富類を扱えばよい. 大体の場合, 豊富類の方が Kähler 類よりも扱いやすいと思う. つまり次が成り立つ.

補題 4.13. X, X' を $K3$ 曲面, $\psi : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ を Hodge 分解とカップ積を保つ \mathbb{Z} -加群としての同型写像とする. このとき

- (i) ψ は有効類を保ち, 正錐を保つ.
- (ii) ψ は Kähler 錐を保つ.

は同値である. さらに X が代数的 $K3$ 曲面であれば X' も代数的であり, (i),(ii) は

- (iii) ψ は豊富類を保つ.

とも同値である. ■

$K3$ 曲面全体は 20 次元のモジュライ空間を持つが、代数的な $K3$ 曲面全体は 19 次元の解析的部分集合が可算無限個集まったものである。つまり非代数的なものを込めて考えない限り、 $K3$ 曲面の綺麗な族は得られないのである。(とは言ふものの、代数的な $K3$ 曲面のみを考えても悪いわけではない。それはそれで面白いと思う。)

次の定理は $K3$ 曲面のモジュライ空間を完全に記述する強力かつ驚異的な定理である。

定理 4.14. X, X' を $K3$ 曲面, $\psi: H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$ を Hodge 分解とカップ積を保つ \mathbb{Z} -加群としての同型写像とする。このとき、同型写像 $\varphi: X' \rightarrow X$ が存在する。さらに ψ が Kähler 錐を保つとき $\varphi^* = \psi$ を満たす同型写像 $\varphi: X' \rightarrow X$ が唯一存在する。

注意 4.15. この定理の「 ψ が Kähler 錐を保つ」という条件は補題 4.13 によって、扱い易いもの書き直すことが出来る。

この定理の主張は $K3$ 曲面はその周期によって完全に決定されるというものである。従って周期が与えられれば、そこから元々の $K3$ 曲面の幾何学的構造を再構成することが原理的には可能である。

このような定理を用いる研究方向を確立したのは [PSS] である。従って原論文である [PSS] を読むことは大切である。しかし [PSS] はミスやナンセンスが多く、どうも読みにくい。手っ取り早く(?) 証明の詳細を知るには [Be] を参照することをオススメする。

4.3 Derived equivalence of $K3$ surfaces

アーベル多様体の導来圏同値について定理 3.26 があった。 $K3$ 曲面についても同様の結果がある。「2 つの $K3$ の曲面はいつ導来圏同値か?」という事を格子の言葉で表すことができる。これは定理 4.14 と見比べると中々面白いと思う。

導来圏の一般論は [GM] や [Ha1] を参考にされたい。もちろん [Hu] でもよい。また 2 節も是非読んで頂きたい。特に Fourier-向井変換については、その誕生作である [Muk] を一度手に取ってみると良いとおもう。2 行目に Fourier 変換の式が書かれている。

幾つかの大道具を用意すれば、 $K3$ 曲面の定義からすぐに次がわかる。

系 4.16. X を $K3$ 曲面, Y を滑らかな射影多様体とする。このとき X と Y が導来圏同値であれば、 Y は $K3$ 曲面である。

証明. 命題 2.1 により $\dim Y = \dim X = 2$ であり、 X と Y の標準因子 $K_X = K_Y = 0$ がわかる。さらに命題 2.36 によって

$$\bigoplus_{p-q=-1} H^{p,q}(X) \simeq \bigoplus_{p-q=-1} H^{p,q}(Y)$$

を得る。つまり、 $h^{0,1}(X) + h^{1,2}(X) = h^{0,1}(Y) + h^{1,2}(Y)$ である。ここで Serre の双対定理を用いれば $h^{0,1}(X) = h^{1,2}(X)$, $h^{0,1}(Y) = h^{1,2}(Y)$ となり、 $h^{0,1}(X) = h^{0,1}(Y) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ が導かれる。□

この系のミソは単に Y が $K3$ 曲面であることがわかるだけ、ということである。6 節によれば、導来圏の同値から多様体そのものの同型まで言える曲面のクラスも多いが、アーベル多様体同様、 $K3$ 曲面はそれに当てはまらない。

4.3.1 向井格子

あくまで $K3$ 曲面の同型の言い換えは定理 4.14 によるものである。つまり第 2 コホモロジーの間の Hodge 等長同型によって $K3$ 曲面の同型は与えられるものであった。従って導来圏の同値から第 2 コホモロジーの間に何かしらの情報が得られれば、理論上では $K3$ 曲面そのものの情報も得られることになる。しかし実際

は導来圏の同値から第2コホモロジーだけの情報を復元することはできない. $H^*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^4 H^i(X, \mathbb{Z})$ まで込めて考える必要がある.

以下幾らか準備を行うが, 向井ペアリングや向井ベクトルの由緒正しい定義は上記の著書を参考にして頂きたい.

$H^*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^4 H^i(X, \mathbb{Z})$ 上に向井ペアリングを定める. $K3$ 曲面 X はその定義から $H^1(X, \mathbb{Z}) = H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$ であることに注意する. ここでは $\alpha_i, \beta_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ に対して,

$$\langle (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2), (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1 \cdot \beta_1 - \alpha_0 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_0$$

と定める. (実は向井ペアリングの定義と見比べると, これは符号が異なっている. しかし特に問題はない.)

「 \cdot 」は $H^*(X, \mathbb{Z})$ 上の交点形式なので, $\langle (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2), (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \rangle$ は \mathbb{Z} に値をとる.

補題 4.17. $H^*(X, \mathbb{Z})$ は向井ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によって符号が $(4, 20)$ でユニモジュラーな偶格子となる.

また格子として $(H^*(X, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \simeq U^4 \oplus E_8^2$ である.

証明. 定理 4.9 による. □

ところで, 格子 $H^2(X, \mathbb{Z})$ には重さ 2 の Hodge 構造が入っていた. つまり Hodge 分解 $H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$ に対し, ω_X を X 上の至る所で消えない大域正則 2 形式とすると, $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X$, $H^{0,2}(X) = \mathbb{C}\bar{\omega}_X$ である. また, カップ積 $(*, *)$ によって

$$(H^{1,1}(X), \omega_X) = (H^{1,1}(X), \bar{\omega}_X) = 0$$

となり,

$$(\omega_X, \omega_X) = (\bar{\omega}_X, \bar{\omega}_X) = 0, (\omega_X, \bar{\omega}_X) > 0$$

である.

この $H^2(X, \mathbb{Z})$ の通常の Hodge 構造を保ち, $H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^4(X, \mathbb{C})$ を $(1, 1)$ 型とみなすことで $(H^*(X, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ にも重さ 2 の Hodge 構造を導入する. 以下, この重さ 2 の Hodge 構造を持つ格子 $(H^*(X, \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を $\tilde{H}(X, \mathbb{Z})$ と記す.

つまり $\tilde{H}^{1,1}(X) = (H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^4(X, \mathbb{C})) \oplus H^{1,1}(X)$ であり, $\tilde{H}^{2,0}(X) = H^{2,0}(X)$ である.

$\tilde{H}(X, \mathbb{Z})$ はしばしば向井格子と呼ばれる.

さて層 \mathcal{E} に対して, 向井ベクトル v は

$$v(\mathcal{E}) = \text{ch}(\mathcal{E}) \cdot \sqrt{\text{td}(X)} = (v_0(\mathcal{E}), v_1(\mathcal{E}), v_2(\mathcal{E})) \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

で与えられる. X が $K3$ 曲面であることから $\text{td}(X)$ を計算することができ, $\sqrt{\text{td}(X)} = (1, 0, 1)$ であることがわかる. 従って

$$v(\mathcal{E}) = (\text{rk}(\mathcal{E}), c_1(\mathcal{E}), \text{rk}(\mathcal{E}) + c_1^2(\mathcal{E})/2 - c_2(\mathcal{E}))$$

となるが, $H^2(X, \mathbb{Z})$ は偶格子であることから $v(\mathcal{E}) \in \tilde{H}(X, \mathbb{Z})$ が成り立つ.

4.3.2 $K3$ 曲面の導来圏

最後に「 $K3$ 曲面の導来圏同値とはどういうことか?」という問の答えの一つである.

次は技術的に大切な補題である.

補題 4.18. X と Y を $K3$ 曲面とする. $D^b(X \times Y)$ の任意の対象 \mathcal{E}^\bullet に対し, $v(\mathcal{E}^\bullet) \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ は整コホモロジー類である. つまり $v(\mathcal{E}^\bullet) \in H^*(X \times Y, \mathbb{Z})$ が成り立つ.

証明. $\sqrt{\text{td}(X \times Y)} = q^* \sqrt{\text{td}(X)} \cdot p^* \sqrt{\text{td}(X)} = q^*(1, 0, 1) \cdot p^*(1, 0, 1)$ であるから $\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet)$ が整であることを見ればよい. X は $K3$ 曲面であるから, これは地道に計算できる.

$$\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet) = (\text{rk}(\mathcal{E}^\bullet), c_1(\mathcal{E}^\bullet), (c_1^2(\mathcal{E}^\bullet) - 2c_2(\mathcal{E}^\bullet))/2, \text{ch}_3(\mathcal{E}^\bullet), \text{ch}_4(\mathcal{E}^\bullet))$$

とすると, $\text{rk}(\mathcal{E}^\bullet), c_1(\mathcal{E}^\bullet)$ は整である.

Künneth 分解によつて $c_1(\mathcal{E}^\bullet) \in H^2(X \times Y, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(Y, \mathbb{Z})$ と見なすことが出来る. $H^2(X, \mathbb{Z})$ と $H^2(Y, \mathbb{Z})$ は偶格子であったので $(c_1^2(\mathcal{E}^\bullet) - 2c_2(\mathcal{E}^\bullet))/2$ も整である.

次に Grothendieck-Riemann-Roch の定理: $\text{ch}(p_* \mathcal{E}^\bullet) = p_*(\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet) q^* \text{td}(X))$ を用いる. Künneth 分解によつて $\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet) = \sum_{r,s \leq 4} e^{r,s}$, $e^{r,s} \in H^r(X) \otimes H^s(Y)$ と表すと, $c_1(p_* \mathcal{E}^\bullet) = \int_X e^{4,2} + 2e^{0,2}$ である. $r+s \leq 4$ のときに $e^{r,s}$ は整であるから, $e^{4,2}$ は整である. q でも同じ議論を行えば $e^{2,4}$ が整であることがわかる. これより $\text{ch}_3(\mathcal{E}^\bullet) \in H^6(X \times Y, \mathbb{Z})$ を得る.

ch_4 も ch_3 と同様である. □

系 4.19. X と Y を $K3$ 曲面とする. $\Phi_{\mathcal{E}^\bullet} : D^b(X) \simeq D^b(Y)$ が同値であれば, コホモロジー上に導かれた写像によつて Hodge 等長写像 $\Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^H : \tilde{H}(X, \mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}(Y, \mathbb{Z})$ が与えられる.

証明. コホモロジーの Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^H : \tilde{H}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow \tilde{H}(Y, \mathbb{Q})$ が $\alpha \longmapsto p_*(q^* \alpha \cdot v(\mathcal{E}^\bullet))$ で与えられる.

$\Phi_{\mathcal{E}^\bullet}^H$ は補題 4.18 から整であることがわかる. また, 命題 2.38 より向井ペアリングを保つことがわかり, 命題 2.36 より Hodge 構造を保つことがわかる. □

実はこれの逆も成り立つ. 証明は省略するが, キーとなるものはやはり定理 4.14 である.

定理 4.20 (Mukai, Orlov). X と Y を $K3$ 曲面とする. X と Y が導来圏同値である必要十分条件は $\tilde{H}(X, \mathbb{Z})$ と $\tilde{H}(Y, \mathbb{Z})$ が Hodge 等長同型であることである. ■

定理 4.14 は $K3$ 曲面の同型が格子の言葉で表されていたが, この定理によると, $K3$ 曲面の導来圏同値も格子の言葉で表されることを示している.

どこでかは覚えていないが, 「 $K3$ 曲面の研究は格子の研究と言っても過言ではない」というような文章を読んだ記憶がある. この定理 4.20 を見て改めてそう思った.

最後に余談を書いておく. 4.2.2 節のはじめに「 $K3$ 曲面を扱うにあたって, 幾何学的な情報を格子の言葉へ翻訳することによって理解されることが多い。」と書いた. このときは $K3$ 曲面の情報をコホモロジーの情報に置き換える (周期写像) という意味で書いた. しかし今ここで同じ文章を書くとしたら, 導来圏の言葉に書き換えることを意味する. どちらも格子の言葉を経由していることには変わらない.

そんなこんなで, $K3$ 曲面の導来圏の研究で格子の言葉がバンバン飛び出してもなんら不思議はないと思う.

5 フリップとフロップ (岡田 拓三)

5.1 概説

高次元双有理幾何学において重要な役割を果たすフリップとフロップによる導来圏の対応をみる事が目標である。今回は、フリップとフロップのうち特殊なもの (基本フリップ、基本フロップと向井フロップ) しか扱わないが、まずは一般的な定義を与えておく。定義の際に現れる種々の用語 (\mathbf{Q} -因子、 f -豊富、等) については定義を省略する ([KM] 参照)。

定義 5.1. $f: X \rightarrow Y$ を正規多様体間の固有双有理射で、その例外集合の X における余次元が 2 以上のものとする。さらに、 D を X 上の \mathbf{Q} -因子で、 $-(K_X + D)$ が f -豊富な \mathbf{Q} -カルティエ因子であるとする。次にあげる条件をみたす正規多様体 X^+ と固有双有理射 $f^+: X^+ \rightarrow Y$ からなる組を f の D -フリップと呼ぶ。

- D^+ を D の X^+ への双有理変換とすると、 $K_{X^+} + D^+$ は \mathbf{Q} -カルティエ因子である。
- $K_{X^+} + D^+$ は f^+ -豊富である。
- f^+ の例外集合の X^+ における余次元は 2 以上である。

言葉の乱用ではあるが、誘導される有理写像 $\phi: X \dashrightarrow X^+$ のこともまた D -フリップと呼ぶ。 $D = 0$ のとき、 D -フリップのことを単にフリップと呼ぶ。

定義 5.2. $f: X \rightarrow Y$ を正規多様体間の固有双有理射で、その例外集合の X における余次元が 2 以上のものとする。さらに、 K_X は数値的に f -自明であるとする。 D を X 上の \mathbf{Q} -カルティエ \mathbf{Q} -因子で、 $-(K_X + D)$ が f -豊富であるものとする。このとき、 f の D -フリップのことを、 D -フロップとも呼ぶ。

f が端的 (つまり、 X が \mathbf{Q} -分解的で、 X 上の任意のカルティエ因子 B, B' に対して、両方同時に 0 ではないような $a, a' \in \mathbf{Z}$ が存在して、 aB と $a'B'$ が f 上線形同値になる) であるとき、 D -フロップは D の選び方に依らないことが知られている。従って、このとき $f^+: X^+ \rightarrow Y$ または $\phi: X \dashrightarrow X^+$ のことを f のフロップと呼ぶ。

基本フリップ、基本フロップ、または向井フロップ $X \dashrightarrow X'$ は X の特殊な部分多様体での爆発 $q: \tilde{X} \rightarrow X$ とそれにより得られた \tilde{X} 上の例外因子を異なる方向につぶす射 $p: \tilde{X} \rightarrow X'$ により定義される (詳細については 5.4, 5.5 節を参照のこと)。 $X \dashrightarrow X'$ が基本フリップ (あるいは基本フロップ) の場合は、 $q_* \circ p^*: D^b(X') \rightarrow D^b(X)$ が忠実充満 (あるいは圏同値) であることが示される (命題 5.19)。向井フロップの場合には、自然な双有理対応から定まる関手 $p_* \circ q^*: D^b(X) \rightarrow D^b(X')$ が忠実充満でないことがわかる (命題 5.21)。ところが、この場合にも $D^b(X)$ と $D^b(X')$ が圏同値であることが示される (命題 5.24)。

第 5.2, 5.3 節では、上記のことを導く準備として、閉移入と爆発における種々の層や導来圏の挙動について考察を行う。

ベクトル空間 V に対して、 $\mathbf{P}(V)$ で 1 次元部分ベクトル空間をパラメーター付けする射影空間を表すこととする。また、スキーム X 上の局所自由層 \mathcal{E} に対して、 $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ で $\text{Proj}(S(\mathcal{E}^*))$ を表すこととする。ここに、 \mathcal{E}^* は \mathcal{E} の双対であり、 $S(\mathcal{E}^*)$ は \mathcal{E}^* の対称代数である。これは、[Ha2] における定義とは異なるので注意が必要である。

5.2 準備：閉移入と爆発

この節では、 X は非特異な射影多様体とする。

命題 5.3. \mathcal{E} を X 上の階数 c の局所自由層とし、 s をその正則な大域切断とする。また、 $j: Y := (s = 0) \hookrightarrow X$ を閉移入とし、その法層を $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Y/X}$ とする。このとき、

1. $j_* j_* \mathcal{O}_Y \cong \bigoplus \wedge^k \mathcal{N}^*[k]$

なる標準的な同型が存在する。また、全ての $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対して、

$$2. j_* j^* j_* \mathcal{F}^\bullet \cong j_* \mathcal{O}_Y \otimes j_* \mathcal{F}^\bullet \cong j_* \left(\bigoplus \wedge^k \mathcal{N}^*[k] \otimes \mathcal{F}^\bullet \right)$$

$$3. \text{Hom}_X(j_* \mathcal{O}_Y, j_* \mathcal{F}^\bullet) \cong j_* \left(\bigoplus \wedge^k \mathcal{N}[-k] \otimes \mathcal{F}^\bullet \right)$$

が成立する。

証明. まず、次の Koszul 複体による分解

$$0 \rightarrow \bigwedge^c \mathcal{E}^* \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}^* \rightarrow j_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

が存在することに注意する。Koszul 複体に関しては、[Ma, 16 節] や [Ha2, p245] を参照されたい。これにより擬同型 $\bigwedge^\bullet \mathcal{E}^* \cong j_* \mathcal{O}_Y$ を得る。上記の Koszul 複体の微分は、その定義から Y に制限すれば 0 になるので、 $j^* j_* \mathcal{O}_Y \cong \bigwedge^\bullet \mathcal{E}^*|_Y \cong \bigoplus \wedge^k \mathcal{E}^*|_Y[k]$ を得る。また、法層に関して標準的な同型 $\mathcal{N} \cong \mathcal{E}|_Y$ があるので、1 を得る。

Koszul 複体による分解 $\bigwedge^\bullet \mathcal{E}^* \rightarrow j_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ を、

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \bigwedge^{i+1} \mathcal{E}^* & \longrightarrow & \bigwedge^i \mathcal{E}^* & \longrightarrow & \bigwedge^{i-1} \mathcal{E}^* \longrightarrow \cdots \\ & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ & & & M_{i+1} & & & M_i \\ & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \end{array}$$

と短完全列に分解する。これにより得られる短完全列

$$0 \rightarrow M_{i+1} \rightarrow \bigwedge^i \mathcal{E}^* \rightarrow M_i \rightarrow 0$$

を完全三角形とみなす。 $j_* \mathcal{F}^\bullet$ の台は Y に含まれ、射 $M_{i+1} \rightarrow \bigwedge^i \mathcal{E}^*$ は Y に制限すれば消えるので、 $M_{i+1} \rightarrow \bigwedge^i \mathcal{E}^*$ の写像錐を考えることにより、次の同型

$$M_i \otimes j_* \mathcal{F}^\bullet \cong \left(\bigwedge^i \mathcal{E}^* \otimes j_* \mathcal{F}^\bullet \right) \oplus (M_{i+1}[1] \otimes j_* \mathcal{F}^\bullet)$$

を得る（つまり、完全三角形が分裂する）。また、射影公式を用いて、

$$\bigwedge^i \mathcal{E}^* \otimes j_* \mathcal{F}^\bullet \cong j_*(j^* \bigwedge^i \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}^\bullet) \cong j_*(\bigwedge^i \mathcal{N}^* \otimes \mathcal{F}^\bullet)$$

がわかる。以上を用いれば、2 の 2 つ目の同型が得られる。また、2 の 1 つ目の同型は射影公式から従う。

3 の証明は、

$$\text{Hom}(j_* \mathcal{O}_Y, j_* \mathcal{F}^\bullet) \cong \text{Hom}(\bigwedge^\bullet \mathcal{E}^*, j_* \mathcal{F}^\bullet) \cong (\bigwedge^\bullet \mathcal{E}^*)^\vee \otimes j_* \mathcal{F}^\bullet$$

に注意すれば、後は、複体 $(\bigwedge^\bullet \mathcal{E}^*)^\vee$ を短完全列に分解して 2 の証明と同様の議論を繰り返せばよい。 \square

系 5.4. 命題 5.3 と同一の仮定の下で、すべての $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対して、

$$\mathcal{H}^l(j^* j_* \mathcal{F}^\bullet) \cong \bigoplus_{s-r=l} \bigwedge^r \mathcal{N}^* \otimes \mathcal{H}^s(\mathcal{F}^\bullet)$$

と、

$$\text{Ext}_X^l(j_* \mathcal{O}_Y, j_* \mathcal{F}^\bullet) \cong j_* \left(\bigoplus_{r+s=l} \bigwedge^r \mathcal{N} \otimes \mathcal{H}^s(\mathcal{F}^\bullet) \right)$$

が成立する。

証明. j_* は完全であるので、関手の同型 $\mathcal{H}^l \circ j_* \cong j_* \circ \mathcal{H}^l$ を得る。また、局所自由層とテンソル積をとる操作とコホモロジーをとる操作は可換である。従って、命題 5.3 から、

$$j_* \mathcal{H}^l(j^* j_* \mathcal{F}^\bullet) \cong \mathcal{H}^l \left(j_* \left(\bigoplus \wedge^k \mathcal{N}^*[k] \otimes \mathcal{F}^\bullet \right) \right) \cong j_* \left(\bigoplus \wedge^k \mathcal{N}^* \otimes \mathcal{H}^{k+l}(\mathcal{F}^\bullet) \right)$$

を得る。これにより、前半の主張が得られるが、後半も $\mathcal{E}xt_X^l(j_* \mathcal{O}_Y, j_* \mathcal{F}^\bullet) = \mathcal{H}^l(\text{Hom}_X(j_* \mathcal{O}_Y, j_* \mathcal{F}^\bullet))$ に注意すれば全く同様に示される。 \square

系 5.5. $j: Y \hookrightarrow X$ を非特異な超曲面とする。このとき、

$$1. j^* j_* \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-Y)[1]$$

が成立し、さらに、任意の $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対して

$$2. \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_Y(-Y)[1] \rightarrow j^* j_* \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$$

$$3. j_* j^* j_* \mathcal{F}^\bullet \cong j_* \mathcal{F}^\bullet \oplus j_*(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_Y(-Y))[1]$$

なる完全三角形と同型が存在する。

証明. 超曲面 $Y \subset X$ はある大域切断 $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(Y))$ の零集合である。従って、1 と 3 は命題 5.3 の特別な場合である。

次に 2 の証明に取りかかる。 $\Gamma \subset Y \times X$ と $\bar{\Gamma} \subset X \times Y$ を、それぞれ $j: Y \hookrightarrow X$ のグラフとその転置とする。また、 $Y \times X \times Y$ からの自然な射影 $\pi_{YX}, \pi_{XY}, \pi_{YY}$ や、対角埋め込み $\iota: Y \hookrightarrow Y \times Y$ を下図のように定める。

$$\begin{array}{ccccc} Y \times Y & \xleftarrow{\pi_{YY}} & Y \times X \times Y & & \\ \uparrow \iota & & \swarrow \pi_{YX} & \searrow \pi_{XY} & \\ & & \Gamma \subset Y \times X & & X \times Y \supset \bar{\Gamma} \\ & & \swarrow j & \searrow j & \\ Y & \xleftarrow{j} & X & \xleftarrow{j} & Y \end{array}$$

このとき、 $j_* \cong \Phi_{\mathcal{O}_\Gamma}: D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$ や $j^* \cong \Phi_{\mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}}: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ が確かめられる。ここで、 $\mathcal{R} := \pi_{YY*}(\pi_{YX}^* \mathcal{O}_\Gamma \otimes \pi_{XY}^* \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}})$ として、関手の同型 $j^* j_* \cong \Phi_{\mathcal{R}}$ を得る。従って、

$$\iota_* \mathcal{O}_Y(-Y)[1] \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_Y \quad (5.1)$$

なる完全三角形を構成すればよい。

次の図式を考察する。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times Y \xrightarrow{\varphi} Y \times Y \times Y \xleftarrow{\bar{\varphi}} Y \times \bar{\Gamma} \\ \downarrow \pi \qquad \qquad \downarrow \psi \\ Y \times Y \xleftarrow{\pi_{YY}} Y \times X \times Y \end{array}$$

ただし、 $\pi: \Gamma \times Y \rightarrow Y \times Y$ は、 $\pi = \pi_{YY} \circ \psi \circ \varphi$ として定義される射である。 $\pi_{YX}^* \mathcal{O}_\Gamma \cong \mathcal{O}_{\Gamma \times Y}$ と $\pi_{XY}^* \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}} \cong \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}}$ に注意すれば、射影公式を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \pi_{YY*}((\psi \circ \varphi)_* \mathcal{O}_{\Gamma \times Y} \otimes (\psi \circ \bar{\varphi})_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}}) \cong \pi_*(\mathcal{O}_{\Gamma \times Y} \otimes (\psi \circ \varphi)^*(\psi \circ \bar{\varphi})_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}}) \\ &\cong \pi_*(\varphi^* \psi^*(\psi_* \bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}})) \end{aligned}$$

を得る。さて、 ψ は因子の埋め込みになっているので、系 5.4 により、 $Y \times Y \times Y$ 上の任意の層 \mathcal{G} に対して複体 $\psi^* \psi_* \mathcal{G}$ のコホモロジーが計算可能である。つまり、 $\mathcal{H}^0(\psi^* \psi_* \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$ 、 $\mathcal{H}^{-1}(\psi^* \psi_* \mathcal{G}) \cong \mathcal{G} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_Y(-Y)$ であり、それ以外は 0 となるのがわかる。 $\mathcal{G} = \bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}}$ として適用すれば、完全三角形

$$\bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_Y(-Y)[1] \rightarrow \psi^* \psi_* \bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}} \rightarrow \bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{\Gamma}} \quad (5.2)$$

を得る。\$\text{Im}(\varphi)\$ と \$\text{Im}(\bar{\varphi})\$ は \$Y \times Y \times Y\$ において横断的に交わるので、\$\varphi^* \bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{Y}}\$ は両者の交わりの構造層に他ならない。正確に述べると、それは、対角埋め込み \$\eta: Y \rightarrow Y \times Y \times Y, y \mapsto (y, y, y)\$ の像の構造層である。完全三角形 (5.2) を \$\varphi\$ で引き戻すことにより、

$$\eta_* \mathcal{O}_Y(-Y)[1] \rightarrow \varphi^* \psi^* \psi_* \bar{\varphi}_* \mathcal{O}_{Y \times \bar{Y}} \rightarrow \eta_* \mathcal{O}_Y$$

なる完全三角形を得る。\$\pi: \Gamma \times Y \rightarrow Y \times Y\$ による順像をとることで、完全三角形 (5.1) を得る。 \$\square\$

命題 5.6. \$j: Y \hookrightarrow X\$ を非同異多様体の間の閉移入とする。このとき、

$$\mathcal{H}^i(j^* j_* \mathcal{O}_Y) \cong \bigwedge^{-i} \mathcal{N}_{Y/X}^*, \quad \text{Ext}_X^i(j_* \mathcal{O}_Y, j_* \mathcal{O}_Y) \cong \bigwedge^i \mathcal{N}_{Y/X}$$

なる同型が存在する。

証明. \$Y\$ の \$X\$ における余次元を \$c\$ とする。局所自由層による分解 \$\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{O}_Y\$ を任意にとる。各点 \$y \in Y\$ に対して自由分解 \$\mathcal{G}_y^\bullet \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}\$ を得る。任意に与えられた点 \$y \in Y\$ に対して、十分小さい開近傍 \$y \in U \subset X\$ をとる。必要であれば \$U\$ を小さく取り替えることにより、\$U\$ 上の階数 \$c\$ の局所自由層 \$\mathcal{E}\$ とその正則な切断 \$s \in H^0(U, \mathcal{E})\$ で \$Y \cap U\$ を定めるものが存在するとしてよい。これにより、もう 1 つの自由分解 \$\bigwedge^\bullet \mathcal{E}_y^* \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}\$ が得られる。この自由分解は極小である。つまり、\$k(y) = \mathcal{O}_{X,y}/\mathfrak{m}_y\$ とテンソル積をとれば微分が消える。

自由加群が射影的であることから、複体の間の射 \$\varphi: \mathcal{G}_y^\bullet \rightarrow \bigwedge^\bullet \mathcal{E}_y^*\$ が得られる。\$j: Y \hookrightarrow X\$ で引き戻してからコホモロジーをとることにより、同型

$$\mathcal{H}^i(j^* \varphi): \mathcal{H}^i(j^* \mathcal{G}^\bullet)_y \cong \mathcal{H}^i(j^* \mathcal{G}_y^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i(j^* \bigwedge^\bullet \mathcal{E}_y^*) \cong \bigwedge^{-i} \mathcal{N}_y^*$$

を得る。ここに、\$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Y/X}\$ は法層であり、同型 \$\mathcal{E}|_{Y \cap U} \cong \mathcal{N}|_{Y \cap U}\$ は切断 \$s\$ に対して標準的に存在するものである。

同型 \$\varphi\$ のとりかたは一意的ではないが、ホモトピー同値類においては一意的である。従って、それらが導くコホモロジーの間の射は \$\varphi\$ の選び方に依らない。さて、\$U\$ 上の局所自由層 \$\tilde{\mathcal{E}}\$ とその切断 \$\tilde{s} \in H^0(U, \tilde{\mathcal{E}})\$ により、\$(\mathcal{E}, s)\$ 以外の極小自由分解が与えられたとする。このとき、\$s\$ を \$\tilde{s}\$ に送る同型 \$\mathcal{E} \cong \tilde{\mathcal{E}}\$ が存在するので、同型 \$\mathcal{H}^i(j^* \mathcal{G})_y \cong \bigwedge^{-i} \mathcal{N}_y^*\$ は \$(\mathcal{E}, s)\$ の選び方に依らないことがわかる。以上により、大域的な同型 \$\mathcal{H}^i(j^* j_* \mathcal{O}_Y) \cong \bigwedge^{-i} \mathcal{N}^*\$ を得る。

2 つ目の同型も同様に示される。 \$\square\$

次に、爆発についての考察を行う。

\$\mathcal{E}\$ を \$X\$ 上の階数 \$c\$ の局所自由層とし、\$s\$ をその正則な大域切断としよう。また、\$j: Y := (s=0) \hookrightarrow X\$ を閉移入とする。\$g: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X\$ として、相対版の Euler 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1) \rightarrow g^* \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{T}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1) \rightarrow 0$$

を得る。大域切断 \$t := \varphi(g^* s) \in H^0(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \mathcal{T}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-1))\$ と零集合 \$Z(t) = (t=0) \subset \mathbf{P}(\mathcal{E})\$ を考える。\$t\$ は \$g^{-1}(Y)\$ 上で消えるので、\$g^{-1}(Y) \subset Z(t)\$ である。さらに、\$g: Z(t) \setminus g^{-1}(Y) \xrightarrow{\sim} X \setminus Y\$ である。従って、爆発の普遍性を考慮すれば \$Z(t)\$ は \$X\$ の \$Y\$ での爆発 \$q: \tilde{X} \rightarrow X\$ と同一視できる。従って、\$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Y/X}\$ として次のような 2 つの図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\iota} & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \\ & \searrow q & \swarrow g \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathcal{N}) & \xrightarrow{\quad} & g^{-1}(Y) \\ & \searrow \pi & \swarrow g \\ & & Y \end{array}$$

命題 5.7. 上記の設定を用いる。任意の部分多様体 \$Z \subset Y\$ に対して、その構造層 \$\mathcal{O}_Z\$ を \$\mathbf{D}^b(X)\$ の対象とみれば、

$$\mathcal{H}^k(q^* \mathcal{O}_Z) \cong (\Omega_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X}^{-k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-k))|_{\pi^{-1}(Z)}$$

である。

証明. $Z(t)$ は非特異ゆえ t は正則な切断である。従って、 \tilde{X} と $Z(t)$ を同一視すれば、Koszul 複体による $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ の分解 $\bigwedge^\bullet(\Omega_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1)) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow 0$ を得る。明らかに $q^*\mathcal{O}_Z \cong \iota_*g^*\mathcal{O}_Z$ であり、また、 g が平坦であることから、 $g^*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}|_Z)}$ である。従って、

$$\iota_*\mathcal{H}^k(q^*\mathcal{O}_Z) \cong \iota_*\mathcal{H}^k(\iota^*g^*\mathcal{O}_Z) \cong \mathcal{H}^k(\iota_*\iota^*g^*\mathcal{O}_Z) \cong \mathcal{H}^k(g^*\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

を得る。 $\mathcal{H}^k(g^*\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ の方は Koszul 複体の制限 $\bigwedge^\bullet(\Omega_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1))|_{g^{-1}(Z)}$ により計算可能である。 Z は Y に含まれているので、Koszul 複体の微分は消える。このことから結論を得る。□

命題 5.8. $q: \tilde{X} \rightarrow X$ を非特異な閉部分多様体 Y での爆発とする。また、 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Y/X}$ とし、 $\pi: \mathbf{P}(\mathcal{N}) \rightarrow Y$ を例外因子の収縮写像とする。このとき、部分多様体 $Z \subset Y$ の構造層 \mathcal{O}_Z を $D^b(X)$ の対象と見れば、

$$\mathcal{H}^k(q^*\mathcal{O}_Z) \cong (\Omega_{\mathbf{P}(\mathcal{N})/Y}^{-k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(-k))|_{\pi^{-1}(Z)}$$

である。

証明. 証明は、命題 5.6 と同様に行われる。つまり、命題 5.7 により、局所的な同型が存在するわけだが、その同型が標準的であることを確かめればよい。

さて、局所的に $Y \subset X$ を定める正則な切断 $s_i \in H^0(X, \mathcal{E}_i)$ 、 $i = 1, 2$ が与えられたとしよう。このとき、 $\varphi: \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2$ を s_1 を s_2 に送る同型とすれば、2 つの埋め込み $\tilde{X} \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}_i)$ は、 φ が誘導する同型 $\mathbf{P}(\mathcal{E}_1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{E}_2)$ により対応する。従って、 $\mathcal{H}^k(q^*\mathcal{O}_Z)$ の局所的な表示 (命題 5.7) は局所自由層 \mathcal{E} の選び方には依らない。

埋め込み $\tilde{i}: \tilde{X} \hookrightarrow \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{E}})$ を与えるような、局所自由層による分解 $\cdots \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^* \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ を選んでおく。また、 $\tilde{\pi}: \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{E}}) \rightarrow X$ を射影とする。 $\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \tilde{i}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow 0$ を $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{E}})}$ -加群の局所自由層による分解とすれば、

$$\mathcal{H}^k(q^*\mathcal{O}_Z) \cong \mathcal{H}^k(\tilde{i}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\tilde{\mathcal{E}}|_Z)}) \cong \mathcal{H}^k(\mathcal{G}^\bullet|_{\tilde{\pi}^{-1}(Z)})$$

を得る。

ここから、局所的な同型との対応をみる。 U を十分小さい X の開集合とし、 $Y \cap U$ が $s \in H^0(U, \mathcal{E})$ により定まっているとする。このとき、二つの埋め込み $\iota: \tilde{X} \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ 、 $h: \mathbf{P}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathbf{P}(\tilde{\mathcal{E}})$ で $\tilde{i} = h \circ \iota$ なるものを得る。 $h^*\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \iota_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow 0$ は局所自由層による分解であるので、上記の Koszul 複体との比較が可能である。後は、局所的な議論 (茎をとる) を命題 5.6 と同様に行い、各 $x \in \mathbf{P}(\mathcal{N}) \subset \tilde{X}$ に対して、同型 $\mathcal{H}^k(\mathcal{G}^\bullet \otimes \tilde{\pi}^*\mathcal{O}_Z)_x \cong (\Omega_{\mathbf{P}(\mathcal{N})/Y}^{-k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(-k))|_{\pi^{-1}(Z)_x}$ が標準的なものであることが従う。□

5.3 爆発と導来圏

設定は前の節のものを引き続いて用いる。 X は非特異な射影多様体、 $Y \subset X$ は非特異な部分多様体で $q: \tilde{X} \rightarrow X$ を Y での爆発とする。また、 q の例外因子を E とする。 $D^b(X)$ と $D^b(\tilde{X})$ の関係を調べるのがこの節の目標である。

命題 5.9. $f: S \rightarrow T$ を非特異な射影多様体間の射影射で、 $f_*: D^b(S) \rightarrow D^b(T)$ により $f_*(\mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_T$ となっているようなものとする。このとき、

$$f^*: D^b(T) \rightarrow D^b(S)$$

は忠実充満であり、さらに、 $D^b(T)$ と $D^b(S)$ の許容的部分三角圏の間の圏同値を与える。

証明. 随伴 $\text{id} \rightarrow f_*f^*$ を考える。任意の \mathcal{F}^\bullet に対して、射影公式から $f_*f^*\mathcal{F}^\bullet \cong \mathcal{F}^\bullet \otimes f_*\mathcal{O}_S \cong \mathcal{F}^\bullet$ ゆえ、 $\text{id} \cong f_*f^*$ である。従って、 f^* は忠実充満である。

2 つ目の主張は、 f^* の右随伴関手が存在することから明らかである。□

Y の X での法層を \mathcal{N} とする。下図で、種々の射を定義する。

$$\begin{array}{ccc} E = \mathbf{P}(\mathcal{N}) & \xhookrightarrow{i} & \tilde{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xhookrightarrow{j} & X \end{array}$$

命題 5.10. Y の X における余次元を $c \geq 2$ とする。このとき、関手

$$\Phi_l := i_* \circ (\mathcal{O}_E(lE) \otimes ()) \circ \pi^*: \mathbf{D}^b(Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(\tilde{X})$$

は任意の l に対して忠実充満である。さらに、 Φ_l の右随伴関手が存在する。

証明. Φ_l は $\mathcal{O}_E(lE) \in \mathbf{D}^b(Y \times \tilde{X})$ を核とする Fourier-向井関手である。従って、左右の随伴関手は存在する。忠実充満であることは、命題 3.5, (i) により判定する。

まず、任意の $j \in \mathbf{Z}$ と $x, y \in Y, x \neq y$ に対して、 $\mathrm{Hom}(\Phi_l(k(x)), \Phi_l(k(y))[j]) = 0$ を示す。点 $x \in X$ に対して、 F_x をファイバー $q^{-1}(x)$ とする。 $\Phi_l(k(x)) \cong i_* \mathcal{O}_{F_x}(-l)$ 、 $\Phi_l(k(y)) \cong i_* \mathcal{O}_{F_y}(-l)$ で、 $x \neq y$ ゆえ、それらの台は交わらない。よって、 $\mathrm{Hom}(\Phi_l(k(x)), \Phi_l(k(y))[j]) = 0$ を得る。

次に、 $x = y$ の場合を考える。このとき、

$$\mathrm{Ext}_{\tilde{X}}^i(\mathcal{O}_{F_x}(-l), \mathcal{O}_{F_x}(-l)) = \mathrm{Ext}_{\tilde{X}}^i(\mathcal{O}_{F_x}, \mathcal{O}_{F_x}) = \begin{cases} 0 & i \notin [0, d] \text{ のとき} \\ k & i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を示す。ただし、 d は Y の次元とする。スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\tilde{X}, \mathcal{E}xt_{\tilde{X}}^q(\mathcal{O}_{F_x}, \mathcal{O}_{F_x})) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\tilde{X}}^{p+q}(\mathcal{O}_{F_x}, \mathcal{O}_{F_x})$$

を利用する。命題 5.6 により、 $\bigwedge^j \mathcal{N}_{F_x/\tilde{X}} \cong \mathcal{E}xt_{\tilde{X}}^j(\mathcal{O}_{F_x}, \mathcal{O}_{F_x})$ であるので、これについて計算しよう。次の短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{F_x/E} \cong \mathcal{O}_{F_x}^{\oplus d} \rightarrow \mathcal{N}_{F_x/\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{N}_{E/\tilde{X}}|_{F_x} \cong \mathcal{O}_{F_x}(-1) \rightarrow 0$$

が存在する。 $F_x \cong \mathbf{P}^{c-1}$ より、 $\mathcal{N}_{F_x/\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{F_x}^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{F_x}(-1)$ を得る。

以上の考察により、 $p > 0$ または $p = 0$ かつ $q > d$ のとき、 $E_2^{p,q} = H^p(\tilde{X}, \bigwedge^q(\mathcal{O}_{F_x}^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{F_x}(-1))) = 0$ がわかる。これにより命題 3.5, (i) の条件が確かめられる。□

定義 5.11. 三角圏 \mathcal{D} の充満部分三角圏 \mathcal{D}' は、包含 $\mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}$ が右随伴 $\pi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ をもつとき許容的であるという。

また、 \mathcal{D}' が \mathcal{D} の許容的部分三角圏であるとき、 \mathcal{D} の充満部分圏

$$\mathcal{D}'^\perp := \{C \in \mathcal{D} \mid \text{すべての } B \in \mathcal{D}' \text{ に対して } \mathrm{Hom}(B, C) = 0\}$$

を、 \mathcal{D}' の \mathcal{D} における直交補空間という。

定義 5.12. 三角圏 \mathcal{D} の許容的充満部分圏の列 $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}$ は、すべての $i > j$ に対して $\mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}_i^\perp$ をみたすとき、半直交的であるという。

さらに、半直交的な列 $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}$ が \mathcal{D} を生成するとき、つまり、すべての \mathcal{D}_i を含む \mathcal{D} の最小の充満部分三角圏が \mathcal{D} と同値であるとき、それらは \mathcal{D} の半直交分解を与えるという。

系 5.13. 任意の k に対して、関手 Φ_k は $\mathbf{D}^b(Y)$ と $\mathbf{D}^b(\tilde{X})$ の許容的部分三角圏の間の圏同値を与える。

$k = -c+1, \dots, -1$ に対して、

$$\mathcal{D}_k := \mathrm{Im}(\Phi_{-k}: \mathbf{D}^b(Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(\tilde{X}))$$

と定める。また、 $\mathcal{D}_0 := q^* \mathbf{D}^b(X)$ とする。

命題 5.14 (Orlov). 次の部分圏の列

$$\mathcal{D}_{-c+1}, \dots, \mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_0 \subset D^b(\tilde{X})$$

は、 $D^b(\tilde{X})$ の半直交的分解を与える。

証明. いくつかの段階にわけて証明する。

段階 1 $-c+1 \leq l < k < 0$ に対して、 $\mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}_k^\perp$ を示す。

$\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ を任意にとると、随伴 $i^* \dashv i_*$ により

$$\mathrm{Hom}(i_*(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(k)), i_*(\pi^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l))) \cong \mathrm{Hom}(i^*i_*\pi^*\mathcal{F}^\bullet, \pi^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l-k))$$

を得る。ただし、 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(m) \cong \mathcal{O}_E(-mE)$ に注意する。系 5.5 により、完全三角形

$$\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(1)[1] \rightarrow i^*i_*\pi^*\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \pi^*\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(1)[2]$$

が存在する。従って、段階 1 の主張を得るには、すべての $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対して

$$\mathrm{Hom}(\pi^*\mathcal{F}^\bullet, \pi^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l-k)) = 0 = \mathrm{Hom}(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(1), \pi^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l-k))$$

を示せばよい (2 番目の等号の部分は $\mathcal{F}^\bullet[1]$ を \mathcal{F}^\bullet にとりかえている)。これは、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\pi^*\mathcal{F}^\bullet, \pi^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l-k)) &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\bullet, \pi_*(\pi^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l-k))) \quad (\text{随伴 } \pi^* \dashv \pi_*) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l-k)) \quad (\text{射影公式}) \\ &= 0 \quad (m < 0 \text{ に対して、} \pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(m) = 0) \end{aligned}$$

と確かめられる。2 つ目の等号についても同様である。

段階 2 $-c+1 \leq l < 0$ に対して、 $\mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}_0^\perp$ を示す。

これも、随伴と射影公式を考慮すれば、任意の $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ と $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ に対して、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(q^*\mathcal{E}^\bullet, i_*(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l))) &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, q_*i_*(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l))) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, j_*\pi_*(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l))) = 0 \end{aligned}$$

となることからわかる。

段階 3 $\mathcal{D}_{-c+1}, \dots, \mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_0$ が $D^b(\tilde{X})$ を生成することを示す。

$-c+1 \leq l < 0$ なるすべての l に対して、 $\mathcal{E}^\bullet \in \mathcal{D}_l^\perp$ と仮定する。この仮定の下で、 $\mathcal{E}^\bullet \notin \mathcal{D}_0^\perp$ を示せばよい。まず、ある $\mathcal{G}^\bullet \in D^b(Y)$ で、 $i^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(c-1) \cong \pi^*\mathcal{G}^\bullet$ となるものが存在することを示す。仮定から、すべての $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ と $-c+1 \leq l < 0$ に対して、

$$\mathrm{Hom}(i_*(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l)), \mathcal{E}^\bullet) = 0$$

である。Grothendieck-Verdier 双対 (定理 1.6) を $i: E \hookrightarrow \tilde{X}$ に適用することにより、すべての $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$ と $-c+2 \leq l < 1$ に対して、

$$\mathrm{Hom}(\pi^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(l), i^*\mathcal{E}^\bullet) = 0 \tag{5.3}$$

を得る。次に引用する系 5.15 により、 $\langle \pi^*D^b(Y) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(k) \rangle_{k=-c+1, \dots, 0}$ が $D^b(E)$ の半直交的分解を与えることがわかる。

系 5.15 ([Hu] Corollary 8.36). Y を非特異な射影多様体とし、 \mathcal{N} を Y 上の階数 r の局所自由層とする。このとき、任意の $a \in \mathbf{Z}$ に対して、次の充満部分圏からなる列

$$\pi^*D^b(Y) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(a), \dots, \pi^*D^b(Y) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(a+r-1) \subset D^b(\mathbf{P}(\mathcal{N}))$$

は $D^b(\mathbf{P}(\mathcal{N}))$ の半直交的分解を与える。

よって、(5.3) は $i^*\mathcal{E}^\bullet$ が $\pi^*D^b(Y) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{N})}(-c+1)$ の対象であることを意味する。

$\mathcal{E}_0^\bullet := \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}((1-c)E) \in D^b(\tilde{X})$ としよう。今までの議論により、 $i^*\mathcal{E}_0^\bullet \cong \pi^*\mathcal{G}^\bullet$ なる \mathcal{G}^\bullet が存在する。 $i^*\mathcal{E}_0^\bullet = 0$ なら、 \mathcal{E}_0^\bullet の台は E と交わらないので、 $\mathcal{E}_0^\bullet \in \mathcal{D}_0$ である。次に、 $\mathcal{G}^\bullet \neq 0$ としよう。このとき、閉点 $x \in Y$ と $m \in \mathbf{Z}$ で、 $\text{Hom}(\mathcal{E}_0^\bullet, q^*k(x)[m]) \neq 0$ となるものが存在することを示す。次のスペクトル系列

$$E_2^{r,s} = \text{Hom}(\mathcal{E}_0^\bullet, \mathcal{H}^s(q^*k(x))[r]) \Rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}_0^\bullet, q^*k(x)[r+s])$$

を考える。 $F_x := \pi^{-1}(x)$ とし、 $\{x\} \subset Y$ に対して命題 5.8 を適用して、 $\mathcal{H}^s(q^*k(x)) \cong \Omega_{F_x}^{-s}(-s)$ を得る。これにより、 $s \neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} E_2^{r,-s} &\cong \text{Hom}(\mathcal{E}_0^\bullet, i_* (\Omega_{F_x}^s(s)[r])) \cong \text{Hom}(i^*\mathcal{E}_0^\bullet, \Omega_{F_x}^s(s)[r]) \\ &\cong \text{Hom}(\pi^*\mathcal{G}^\bullet, \Omega_{F_x}^s(s)[r]) \cong \text{Hom}(\mathcal{G}^\bullet, \pi_* (\Omega_{F_x}^s(s)[r])) = 0 \end{aligned}$$

を得る。 Y の閉点が $D^b(Y)$ を生成することを考え合わせると、ある $x \in Y$ と $m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\text{Hom}(\mathcal{E}_0^\bullet, q^*k(x)[m]) = E_2^{m,0} = \text{Hom}(\mathcal{G}^\bullet, k(x)[m]) \neq 0$$

がわかる。

以上により、

$$\begin{aligned} 0 &\neq \text{Hom}(\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(c-1)E), q^*k(x)[m]) \\ &\cong \text{Hom}(q^*k(x), \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(c-1)E) \otimes \omega_{\tilde{X}}[\dim(X) - m])^* \quad (\text{Serre 双対}) \\ &\cong \text{Hom}(q^*k(x), \mathcal{E}^\bullet[\dim(X) - m])^* \end{aligned}$$

を得る。特に、 $\mathcal{E}^\bullet \notin \mathcal{D}_0^\perp$ である。これで、命題の証明が完了した。 \square

5.4 基本フリップ

この節では、基本フリップや基本フロップによる導来圏の対応をみることが目標である。定義を行うのに少し準備が必要となる。

非特異射影多様体 X が、射影空間 \mathbf{P}^k を部分多様体として含み、さらに法層 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathbf{P}^k/X}$ が $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-1)^{\oplus l+1}$ と同型であるとする。従って、 \mathbf{P}^k の X における余次元は $l+1$ である。このとき、随伴公式を用いて、

$$\omega_X|_{\mathbf{P}^k} \cong \omega_{\mathbf{P}^k} \otimes \bigwedge^{l+1} \mathcal{N}^* \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(l-k)$$

を得る。

$q: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の \mathbf{P}^k での爆発とし、 $E \cong \mathbf{P}(\mathcal{N})$ をその例外因子とする。 $E \cong \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l$ が容易に確かめられる。自然な射影を $\pi: \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l \rightarrow \mathbf{P}^k$ 、 $\pi': \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l \rightarrow \mathbf{P}^l$ とする。特に、 $q|_E = \pi$ である。

標準束公式と随伴公式から、

$$\omega_{\tilde{X}} \cong q^*\omega_X \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(lE), \quad \omega_E \cong (\omega_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E))|_E$$

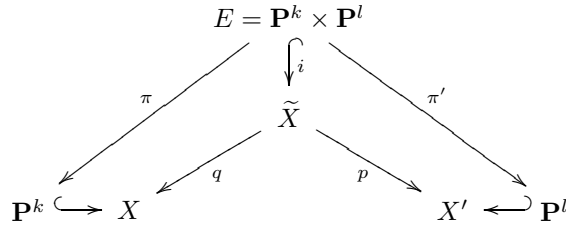
がわかる。 $E \cong \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l$ 上の層 $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(a) \otimes \pi'^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^l}(b)$ を $\mathcal{O}_E(a, b)$ と表すことにすれば、

$$\mathcal{O}_E(-k-1, -l-1) \cong \pi^*(\omega_X|_{\mathbf{P}^k}) \otimes \mathcal{O}_E((l+1)E)$$

を得る。以上を組み合わせることにより、 $\mathcal{O}_E(E) \cong \mathcal{O}_E(-1, -1)$ と $\omega_{\tilde{X}}|_E \cong \mathcal{O}_E(-k, -l)$ がわかる。

従って、後で述べる藤木-中野判定法により、非特異多様体 X' とその部分多様体 \mathbf{P}^l で、 $p: \tilde{X}' \rightarrow X'$ が X' の \mathbf{P}^l での爆発で、さらにその例外因子が E で、 $p|_E = \pi'$ となるものが存在する。一般に X' が射影的

であるかはわからないので、以下 X' が射影的であることを仮定する。



注意 5.16 (藤木-中野判定法 [FN]). Y を非特異な多様体、 \mathcal{N} を Y 上の局所自由層とし、 $\pi: E := \mathbf{P}(\mathcal{N}) \rightarrow Y$ とする。さらに、 $E \subset \tilde{X}$ を非特異多様体間の余次元 1 の閉移入で、 $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)$ を π の各ファイバーに制限したものの次数が -1 となっているとする。このとき、射影 $\pi: E \rightarrow Y$ は、 Y を含む非特異な多様体 X への射 $q: \tilde{X} \rightarrow X$ へと拡張される。また、 q は、 X の Y での爆発になっている。たとえ \tilde{X} 、 E 、 Y が射影的であっても、一般には X が射影的とはならないことを注意しておく。

まずは $l < k$ とする。このとき、 $\omega_X|_{\mathbf{P}^k}$ は線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(l - k)$ と同型であり、一方、 $\omega_{X'}|_{\mathbf{P}^l}$ は $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^l}(k - l)$ と同型である。従って、 $p \circ q^{-1}: X \dashrightarrow X'$ はフリップである¹。このようなフリップを特に**基本フリップ**²と呼ぶ。

次に、 $k = l$ とする。このときは、 $\omega_X|_{\mathbf{P}^k}$ と $\omega_{X'}|_{\mathbf{P}^l}$ は共に自明な線束となる。従って、 $p \circ q^{-1}: X \dashrightarrow X'$ はフロップである。このようなフロップを特に**基本フロップ**と呼ぶ。

前節で得られた結果を爆発 $q: \tilde{X} \rightarrow X$ と $p: \tilde{X} \rightarrow X'$ に対して用いることにより、 X と X' の導来圏を比較することが可能である。

補題を用意する。命題 5.14 によると、爆発 q と p から二通りの半直交的分解

$$D^b(\tilde{X}) = \langle \mathcal{D}_{-l}, \dots, \mathcal{D}_{-1}, D^b(X) \rangle = \langle \mathcal{D}'_{-k}, \dots, \mathcal{D}'_{-1}, D^b(X') \rangle$$

が得られる。ここに、 $\mathcal{D}_b = i_*(\pi^* D^b(\mathbf{P}^k) \otimes \mathcal{O}_E(b, b))$ 、 $\mathcal{D}'_a = i_*(\pi'^* D^b(\mathbf{P}^l) \otimes \mathcal{O}_E(a, a))$ である。次に $\mathcal{E} \in D^b(X')$ を任意に選び、固定しておく。 \mathcal{H}^\bullet を随伴 $q^*q_*p^*\mathcal{E}^\bullet \rightarrow p^*\mathcal{E}^\bullet$ の写像錐とし、完全三角形

$$q^*q_*p^*\mathcal{E}^\bullet \rightarrow p^*\mathcal{E}^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^\bullet \rightarrow q^*q_*p^*\mathcal{E}^\bullet[1] \tag{5.4}$$

を構成する。

補題 5.17. 上記の設定を用いる。このとき、

1. $-k \leq a \leq -1, -l \leq b \leq -1$ に対して、 $\text{Hom}(\mathcal{H}^\bullet, i_*\mathcal{O}_E(a, b)) = 0$
2. $\mathcal{H}^\bullet \in D^b(X)^\perp$

である。

証明. $-k \leq a \leq -1, -l \leq b \leq -1$ とする。このとき、 $i_*\mathcal{O}_E(a, b) \in \mathcal{D}'_a \cap \mathcal{D}_b$ ゆえ、 $i_*\mathcal{O}_E(a, b) \in D^b(X)^\perp \cap D^b(X')^\perp$ である。従って、 $\text{Hom}(q^*q_*p^*\mathcal{E}^\bullet, i_*\mathcal{O}_E(a, b))$ と $\text{Hom}(p^*\mathcal{E}^\bullet, i_*\mathcal{O}_E(a, b))$ は共に 0 となる。完全三角形 (5.4) に $\text{Hom}(_, i_*\mathcal{O}_E(a, b))$ を適用して得られる長完全列を考えると、1 を得る。

(5.4) に q_* を適用する。命題 5.9 により q^* は忠実充満ゆえ、 $q_*q^*q_*p^*\mathcal{E}^\bullet \cong q_*p^*\mathcal{E}^\bullet$ だから、 $q_*\mathcal{H}^\bullet = 0$ を得る。従って、任意の $\mathcal{G}^\bullet \in D^b(X)$ に対して $\text{Hom}(q^*\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{H}^\bullet) \cong \text{Hom}(\mathcal{G}^\bullet, q_*\mathcal{H}^\bullet) = 0$ がわかる。□

¹これは、 \tilde{X} 上の因子 $E \cong \mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l$ が一点に潰せる、つまり、正規多様体 Y への固有双有理射 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ で、 $\tilde{f}(E)$ が一点かつ $\tilde{X} \setminus E \cong Y \setminus \tilde{f}(E)$ なるものが存在することを想定している。そうすれば、 \tilde{f} から誘導される射 $f: X \rightarrow Y$ 、 $f': X' \rightarrow Y$ が得られる。 f, f' はそれぞれ、 $\mathbf{P}^k, \mathbf{P}^l$ を一点に潰す射であるので、 $p \circ q^{-1}$ がフリップであることが確かめられる。ただし、以降の議論では f あるいは f や f' の存在は仮定しなくても全く問題ない。

²これは、テキストの standard flip (flop) を訳したものである。標準フリップとすると、canonical flip と混同する恐れがあるため、今回の訳を採用した。基本フロップについても同様。

定義 5.18. \mathcal{D} を k -線形三角圏とする。

\mathcal{D} の対象 E が

$$\mathrm{Hom}(E, E[l]) = \begin{cases} k & (l = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (l \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

をみたすとき、例外的であるという。

\mathcal{D} の例外的な対象からなる列 E_1, \dots, E_n が、すべての $i > j$ と l に対して $\mathrm{Hom}(E_i, E_j[l]) = 0$ をみたすとき、例外列であるという。

\mathcal{D} の例外列 E_1, \dots, E_n が \mathcal{D} を生成するとき、つまり、すべての E_i を含む \mathcal{D} の充満部分三角圏が (包含により) \mathcal{D} と同値であるとき、その例外列は充満であるという。

次が、この節の目標となる命題である。

命題 5.19 (Bondal, Orlov). $X \leftarrow \tilde{X} \rightarrow X'$ を $l \leq k$ なる基本フリップとする。このとき、

$$q_* \circ p^*: \mathrm{D}^b(X') \rightarrow \mathrm{D}^b(X)$$

は忠実充満である。さらに、 $k = l$ のときは圏同値を与える。

証明. 任意の $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D}^b(X')$ に対して、

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}(q_* p^* \mathcal{F}^\bullet, q_* p^* \mathcal{E}^\bullet)$$

を示せばよい。命題 5.9 により、 p^* は忠実充満ゆえ $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}(p^* \mathcal{E}^\bullet, p^* \mathcal{F}^\bullet)$ である。さらに、随伴 $q^* \dashv q_*$ により、 $\mathrm{Hom}(q_* p^* \mathcal{E}^\bullet, q_* p^* \mathcal{F}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}(q^* q_* p^* \mathcal{E}^\bullet, p^* \mathcal{F}^\bullet)$ を得る。従って、任意の $\mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D}^b(X')$ に対して、随伴 $q^* q_* p^* \mathcal{E}^\bullet \rightarrow p^* \mathcal{E}^\bullet$ が、

$$\mathrm{Hom}(p^* \mathcal{E}^\bullet, p^* \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(q^* q_* p^* \mathcal{E}^\bullet, p^* \mathcal{F}^\bullet)$$

を導くことを示せばよい。

完全三角形 $q^* q_* p^* \mathcal{E}^\bullet \rightarrow p^* \mathcal{E}^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^\bullet \rightarrow q^* q_* p^* \mathcal{E}^\bullet[1]$ を考えれば、任意の $\mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D}^b(X')$ に対して、 $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}^\bullet, p^* \mathcal{F}^\bullet) = 0$ を示せばよい。

爆発 q から得られる半直交的分解 $\mathrm{D}^b(\tilde{X}) = \langle \mathcal{D}_{-l}, \dots, \mathcal{D}_{-1}, \mathrm{D}^b(X) \rangle$ から特に、半直交的分解 $\mathrm{D}^b(X)^\perp = \langle \mathcal{D}_{-l}, \dots, \mathcal{D}_{-1} \rangle$ を得る。一方、 \mathcal{D}_b は $\mathrm{D}^b(\mathbf{P}^k)$ と同値である。また、次に引用する系 5.20 により、例外列による半直交的分解 $\mathrm{D}^b(\mathbf{P}^k) = \langle \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-k+l), \dots, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(l) \rangle$ を得る。

系 5.20 ([Hu] Corollary 8.29). 任意の $a \in \mathbf{Z}$ に対して、 \mathbf{P}^n 上の $n+1$ 個の可逆層からなる列

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(a), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(a+1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(a+n)$$

は、 $\mathrm{D}^b(\mathbf{P}^n)$ の飽和例外列を定める。

以上により、飽和例外列

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^b(X)^\perp = & \langle i_* \mathcal{O}_E(-k, -l), \dots, i_* \mathcal{O}_E(0, -l), \\ & i_* \mathcal{O}_E(-k+1, -l+1), \dots, i_* \mathcal{O}_E(1, -l+1), \\ & \dots \\ & i_* \mathcal{O}_E(-k+l-1, -1), \dots, i_* \mathcal{O}_E(l-1, -1) \rangle \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\mathcal{D}^1 := \{i_* \mathcal{O}_E(a, b)\}_{-k \leq a < 0}$ 、 $\mathcal{D}^2 := \{i_* \mathcal{O}_E(a', b')\}_{0 \leq a' \leq l-1}$ として、 $\mathrm{D}^b(X)^\perp = \langle \mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2 \rangle$ と書こう。これが半直交的分解となっていることをみよう。これには $\mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^2^\perp$ を示せばよい。つまり、

$i_*\mathcal{O}_E(a, b) \in \mathcal{D}^2, i_*\mathcal{O}_E(a', b') \in \mathcal{D}^1$ とすべての $m \in \mathbf{Z}$ に対して $\mathrm{Hom}(i_*\mathcal{O}_E(a, b), i_*\mathcal{O}_E(a', b')[m]) = 0$ を示せばよい。

Grothendieck-Verdier 双対 (定理 1.6) を系 5.5 に注意しながら $i: E \hookrightarrow \tilde{X}$ に適用することにより、

$$H^*(\mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l, \mathcal{O}(a' - a, b' - b)) = 0 = H^*(\mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^l, \mathcal{O}(a' - a - 1, b' - b - 1))$$

を示せばよいことがわかる。さらに、Künneth の公式により、 $a' - a \leq -k - 1$ に対して $H^*(\mathbf{P}^l, \mathcal{O}(b' - b)) = 0$ を、 $a' - a - 1 \leq -k - 1$ に対して $H^*(\mathbf{P}^l, \mathcal{O}(b' - b - 1)) = 0$ を示せば十分である。 \mathcal{D}^1 と \mathcal{D}^2 の定義から、常に $b' - b > -l$ である。従って、 $a' - a \leq -k \Rightarrow b' - b < 0$ を示せば十分であるが、これは具体的な計算により調べられる。

以上の考察と補題 5.17 から、 $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}^\bullet, p^*\mathcal{F}^\bullet) = 0$ を示すには、 $p^*\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{2^+}$ 、つまり、 $0 \leq a \leq l - 1$ に対して $\mathrm{Hom}(i_*\mathcal{O}_E(a, b), p^*\mathcal{F}^\bullet) = 0$ を示せばよい。これは、 $-k \leq -l \leq -a - 1 < 0$ を考えれば、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(i_*\mathcal{O}_E(a, b), p^*\mathcal{F}^\bullet[*]) &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_E(a, b), i^*p^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \omega_E \otimes (\omega_{\tilde{X}}^*|_E)[*]) \quad (\text{Grothendieck-Verdier 双対}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_E(a, b), \pi^*(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{P}^l}) \otimes \mathcal{O}_E(-1, -1)[*]) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_E, \pi^*(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{P}^l}(-b - 1)) \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-a - 1)[*]) \\ &\cong H^*(\mathbf{P}^l, \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{P}^l}(-b - 1)) \otimes H^*(\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-a - 1)) \quad (\text{Künneth の公式}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られることから従う。

また、 $(q, p): \tilde{X} \rightarrow X \times X'$ は閉移入であることがわかるので、 $q_* \circ p^*$ は $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ を核とする Fourier-向井変換である。 $k = l$ のときは、 $q^*\omega_X \cong p^*\omega_{X'}$ であるので、命題 3.5, (ii) から $q_* \circ p^* \cong \Phi_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}$ が圏同値をあたえることがわかる。

□

5.5 向井フロップ

この節では、向井フロップによる導来圏の対応をみることを目標である。前節とは状況が異なり、向井フロップの双有理対応から自然に定まる関手は、導来圏の同値を与えない。しかし、Fourier-向井核を上手く選ぶことにより、導来圏の同値を与える Fourier-向井変換が得られる。

向井フロップの定義を行う。 X を次元が $2n$ の非特異多様体で、 \mathbf{P}^n と同型である部分多様体 P を含むものとする。この節では、 $n > 1$ と仮定する。さらに、法層 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{P/X}$ は余接層 Ω_P と同型であると仮定する。 X の P での爆発を $q: \tilde{X} \rightarrow X$ とする。例外因子を E とすれば、自然な射影

$$\pi: E \cong \mathbf{P}(\mathcal{N}) \cong \mathbf{P}(\Omega_P) \rightarrow P$$

を得る。 P を、 $n + 1$ 次元ベクトル空間 V を用いて $P = \mathbf{P}(V)$ と表しておく。次の Euler 完全列

$$0 \rightarrow \Omega_P \rightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_P(-1) \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

により、 Ω_P が $V^* \otimes \mathcal{O}_P(-1)$ の部分束になることがわかる。従って、 $P^\vee = \mathbf{P}(V^*)$ として、

$$\mathbf{P}(\Omega_P) \subset \mathbf{P}(V^* \otimes \mathcal{O}_P(-1)) = P \times P^\vee$$

を得る。 $E = \mathbf{P}(\Omega_P)$ は自然に incidence variety $\{(l, H) \mid l \subset V \text{ は直線}, H \subset V \text{ は超平面で}, l \subset H\}$ と同型ゆえ、 $E \in |\mathcal{O}_{P \times P^\vee}(1, 1)|$ である。従って、随伴公式から $\omega_E \cong \mathcal{O}_{P \times P^\vee}(-n, -n)|_E$ がわかる。

一方、随伴公式と標準束公式を用いて

$$\omega_E \cong (\omega_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{O}(E))|_E \cong (q^*\omega_X \otimes \mathcal{O}((n - 1)E))|_E \otimes \mathcal{O}_E(E) \cong \pi^*(\omega_X|_P) \otimes \mathcal{O}_E(nE)$$

を得る。 P の X における法層は Ω_P ゆえ、 $\omega_X|_P$ は自明である。以上により、 $\mathcal{O}_E(E) \cong \mathcal{O}_{P \times P^\vee}(-1, -1)|_E$ がわかる。藤木中野判定法を適用して、次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E \hookrightarrow & P \times P^\vee & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \tilde{X} & & \\
 \pi \swarrow & & \downarrow q & & \searrow \pi' \\
 P \hookrightarrow & X & & X' & \hookleftarrow P^\vee
 \end{array}$$

ここに、 $p: \tilde{X} \rightarrow X'$ は E を例外集合とする双有理射であり、その E への制限は第二成分の射影 $E \subset P \times P^\vee \rightarrow P^\vee$ である。さらに $\mathcal{N}' := \mathcal{N}_{P^\vee/X'} \cong \Omega_{P^\vee}$ や $\omega_{X'}|_{P^\vee} \cong \mathcal{O}_{P^\vee}$ も確かめられる。基本フリップのときの議論と同様に、 X' が射影的であることを仮定する。

命題 5.21 (Kawamata, Namikawa). Fourier-向井変換 $p_* \circ q^*: D^b(X) \rightarrow D^b(X')$ は忠実充満でない。

証明. 線束 $L \in \text{Pic}(X)$ で $L|_P \cong \mathcal{O}_P(-n)$ となるものが存在することを仮定して代数的な証明を行う (注意 5.22 参照)。

$p_* \circ q^*$ が忠実充満でないことを示すには、

$$\chi(L, L) \neq \chi(p_* q^* L, p_* q^* L)$$

を示せばよい。というのも、 $\chi(L, L) = \langle v(L), v(L) \rangle_X$ 、 $\chi(p_* q^* L, p_* q^* L) = \langle p_* q^* v(L), p_* q^* v(L) \rangle_{X'}$ と向井ベクトル (定義 2.30 参照) での表示を用いると、命題 2.38 により、

$$p_* \circ q^* \text{が同値} \implies \langle v(L), v(L) \rangle_X = \langle p_* q^* v(L), p_* q^* v(L) \rangle_{X'}$$

が成立するからである。

$q^* L$ は $p: \tilde{X} \rightarrow X'$ のファイバー上で $\mathcal{O}(-n)$ と同型ゆえ、ある線束 $L' \in \text{Pic}(X')$ が存在して

$$q^* L \cong p^* L' \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nE) \quad (5.5)$$

となる。 $p_* q^* L$ について調べよう。 p のファイバーは \mathbf{P}^{n-1} と同型ゆえ、 $\mathcal{H}^i(p_* q^* L)$ は $i \neq 0, n-1$ のところでは 0 である。同型 (5.5) に射影公式を適用して、

$$\mathcal{H}^0(p_* q^* L) \cong L' \iff R^0 p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nE) \cong \mathcal{O}_{P^\vee}$$

がわかる。短完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}((i-1)E) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(iE) \rightarrow \mathcal{O}_E(iE) \rightarrow 0$$

を考えて、さらに帰納法を用いることにより、 $i \geq 0$ に対して、 $R^0 p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(iE) \cong \mathcal{O}_{P^\vee}$ が従う。また、上記の短完全列から $R^{n-1} p_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nE) \cong R^{n-1} \pi'_* \mathcal{O}_E(nE)$ もわかる。 $\omega_E \cong \mathcal{O}_E(nE)$ を思い出して、

$$R^{n-1} \pi'_* \mathcal{O}_E(nE) \cong R^{n-1} \pi'_*(\omega_E) \cong R^{n-1} \pi'_*(\omega_{E/P^\vee} \otimes \pi'^* \omega_{P^\vee}) \cong R^{n-1} \pi'_*(\omega_{E/P^\vee}) \otimes \omega_{P^\vee} \cong \omega_{P^\vee}$$

を得る。最後の同型は説明を要する。 $i \neq n-1$ について $R^i \pi'_*(\omega_{E/P^\vee}) = 0$ 、 $i \neq 0$ について $R^i \pi'_*(\mathcal{O}_E) = 0$ であることから、Grothendieck-Verdier 双対 (定理 1.6) により $R^{n-1} \pi'_*(\omega_{E/P^\vee}) \cong R \pi'_*(\omega_{E/P^\vee})[n-1] \cong (R \pi'_*(\mathcal{O}_E))^\vee \cong \mathcal{O}_{P^\vee}$ が得られるわけである。

以上により、

$$\mathcal{H}^i(p_* q^* L) = \begin{cases} L' & (i = 0) \\ L' \otimes \omega_{P^\vee} \cong \mathcal{O}_{P^\vee}(-1) & (i = n-1) \\ 0 & (i \neq 0, n-1) \end{cases}$$

がわかった。

以下、 $\mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i(p_*q_*L)$ と記号を省略して表記する。

$$\chi(p_*q_*L, p_*q_*L) = \chi(\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^0) + (-1)^{n-1}\chi(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^0) + (-1)^{n-1}\chi(\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^{n-1}) + \chi(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^{n-1})$$

であるので、各項を計算しよう。最初の3つの項は容易に $\chi(\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^0) = \chi(X', \mathcal{O}_{X'})$ 、

$$\chi(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^0) = \chi(\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^{n-1}) = \chi(P^\vee, \mathcal{O}_{P^\vee}(-n-1)) = (-1)^n$$

と計算される。4つ目の項については少し複雑である。次のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(P^\vee, \mathcal{E}xt_{X'}^q(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^{n-1})) \Rightarrow \text{Ext}_{X'}^{p+q}(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^{n-1})$$

を考える。命題 5.6 により、

$$\mathcal{E}xt_{X'}^q(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^{n-1}) \cong \mathcal{E}xt_{X'}^q(\mathcal{O}_{P^\vee}, \mathcal{O}_{P^\vee}) \cong \bigwedge^q \mathcal{N}_{P^\vee/X'} \cong \Omega_{P^\vee}^q$$

であるので、 $\text{Ext}_{X'}^i(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^{n-1}) = H^i(P^\vee, \Omega_{P^\vee}^i)$ がわかる。よって、 n の偶奇により、 $\chi(\mathcal{H}^{n-1}, \mathcal{H}^{n-1}) = 1$ または 0 が従う。

以上すべてをまとめて、

$$\chi(p_*q_*L, p_*q_*L) = \chi(X', \mathcal{O}_{X'}) - 2 + \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (5.6)$$

を得る。 $h^i(X, \mathcal{O}_X)$ は双有理不変であることから、 $\chi(L, L) = \chi(X, \mathcal{O}_X) \neq \chi(p_*q_*L, p_*q_*L)$ が従う。□

注意 5.22. 命題 5.21 の証明において実際は L の存在は仮定しなくてよい。コホモロジー類 $\alpha \in H^2(X, \mathbf{Q})$ で $\alpha|_P = -nc_1(\mathcal{O}_P(1))$ なるものは存在する。 $\Phi = p_* \circ q^*$ とし、 $\langle v(L), v(L) \rangle \neq \langle \Phi^H(v(L)), \Phi^H(v(L)) \rangle$ を示すことによって、矛盾が導かれる。詳細には触れないが、証明は上で与えた代数的なものと同様である。

少し、一般的な設定で準備を行う。準射影的な多様体間の滑らかな射影射 $\mathcal{X} \rightarrow S$ と $\mathcal{X}' \rightarrow S$ が与えられているとする。 $0 \in S$ を点として、 X, X' をそれぞれ 0 上のファイバー $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}'_0$ とする。あまり誤解は生じないと思われるので、下図で種々の射を定義しておく。

$$\begin{array}{ccccc} X \times X' & \xhookrightarrow{k} & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}' & \xhookrightarrow{j} & \mathcal{X} \times \mathcal{X}' \\ \swarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r \\ X' & & X & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{X} \\ & & & & \swarrow q \\ & & & & \mathcal{X}' \xleftarrow{i} X' \end{array}$$

補題 5.23 (Chen). 任意の対象 $\mathcal{E}^\bullet \in \text{D}^b(\mathcal{X} \times_S \mathcal{X}')$ に対して、次の2つの関手

$$\text{D}^b(X) \xrightarrow{\Phi_{k^*\mathcal{E}^\bullet}} \text{D}^b(X') \xrightarrow{i'_*} \text{D}^b(\mathcal{X}') \quad \text{と} \quad \text{D}^b(X) \xrightarrow{i_*} \text{D}^b(\mathcal{X}) \xrightarrow{\Phi_{j^*\mathcal{E}^\bullet}} \text{D}^b(\mathcal{X}')$$

の間に自然な同型が存在する。

証明. 任意の $\mathcal{F}^\bullet \in \text{D}^b(X)$ に対して、

$$\begin{aligned} i'_*(\Phi_{k^*\mathcal{E}^\bullet}(\mathcal{F}^\bullet)) &= i'_*(p_*(k^*\mathcal{E}^\bullet \otimes q^*\mathcal{F}^\bullet)) \cong p_*(i \times i')_*(k^*\mathcal{E}^\bullet \otimes q^*\mathcal{F}^\bullet) \cong p_*j_*k_*(k^*\mathcal{E}^\bullet \otimes q^*\mathcal{F}^\bullet) \\ &\cong p_*j_*(\mathcal{E}^\bullet \otimes k_*q^*\mathcal{F}^\bullet) \quad (\text{射影公式}) \\ &\cong p_*j_*(\mathcal{E}^\bullet \otimes r^*i_*\mathcal{F}^\bullet) \quad (\text{平坦射による底変換}) \\ &\cong p_*j_*(\mathcal{E}^\bullet \otimes j^*q^*i_*\mathcal{F}^\bullet) \\ &\cong p_*(j_*\mathcal{E}^\bullet \otimes q^*i_*\mathcal{F}^\bullet) = \Phi_{j^*\mathcal{E}^\bullet}(i_*\mathcal{F}^\bullet) \quad (\text{射影公式}) \end{aligned}$$

である。□

命題 5.24 (Kawamata, Namikawa). $Z \subset X \times X'$ を被約な部分多様体 $Z := \tilde{X} \cup (P \times P^\vee) \subset X \times X'$ とする。このとき、Fourier-向井変換

$$\Phi_{\mathcal{O}_Z}: D^b(X) \rightarrow D^b(X')$$

は圏同値を与える。

証明. 次のような状況にあることを仮定して証明を行う (注意 5.26 参照)。ある非特異な準射影曲線 C とその上の非特異な族 \mathcal{X} が存在して、ある点 $0 \in C$ 上のファイバー \mathcal{X}_0 が X と同型であり、さらに、 $\mathcal{N}_{P/\mathcal{X}} \cong \mathcal{O}_P(-1)^{\oplus n+1}$ となっている。

$$\begin{array}{ccc} P \hookrightarrow X & \hookrightarrow & \mathcal{X} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \{0\} \hookrightarrow & C \end{array}$$

$P \subset \mathcal{X}$ に対して、基本フロップ $\mathcal{X} \leftarrow \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}'$ を行うことにより、新たに族 $\mathcal{X}' \rightarrow C$ を得る。明らかに、 0 上のファイバー \mathcal{X}'_0 は X' と同型である。さらに、 $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow C$ の 0 上のファイバー $\tilde{\mathcal{X}}_0$ は自然に $Z := \tilde{X} \cup (P \times P^\vee)$ に同型である。以下、補題 5.23 で用いた記号をそのまま流用する。

命題 5.19 により、

$$\Phi := \Phi_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}}: D^b(\mathcal{X}) \rightarrow D^b(\mathcal{X}')$$

は圏同値である。ただし、 $\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}'$ により、 $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}} \in D^b(\mathcal{X} \times \mathcal{X}')$ とみなしている。 Φ の逆 Φ' について調べよう。今 $q^*\omega_{\mathcal{X}} \cong p^*\omega_{\mathcal{X}'}$ だから、命題 2.16 により、 Φ の左右の随伴関手は一致している。従って、 Φ' の核は

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}^\vee \otimes q^*\omega_{\mathcal{X}}[2n+1] &\cong (\omega_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}'}^*|_{\tilde{\mathcal{X}}} \otimes \omega_{\tilde{\mathcal{X}}}[-(2n+1)]) \otimes q^*\omega_{\mathcal{X}}[2n+1] \quad (\text{系 5.25}) \\ &\cong \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(n\tilde{E}) \quad (\text{標準束公式}) \end{aligned}$$

となる。ここに、 \tilde{E} は $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ の例外因子で、 $\tilde{E}|_{\tilde{\mathcal{X}}} = E$ である。また、次の系 5.25 を引用した。

系 5.25 ([Hu] Corollary 3.40). Y を非特異な射影的多様体、 X を Y の非特異な余次元 c の部分多様体で、 $i: X \hookrightarrow Y$ を開移入とする。このとき、

$$(i^*\mathcal{O}_X)^\vee \cong i_*\omega_X \otimes \omega_Y^*[-c]$$

が成立する。

同様にして、 $\Phi := \Phi_{\mathcal{O}_Z}: D^b(X) \rightarrow D^b(X')$ の右随伴関手 Φ' の核を調べよう。 $\mathcal{O}_Z \in D^b(X \times X')$ の双対は $\mathcal{O}_Z^\vee \cong (k^*\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}})^\vee \cong k^*(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}^\vee)$ となっている。ここに、 $\tilde{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X} \times_C \mathcal{X}'$ の非特異な部分多様体とみている。よって、命題 5.25 により、 Φ' の核は

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Z^\vee \otimes q^*\omega_X[2n] &\cong (k^*(\omega_{\mathcal{X} \times_C \mathcal{X}'}^*|_{\tilde{\mathcal{X}}} \otimes \omega_{\tilde{\mathcal{X}}})[-2n]) \otimes q^*\omega_X[2n] \quad (\text{系 5.25}) \\ &\cong \mathcal{O}_Z(nE) \end{aligned}$$

と計算される。特に、 $k^*\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}(n\tilde{E}) \cong \mathcal{O}_Z(nE)$ であることがわかった。

Φ が忠実充満であることをみるには、随伴 $\text{id} \rightarrow \Phi' \circ \Phi$ が同型であることをいえばよい。そこで、任意に $\mathcal{G}^\bullet \in D^b(X)$ を選び \mathcal{H}^\bullet を $\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \Phi'(\Phi(\mathcal{G}^\bullet))$ の写像錐としよう。 i_* を適用して完全三角形

$$i_*\mathcal{G}^\bullet \rightarrow i_*\Phi'(\Phi(\mathcal{G}^\bullet)) \rightarrow i_*\mathcal{H}^\bullet \rightarrow i_*\mathcal{G}^\bullet[1]$$

を得る。補題 5.23 により、 $i_* \circ \Phi' \circ \Phi \cong \Phi' \circ i_* \circ \Phi \cong \Phi' \circ \Phi \circ i_*$ がわかる。よって、 $i_*\mathcal{H}^\bullet$ は $i_*\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \Phi'(\Phi(i_*\mathcal{G}^\bullet))$ の写像錐に同型である。 Φ が同値であることから、 $\mathcal{H}^\bullet = 0$ が得られ、従って Φ が忠実充満であることが示された。

$\omega_X|_P \cong \mathcal{O}_P$ 、 $\omega_{X'}|_{P^\vee} \cong \mathcal{O}_{P^\vee}$ に注意すれば、命題 3.5, (ii) から Φ が圏同値を与えることが直ちに従う。□

注意 5.26. 上の命題 5.24 の証明は特殊な場合の証明しか与えていない。一般の場合も、上の証明に帰着される。ごく簡単にその様子をスケッチしておく。

$X \leftarrow \tilde{X} \rightarrow X'$ を $P \subset X$ 、 $P' \subset X'$ に関する一般の向井フロップとしよう。 $|\Omega_P|$ と書けば P 上のアフィン束を意味する。 P は $Y := |\Omega_P|$ に自然に埋め込まれ、その法層は $\mathcal{N}_{P/Y} \cong \Omega_P$ である。すると、 X の P での完備化と Y の P での完備化が同型になる。このことから、命題 5.24 の主張は、 $P \subset Y$ の向井フリップに関する主張に帰着される（詳しくは [N] 参照）。Euler 完全列

$$0 \rightarrow \Omega_P \rightarrow \mathcal{O}_P(-1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

から、 $P \subset Y$ の $\mathcal{Y} := |\mathcal{O}_P(-1)^{\oplus n+1}|$ への埋め込みと、滑らかな射 $\mathcal{Y} \rightarrow C := \mathbf{A}^1$ が得られる。これで、命題 5.24 の証明の状況に帰着された。

6 代数曲面の導来圏 (大橋 久範)

6.1 導入

X を非特異射影代数曲面、 Y を非特異射影代数多様体で、どちらも \mathbb{C} 上定義されているものとします。ここでは次の問題を考えます。

- \mathbb{C} -線形三角圏としての同値 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ があるとき、同型 $X \simeq Y$ が言えるか。

本稿では代数曲面の分類論と同様の順序を追って、 X の標準因子のネフ性と小平次元で場合分けを行い、上の問題の解答を与えていきます。

命題 6.1. 標準因子 K_X がネフでない場合を考える。導来圏が同値な Y で X と非同型なものが存在すると仮定すると、 X は相対的極小な楕円曲面構造を持つ。しかも、 X は次のどちらかである。

- (-1) 曲線を含む有理曲面
- 楕円曲線 C 上の線織曲面 $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$

系 6.2. X が (-1) 曲線を含むときは、 $Y \simeq X$ でなければ X は有理曲面であり、かつ相対的極小な楕円曲面構造を持つ。

系 6.3. $\kappa(X) = -\infty$ のときは、 $Y \simeq X$ でなければ X が楕円曲面構造を持つ。

以下、 K_X がネフ因子であると仮定します。 X は小平次元が非負の極小モデルになります。

まず、 $\kappa(X) = 0$ のクラスは Abel 曲面、 $K3$ 曲面、Enriques 曲面、双楕円 (bielliptic) 曲面の 4 つに分類されます。前者二つのクラスについては、導来同値な曲面の判定が Hodge 構造によりなされます：定理 3.26、命題 4.20 参照。

命題 6.4. X が Enriques 曲面のとき、導来同値な Y に対して常に $Y \simeq X$ となる。

命題 6.5. X が双楕円曲面のとき、導来同値な Y に対して常に $Y \simeq X$ となる。³

$\kappa(X) = 1$ のクラスは標準因子から定まる楕円曲面構造 $\pi : X \rightarrow C$ を持ち、6.2 節で見るように一般には $Y \simeq X$ とは限りません。しかし、次の形で可能な Y を決定できます。

命題 6.6. $\kappa(X) = 1$ とする。 f を π のファイバーのコホモロジー類とする。 X と導来同値な Y に対し、適当な向井ベクトル $v = (0, rf, d)$ と偏極 h が存在して $\text{g.c.d.}(r(fh), d) = 1$ かつ $Y \simeq M_v(h)$ となる。

$\kappa(X) = 2$ のときは明快です。

命題 6.7. $\kappa(X) = 2$ のときは、つねに $Y \simeq X$ である。

本文の構成をまとめておきます。6.2 節では相対的極小な楕円曲面に対し、それと導来同値だが一般には同型でない曲面 Y を構成する方法を説明します。6.3 節で命題 6.4 を証明します。6.4 節は補題として使われる内容のまとめです。ここでの内容は一般次元で成り立ちます。6.5 節で命題 6.1 が、6.6 節で命題 6.7 が証明されます。6.7 節では命題 6.6 を証明します。Appendix では連接層の安定性、因子の小平次元、標準環の同型について補足的な説明をつけました。

本稿は [Hu] で言うところの 6 章、12 章 (一部除く) を纏め直した内容になっています。理解力の都合で証明を書き換えたり蛇足を付け足したりした箇所もありますので、本稿を読んで下さる方は注意するようお願いいたします。

第一回琵琶湖若手数学者勉強会は会場の立地、勉強会の内容、食事の内容ともに非常にすばらしかったと思います。企画、運営された皆様ありがとうございました。

³この命題は本稿中では証明できませんでした。

6.2 楕円曲面の Fourier-向井対 (1)

ここでは、 X が相対的極小な楕円曲面構造 $\pi : X \rightarrow C$ を持つ場合、一般には非同型な Fourier-向井対が存在することを説明します。構成には層のモジュライ空間を使います。Appendix A-1 の内容をいくつか引用します。

π のファイバーのコホモロジー類を $f \in H^2(X, \mathbb{Z})$ とします。整数 r, d と豊富因子 h を固定し、 $v = (0, rf, d) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ とおきます。 $M_v(h)$ を、 h に関して p -半安定な接続層 E で向井ベクトル $v(E) = v$ を持つもの (の S -同値類) のなすモジュライ空間とします。ここでの安定性については Appendix A-2 を参照してください。定理 6.38 から、これは射影的な粗モジュライとして存在します。

v の取り方の意味は次の命題からわかります。

命題 6.8. $[E] \in M_v(h)$ が安定層なら、 $\text{supp } E$ は π の一つのファイバーと一致する。逆に、 F を一つの非特異ファイバーとし、楕円曲線 F 上の階数 r 、次数 d の安定層 E を考えると、これは X 上の層と見たときに安定で $[E] \in M_v(h)$ である。

証明. はじめに、計算上の注意をしておく。小平の標準束公式より $K_X = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ と書ける。 $K_X^2 = 0$ が成り立つことを使うと、 X の Todd 類に関して

$$\sqrt{\text{td}(X)} = \left(1, \frac{1}{4}K_X, \frac{c_2(X)}{24} \right)$$

$$v(E) = v \Leftrightarrow \text{ch}(E) = v \Leftrightarrow c(E) = (0, rf, -d)$$

が成り立つことがわかる。

まず前半については、 $c_1(E)$ は $\text{supp } E$ の因子部分に適当な正の重みをつけて足したものだから、 $c_1(E)f = 0$ より $\text{supp } E$ が水平成分 (C に全射するような成分) を持たないことがわかる。一方、もし $\text{supp } E = Y_1 \sqcup Y_2$ となるとすると、 $\text{id}_{Y_i} \in \text{Hom}(E, E)$ ($i = 1, 2$) は独立な元になり、安定層は単純 (例 6.37) であったことに矛盾する。よって $\text{supp } E$ は連結である。ここから、 $\text{supp } E$ は一つのファイバーに含まれることがわかり、 $c_1(E) = rf$ よりこれは一致する。よって、前半が言える。

次に、 E を非特異ファイバー上の安定層としたとき、安定性の条件が X 上の層としても成り立つことは自明である。あとは数値的不変量の計算だが、 F が楕円曲線であることに注意して閉移入 $i : F \rightarrow X$ に対し Grothendieck-Riemann-Roch (定理 2.31) を使うと、 $\text{ch}(i_*(E)) = i_*(\text{ch}(E))/(\text{td}(X)) = (0, rf, d)$ がわかり、 $[E] \in M_v(h)$ がわかる。□

命題 6.9. $\text{g.c.d.}(r(fh), d) = 1$ ならば、 $M_v(h)$ は精密モジュライで、その不変量を持つ半安定層は全て安定になる。特に $M_v(h) \times X$ 上に普遍族 \mathcal{P} が存在する。さらに、 $M_v(h)$ は二次元で非特異になる。

証明. 前半の内容は命題 6.39 からわかる。後半を示す。変形理論から、 $[E]$ における $M_v(h)$ の Zariski 接空間は 1 次無限小変形のなす空間 $\text{Ext}^1(E, E)$ と同型になるので、この空間の次元が全ての $[E] \in M_v(h)$ に対して 2 になることが言えればよい (ここでは簡単のために、 $M_v(h)$ が被約であると仮定する)。 $\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim \text{Ext}^i(E, E) = v(E)^2 = 0$ であり、 E の単純性より $\dim \text{Hom}(E, E) = 1$ 、Serre 双対 (定理 1.5) より $\dim \text{Ext}^2(E, E) = \dim \text{Hom}(E, E \otimes \omega_X)$ が成り立つので、この最後の次元が 1 になればよい。 $E \simeq E \otimes \omega_X$ を示せば十分である。 E が非特異ファイバー F 上の安定層ならば $\omega_X|_F \simeq \mathcal{O}_F$ だから、 $E \simeq E \otimes \omega_X$ となる。 E が一般の場合には⁴、 $M_v(h)$ 上の関数 $y \mapsto \dim \text{Hom}(\mathcal{P}_y, \mathcal{P}_y \otimes \omega_X)$ を考える。ここで \mathcal{P}_y は点 $y \in M_v(h)$ に対応する X 上の安定層。上半連続性により、一般の E に対しても非零な準同型 $E \rightarrow E \otimes \omega_X$ が存在することがわかる。 $\text{ch}(E \otimes \omega_X) = v$ であることに注意。するとこの準同型は同じ μ の値を持つ μ -安定層の間の射になるから、同型になり、結局任意の E に対して $E \simeq E \otimes \omega_X$ が成り立つ。□

次がこの節の主結果になります。

⁴この部分の証明は [Br1] からとっています。

命題 6.10. $\text{g.c.d.}(r(fh), d) = 1$ ならば、 $M_v(h)$ の任意の連結成分 M は非特異射影曲面である。 $M \times X$ 上の普遍族 \mathcal{P} を核とする Fourier-向井変換 Φ は圏同値になり、特に、 M と X は Fourier-向井対になる。

証明. 注意 3.6 の二つの条件を見る。(i) は層 \mathcal{P}_y の単純性である。(ii) を確かめる。まず、前命題の最後の部分と同じ理由で $\text{Hom}(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y) = 0$ であり、Serre 双対と $\mathcal{P}_x \simeq \mathcal{P}_x \otimes \omega_X$ から $\text{Ext}^2(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y) = 0$ も出る。次に $\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim \text{Ext}^i(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y) = v(\mathcal{P}_x)v(\mathcal{P}_y) = 0$ だから、結局全ての i について $\text{Ext}^i(\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y) = 0$ である。よって (ii) が成り立ち、 Φ は忠実充満である。 $\mathcal{P}_x \simeq \mathcal{P}_x \otimes \omega_X$ だから、Bridgeland の判定法 [Hu, Corollary 7.12] により Φ が圏同値になっていることがわかる。□

注意 6.11. (i) 一般には X と M は同型ではありません。例えば、 $v = (0, f, 0)$ と選んだ場合、 $M \rightarrow C$ には標準的な切断 $c \rightarrow \mathcal{O}_{F_c}$ が存在するので、 X が切断を持たない場合には、 $X \not\simeq M$ となります。例えば $K3$ 曲面ではこのようなことが起こり得ます。

(ii) ここでは証明できませんが、 $M_v(h)$ は連結になります。つまり $M = M_v(h)$ 。

6.3 Enriques 曲面の場合

ここでは命題 6.4 を証明します。

準備として、一般に X を非特異射影多様体とし ω_X が有限位数 n を持つとします。 X の標準被覆 \tilde{X} とは次のように定義される多様体です。まず、自明化 $s: \omega_{\tilde{X}}^{-n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ を固定し、これを用いて $\oplus_{i=0}^{n-1} \omega_{\tilde{X}}^{-i}$ を $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -代数とみなします。 \tilde{X} は $\text{Spec}_X \oplus_{i=0}^{n-1} \omega_{\tilde{X}}^{-i}$ と代数的に定義されます。

X のアフィン開集合 $\text{Spec } A$ 上に制限すると $\tilde{X} = \text{Spec } A[t]/(t^n - s)$, $s \in A^\times$ は単元と書けるので、 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ は n 次不分岐被覆になっています。また、1 の原始 n 乗根 ϵ をとってきたときに $t \mapsto \epsilon t$ により $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ への作用が定まりますが、この作用の不変部分空間は $\omega_{\tilde{X}}^{-i} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ となる $\omega_{\tilde{X}}^{-i}$ と対応するので、 ω_X の位数が n であったことから \tilde{X} は連結になります。

X と同値な導来圏を持つ Y が与えられたとき、命題 2.1 により ω_Y も位数 n を持つので、それぞれの標準被覆 \tilde{X}, \tilde{Y} が構成できます。次の命題は、与えられた圏同値 $\Phi: D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ に対してその同変な持ち上げが存在することを示しています。証明は省きます。

命題 6.12. 上記のもとで、次の条件をみます $\tilde{\Phi}: D^b(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} D^b(\tilde{Y})$ が存在する。

i) 次の二つの可換図をみます。

$$\begin{array}{ccc} D^b(\tilde{X}) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & D^b(\tilde{Y}) & D^b(\tilde{X}) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & D^b(\tilde{Y}) \\ \pi_{X*} \downarrow & & \downarrow \pi_{Y*} & \pi_X^* \uparrow & & \uparrow \pi_Y^* \\ D^b(X) & \xrightarrow{\Phi} & D^b(Y) & D^b(X) & \xrightarrow{\Phi} & D^b(Y) \end{array}$$

ii) 標準被覆に作用する $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の適当な生成元 g_X, g_Y を持つてくると $\tilde{\Phi} \circ g_X^* \simeq g_Y^* \circ \tilde{\Phi}$

命題 6.4 の証明. X が Enriques 曲面のとき、 ω_X は位数 2 で標準被覆は $K3$ 曲面であった。上の議論より、持ち上げ $\tilde{\Phi}: D^b(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} D^b(\tilde{Y})$ が取れる。従って系 4.16 より \tilde{Y} は $K3$ 曲面で、 Y は Enriques 曲面になる。系 4.19 から、Hodge 構造の同型 $\tilde{\Phi}^H: \tilde{H}(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ が誘導される。

持ち上げの性質により、 $\tilde{\Phi}^H$ は標準被覆の被覆変換がコホモロジーに引き起こす写像 ι_X^*, ι_Y^* と可換図式をなす。従って、これらの対合による (-1) 固有空間を \tilde{H}_- と書くと、 $\tilde{\Phi}^H$ は $\tilde{H}_-(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_-(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ を引き起こす。ところで、 ι が引き起こすコホモロジーへの作用を見ると、 $\tilde{H}_-(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \subset H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z})(Y$ も同様) となっている。 \tilde{H} の Hodge 構造の定義から、 \tilde{H}_- に H^2 から引き起こされる Hodge 構造に関しても $\tilde{\Phi}^H$ は同型になっている。 $\tilde{H}_-(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ の $H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ への埋め込みが一意的であるという Nikulin の結果より、これは $H^2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ に延長できる。従って Enriques 曲面に関する Torelli 定理より $X \simeq Y$ が成り立つ。□

6.4 Fourier-向井核の幾何学的性質

この節では圏同値から導かれる基本的性質を証明します。これらは補題として、命題 6.1, 6.7 の証明の中で使われます。 X, Y は非特異射影多様体とし、三角圏の同値 $D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ が与えられたとします。ここでの証明は X が一般次元 n の場合に通用します。

6.4.1 全射性

まず、系 2.21 より、与えられた圏同値はある対象 $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ を用いて、Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ の形に書くことができます。

$$\text{supp}(\mathcal{P}) = \cup_i \text{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{P}) \subset X \times Y$$

とおきます。ここで \mathcal{H}^i は層の複体の i 次コホモロジーです。これは接続層の台の有限和なので閉集合です。 $q : X \times Y \rightarrow X$ と $p : X \times Y \rightarrow Y$ を自然な射影とします。まず、逆関手について次がわかります。

補題 6.13. $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y}$ の逆関手は対象 $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{\vee} \otimes q^* \omega_X[\dim X] \simeq \mathcal{P}^{\vee} \otimes p^* \omega_Y[\dim Y]$ を核とする Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X}$ である。さらに、 $\text{supp} \mathcal{P} = \text{supp} \mathcal{Q}$ が成り立つ。

証明. $\Phi_{\mathcal{P}}$ が圏同値だから、左右の随伴関手が一致する。命題 2.16 より随伴関手の核は書けていて、系 2.21 の核の一意性よりそれらが同型になるので、前半の主張がわかる。(ここでコホモロジー層の分布を見ることで $\dim X = \dim Y$ もわかる。) 後半の主張は、 $\text{supp} \mathcal{P}^{\vee} = \text{supp} \mathcal{P}$ ([Hu, Lemma 3.32]) よりわかる。 \square

この補題により、 p, q に関する命題のいくつかは対称に扱うことができます。次はその最初の例です。

補題 6.14. $q(\text{supp}(\mathcal{P})) = X, p(\text{supp}(\mathcal{P})) = Y$ である。

証明. 対称性により、一つ目の式だけ示せば十分である。 q が平坦より通常の引き戻し $q^* : \text{Coh}(X) \rightarrow \text{Coh}(X \times Y)$ は完全関手、よって導来引き戻しに対しても $q^* k(x) \simeq \mathcal{O}_{\{x\} \times Y}$ 。 $x \notin q(\text{supp}(\mathcal{P}))$ とすると、 $\text{supp} \mathcal{H}^s(\mathcal{P}) \cap \text{supp}(q^* k(x)) = \emptyset$ であるから次のスペクトル系列

$$E_2^{r,s} = \text{Tor}_{-r}(\mathcal{H}^s(\mathcal{P}), q^* k(x)) \Rightarrow \text{Tor}_{-r-s}(\mathcal{P}, q^* k(x))$$

のすべての $E_2^{r,s}$ は消える。従って、収束先も全てゼロになり、 $\mathcal{P} \otimes q^* k(x) \simeq 0$ と $\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)) \simeq 0$ が従う。だがこれは、 $\Phi_{\mathcal{P}}$ が忠実充満であることに反する。 \square

6.4.2 標準束の引き戻しの比較

命題 6.15. $Z \subset \text{supp}(\mathcal{P})$ を既約閉部分多様体とし、 \tilde{Z} をその正規化、 $\pi_X : \tilde{Z} \rightarrow X$ と $\pi_Y : \tilde{Z} \rightarrow Y$ を自然な射とする。すると、自然数 $r > 0$ が存在して $\pi_X^* \omega_X^r \simeq \pi_Y^* \omega_Y^r$ となる。

証明. 補題 6.13 より、 Z は $\mathcal{P}^{\vee} \otimes q^* \omega_X \simeq \mathcal{P}^{\vee} \otimes p^* \omega_Y$ の台にも含まれる。 $\mathcal{G} = \oplus_i \mathcal{H}^i(\mathcal{P}^{\vee})|_Z$ とおくと、これは Z 上の層で、台が全体になることから生成点における次元 $\dim_{\mathcal{O}_\eta} \mathcal{G}_\eta =: r > 0$ となり、さらに $\mathcal{G} \otimes (q|_Z)^* \omega_X \simeq \mathcal{G} \otimes (p|_Z)^* \omega_Y$ をみたく(ここでの $*$ は通常の引き戻し)。これらを全て \tilde{Z} に引き戻し、次に述べる補題を使うと $\pi_X^* \omega_X^r \simeq \pi_Y^* \omega_Y^r$ となる。 \square

補題 6.16. \tilde{Z} が正規代数多様体、 \mathcal{F} がその上の接続層で、生成点 η において $\dim_{\mathcal{O}_\eta}(\mathcal{F}_\eta) = r > 0$ とする。 $L_i \in \text{Pic}(\tilde{Z})$ のとき、 $\mathcal{F} \otimes L_1 \simeq \mathcal{F} \otimes L_2 \Rightarrow L_1^r \simeq L_2^r$ が成り立つ。

証明. 与えられた同型は $\mathcal{F}_{\text{tor}} \otimes L_1 \simeq \mathcal{F}_{\text{tor}} \otimes L_2$ を引き起こすので、 \mathcal{F} を $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\text{tor}}$ で置き換えて \mathcal{F} をねじれない層と仮定してよい。 \tilde{Z} が正規であるから、 \mathcal{F} は余次元 2 以上の閉集合を除いた開集合 U 上で階数 r の局所自由層になる。仮定の同型の \det を U 上で取ると、 $\det(\mathcal{F}|_U) \otimes L_1^r|_U \simeq \det(\mathcal{F}|_U) \otimes L_2^r|_U$ となるが、 U 上では $\det(\mathcal{F}|_U)$ は可逆層になるので、 $L_1^r|_U \simeq L_2^r|_U$ がわかる。再び正規性より、 $L_1^r \simeq L_2^r$ がわかる。 \square

系 6.17. $\text{supp}(\mathcal{P})$ 上の可逆層として、 $q^*\omega_X$ と $p^*\omega_Y$ は数値的同値である。

証明. $C \subset \text{supp}(\mathcal{P})$ を任意の射影的既約曲線、 $\varphi: \tilde{C} \rightarrow C$ を正規化とすると、命題 6.15 より

$$C \cdot q^*\omega_X = (1/r) \deg_{\tilde{C}}(\varphi^*q^*\omega_X^r) = (1/r) \deg_{\tilde{C}}(\varphi^*p^*\omega_Y^r) = C \cdot p^*\omega_Y$$

□

次に続く系に現れる、ネフ性と数値的小平次元に関しては Appendix B も参照してください。

系 6.18. ω_X (または ω_X^{-1}) がネフであることと ω_Y (または ω_Y^{-1}) がネフであることは同値である。

証明. $q: \text{supp}(\mathcal{P}) \rightarrow X$ と $p: \text{supp}(\mathcal{P}) \rightarrow Y$ が全射であることから、上の系を用いて

$$\omega_X \text{ がネフ} \Leftrightarrow q^*\omega_X \text{ がネフ} \Leftrightarrow p^*\omega_Y \text{ がネフ} \Leftrightarrow \omega_Y \text{ がネフ}$$

ω_X^{-1} に対しても全く同じである。

□

系 6.19. X と Y の数値的小平次元は等しい。

証明. X に対し支配的な既約成分 $Z \subset \text{supp}(\mathcal{P})$ を取り、正規化 \tilde{Z} を取ると命題 6.15 より $\pi_X^*\omega_X^r \simeq \pi_Y^*\omega_Y^r$ が \tilde{Z} 上で成り立つ。よって $\nu(X, \omega_X^r) = \nu(\tilde{Z}, \pi_X^*\omega_X^r) = \nu(\tilde{Z}, \pi_Y^*\omega_Y^r) \leq \nu(Y, \omega_Y^r)$ となる。 X と Y を入れ替えれば逆向きの不等式も出てくるから、等号が成り立つ。 □

6.4.3 K -同値

定義 6.20. 非特異射影多様体 X と Y が K -同値であるとは、ある Z と射影双有理射 $\pi_X: Z \rightarrow X$ 、 $\pi_Y: Z \rightarrow Y$ が存在して $\pi_X^*\omega_X \simeq \pi_Y^*\omega_Y$ となるときをいう。

上で示した全射性により、 $\text{supp} \mathcal{P}$ の既約成分 Z で X に全射するものが存在します。 $\dim Z \geq \dim X$ となります。ここでは、等号が成り立つ $\Rightarrow X$ と Y は K -同値、を証明します。

補題 6.21. 射影 $\text{supp}(\mathcal{P}) \rightarrow X$ のファイバーは全て連結である。

証明. 点 x の上でファイバーが非連結になったとする： $q^{-1}(x) \cap \text{supp}(\mathcal{P}) = Y_1 \sqcup Y_2$ 。下の補題 6.22 より $\mathcal{P} \otimes q^*k(x) = \mathcal{P} \otimes \mathcal{O}_{\{x\} \times Y} = \mathcal{P}|_{\{x\} \times Y}$ の台が $Y_1 \sqcup Y_2$ になる。 $\text{res } p: \{x\} \times Y \rightarrow Y$ は同型なので、 $\Phi_{\mathcal{P}}(k(x))$ が非連結な台を持つことになる。台の非交和分解に対して複体を直和分解できること ([Hu, Lemma 3.9]) を使うと $\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)) = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$, $\text{supp } \mathcal{F}_i = Y_i$ と書くことができ、特に、 $\dim \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)), \Phi_{\mathcal{P}}(k(x))) \geq 2$ となるので、忠実充満性に反する。 □

補題 6.22 ([Hu], Lemma 3.29). $i: T \subset X$ が閉部分集合のとき、 $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ に対して

$$\text{supp}(\mathcal{F}^\bullet) \cap T = \text{supp}(i^*\mathcal{F}^\bullet).$$

系 6.23. $Z \subset \text{supp}(\mathcal{P})$ を、 X に対し支配的な既約成分とし、 $\dim(Z) = \dim(X)$ と仮定する。このとき、 Z 以外の既約成分は X に対し支配的でない。さらに、 $Z \rightarrow X$ は双有理である。

証明. $W := \cup Z_i$ を Z 以外の既約成分の和とする。 $W \rightarrow X$ が全射と仮定する。 X の一般の点でのファイバーを考えると、 $Z \cup W = \text{supp}(\mathcal{P}) \rightarrow X$ のファイバーが連結かつ $Z \rightarrow X$ のファイバーは離散的なので、 X の一般点上で $W \supset Z$ となり、 Z が既約成分であることに反する。よって $W \rightarrow X$ は全射でない。すると、再び一般点上では $\text{supp}(\mathcal{P}) \rightarrow X$ のファイバーが $Z \rightarrow X$ のファイバーと一致するので、連結性よりファイバーは一点からなり、双有理がわかる。 □

以降、 X に対し支配的な既約成分 Z で $\dim Z = \dim X$ となるものが存在していると仮定します。

命題 6.24. $Z \rightarrow Y$ は支配的である。

証明. $Z \rightarrow X$ が双有理だったことからそれぞれから開集合 U_Z, U をとって $\text{res } q : U_Z \rightarrow U$ を同型にできる。 $\text{res } p : U_Z \rightarrow Y$ が支配的でないと仮定する。 $x_1 \neq x_2 \in U$ を、 $y = pq^{-1}(x_1) = pq^{-1}(x_2)$ となるようにとってくる。系 6.23 より $q^{-1}(x_i)$ が Z 以外の成分と交わらないように取れば、補題 6.22 より $\text{supp}(\mathcal{P} \otimes q^*k(x_i)) = \{q^{-1}(x_i)\}$ で、 $\mathcal{F}_i := \Phi_{\mathcal{P}}(k(x_i))$ はどちらも一点 y に台を持つ (0 でない) 複体になる。 $m_1 := \max\{m | \mathcal{H}^0(\mathcal{F}_1[m]) \neq 0\}$ 、 $m_2 := \min\{m | \mathcal{H}^0(\mathcal{F}_2[m]) \neq 0\}$ とおけば、容易に $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}_1[m_1], k(y))$ と $g \in \text{Hom}(k(y), \mathcal{F}_2[m_2])$ で $\mathcal{H}^0(f)$ が全射、 $\mathcal{H}^0(g)$ が単射となるものが作れる。すると $0 \neq g \circ f \in \text{Hom}(\mathcal{F}_1[m_1], \mathcal{F}_2[m_2])$ となり、 $\text{Hom}_{D_b(X)}(k(x_1)[l_1], k(x_2)[l_2]) = 0 (\forall l_1, l_2)$ に矛盾する。 \square

上の命題と補題 6.13 より、 X と Y の役割を入れ替えて補題 6.21 と系 6.23 を適用することができます。すると $Z \rightarrow Y$ も双有理であることがわかります。

命題 6.15 を見ると、正規化 \tilde{Z} において $\pi_X^* \omega_X^r \simeq \pi_Y^* \omega_Y^r$ が成立していることがわかります。 \tilde{Z} を特異点解消に置き換えても同じことが成立します。あとは次の命題を示せば、この節は完了です。

命題 6.25. X と Y は K -同値である。

証明⁵ 命題 6.15 より $\pi_X^* \omega_X^r \simeq \pi_Y^* \omega_Y^r$ である。 $\pi_X^* \omega_X \simeq \pi_Y^* \omega_Y$ を示す。 π_X に標準束公式を適用すると $K_{\tilde{Z}} \sim \pi_X^* K_X + \sum a_i E_i$ 、ここで X が非特異だから全ての例外因子 E_i に対して $a_i > 0$ である。同様に $K_{\tilde{Z}} \sim \pi_Y^* K_Y + \sum b_j F_j, b_j > 0$ 。従って $\sum r a_i E_i \sim \sum r b_j F_j$ となる。この因子類に対応する可逆層を \mathcal{L} とおくと、例外因子の性質より $H^0(Z, \mathcal{L}) = \mathbb{C}$ となる。すなわち、大域切断の定める因子が唯一なので因子として $\sum r a_i E_i = \sum r b_j F_j$ となり、結論が従う。 \square

系 6.26. $\dim X = 2$ で X と Y が K -同値ならば $X \simeq Y$ である。

証明. 上の証明と同様に、標準束公式の比較をすると、 π_X と π_Y の例外因子は一致する。二次元のときには、例外因子は連結成分ごとに一点につぶれるしかない。従って、 π_X と π_Y は同じ部分集合を点につぶす双有理射であり、 $X \simeq Y$ がわかる。 \square

6.5 命題 6.1 の証明

前節において、 X を支配する既約成分 Z の次元が 2 とすると X と Y は K -同値になり従って同型になることを示しました。よって、以下では $\dim Z \geq 3$ と仮定します。 $E \subset X$ を $K_X E < 0$ なる曲線とします。 $Z_E := Z \cap q^{-1}(E)$ とおき、 $q_E := q|_{Z_E} : Z_E \rightarrow E, p_E : Z_E \rightarrow Y$ とおきます。 $\dim Z \geq 3$ だから $\dim Z_E \geq 2$ です。

命題 6.27. p_E は有限射である。

証明. 曲線 $C \subset Z_E$ が p_E でつぶれると仮定する。系 6.17 より

$$0 = C \cdot p_E^* \omega_Y = C \cdot q_E^*(\omega_X|_E) = q_{E*}(C) \cdot \omega_X|_E$$

となるが、 $\omega_X|_E$ が反豊富であることから、 C は q_E に関しても縮約される。これは C が $X \times Y$ の部分集合であることに反す。 \square

この命題より $\dim Z_E = 2$ がわかり、 p_E は全射になります。 $\dim Z = 3$ もわかります。

系 6.28. ω_X^{-1} はネフであり、 $\nu(X, \omega_X^{-1}) = 1$ が成り立つ。

⁵[Hu] では証明のスケッチしかありませんでしたが、ここに書いた証明で十分だと思います。

証明. p_E の全射性より、系 6.17 を用いて

$$\omega_X^{-1}|_E \text{ がネフ} \Rightarrow q_E^* \omega_X^{-1}|_E \equiv p_E^* \omega_Y^{-1} \text{ がネフ} \Rightarrow \omega_Y^{-1} \text{ がネフ}$$

となり、系 6.18 より ω_X^{-1} もネフ。同様に、

$$\nu(Y, \omega_Y^{-1}) = \nu(Z_E, p_E^* \omega_Y^{-1}) = \nu(Z_E, q_E^* \omega_X|_E^{-1}) = \nu(E, \omega_X|_E^{-1}) = 1$$

となり、系 6.19 より $\nu(X, \omega_X^{-1}) = 1$ がわかる。 \square

これらの条件により X の可能性を絞ることができます。

- $\kappa(X) = -\infty$ である。

証明. $0 \neq \exists s \in H^0(X, \omega_X^k), k \geq 0$ と仮定すると、 ω_X^{-1} がネフなので $\text{div}(s) = 0$ しかあり得ませんが、この場合は $\omega_X^k \simeq \mathcal{O}_X$ で数値的に自明となり、 $\nu(X, \omega_X^{-1}) = 0$ が導かれ矛盾します。 \square

従って X 上の (-1) 曲線をつぶしていってできる極小曲面 X_{\min} は有理曲面か、種数 $g \geq 1$ の曲線上の \mathbb{P}^1 -束になります。

- X は $K_X^2 = 0$ をみだし、 (-1) 曲線を含む場合は有理曲面に、含まない場合は楕円曲線上の \mathbb{P}^1 -束になる。

証明. はじめの主張は $\nu(X, \omega_X^{-1}) = 1 < \dim X$ からわかります。もし X が種数 $g \geq 1$ の線織曲面とすると (-1) 曲線の縮約により K_X^2 の数値は 1 ずつ大きくなることから、

$$0 = K_X^2 \leq K_{X_{\min}}^2 = 8(1 - g)$$

よって $g = 1$ 。この場合 $X = X_{\min}$ となり X 上に (-1) 曲線は存在しません。また、 $K_X^2 = 0$ なる有理曲面は (-1) 曲線を含みます。 \square

注意 6.29. 上の系の証明において、 ω_X と同じ主張が ω_Y に対しても成り立つことを示しています。従って、上の二つの主張ならびに次の命題は全く同様に Y に対しても成り立ちます。

次を示せば命題 6.1 は完了します。

命題 6.30. X は相対的極小な楕円曲面構造を持つ。

証明. 図式 $X \xrightarrow{\pi_X} Z \xrightarrow{\pi_Y} Y$ に戻って考える。二つの射は全射であった。 $\dim Z = 3$ だったから、 π_Y の Stein 分解の一般のファイバーは Z 上で数値的同値な非特異既約曲線の族をなす。その元 C を取る。 $Z \subset X \times Y$ だから C と $D := \pi_X(C)$ は同型である。

D が楕円曲線であることを示す。まず系 6.17 より

$$0 = C \cdot \pi_Y^* \omega_Y = C \cdot \pi_X^* \omega_X = D \cdot \omega_X$$

である。 D は数値的同値類の中で動くので $D^2 \geq 0$ であるが、もし $D^2 > 0$ とすると $DK_X = 0, K_X^2 = 0$ から Hodge 指数定理より $K_X \equiv 0$ 、これは $\nu(X, \omega_X^{-1}) = 1$ に反する。よって D は楕円曲線である。

従って X 上には楕円曲線の族が存在するので、楕円曲面構造が存在し⁶、 $K_X^2 = 0$ より相対的に極小であることがわかる。 \square

⁶ここは少し飛躍しているように見えますが、次のように正当化できます。

まず、 X が有理曲面なら数値同値から線形同値が言えるので、 $|mD|$ で定まる射が楕円曲面になることがすぐわかります。
 X が (-1) 曲線を含まない、楕円曲線上の線織面の場合を考えます。Leray-Hirsch の定理より $H^2(X, \mathbb{Z})$ がねじれを持たないので、数値同値性から代数的同値性が言えます。すなわち D は代数的同値類を動きます。代数的同値の定義より、パラメータ多様体 T と $X \times T$ 上の因子 $Y \in \text{Div}(X \times T)$ があって、 $\{Y|_{X \times \{t\}}\}_{t \in T}$ が X 上の因子の非自明な族で、 $Y|_{X \times \{t_0\}} = D$ なるものが取れます。 T は一次元で非特異なものに取り直すことができます。さらに、必要に応じて T を縮めることにより $Y \subset X \times T$ は正因子で、しかも $p: Y \rightarrow T$ が滑らかな射になるようにできます。すると、 p のファイバーは D と代数的同値な X 上の曲線の族になりますが、 $D^2 = 0$ よりこれらは X 上で交わりません。ここから $Y \rightarrow X$ が単射であることがわかり、ZMT より Y は X の開集合と同型です。よって $X \dashrightarrow T$ ができて、 T を完備化すれば、 $K_X^2 = 0$ からこれは自然に射になり、 D をファイバーに持つ楕円曲面になります。

6.6 命題 6.7 の証明

命題 6.31. $\kappa(X, \omega_X) = \dim X$ または $\kappa(X, \omega_X^{-1}) = \dim X$ と仮定する。このとき、 X と導来同値な Y は、 X と K -同値になる。

補題 6.32. 因子 E が $\kappa(X, E) = \dim X$ をみたすとする。 H を豊富因子とする。このとき十分大きい l に対し $\mathcal{O}(lE - H)$ は大域切断を持つ。すなわち $lE \sim H + D, D \geq 0$ が成り立つ。

証明. 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(lE - H) \longrightarrow \mathcal{O}(lE) \longrightarrow \mathcal{O}_H(lE) \longrightarrow 0$$

から

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(lE - H)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(lE)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_H(lE))$$

が得られる。仮定より、中央の項は l に関し $\dim X$ 次の多項式で、右端は高々 $\dim X - 1$ 次であるから、左の項が $\dim X$ 次の多項式になる。したがって、 $l \gg 0$ のとき $H^0(\mathcal{O}(lE - H)) \neq 0$ である。□

命題 6.31 の証明. 上の補題を ω_X^e ($e = 1$ または -1) に適用する。 $leK_X \sim H + D$ となる。 $Z \subset \text{supp } \mathcal{P}$ を X に全射する成分とし、 $\pi_X : Z \rightarrow X, \pi_Y : Z \rightarrow Y$ とおく。 $\text{res } \pi_Y : Z - \pi_X^{-1}(D) \rightarrow Y$ が擬有限射であることを示す。 $C \subset Z - \pi_X^{-1}(D)$ が π_Y で縮約されると仮定する。 $\deg \pi_Y^* \omega_Y^e|_C = 0$ である。補題 6.17 より

$$\begin{aligned} 0 &= \deg \pi_X^* \omega_X^e|_C \\ &= (1/l)(\pi_X^* H \cdot C + \pi_X^* D \cdot C) \end{aligned}$$

だが、 C は自然に X の部分集合になり H が豊富なので

$$0 > D \cdot C$$

が導かれる。これは、 $C \subset D$ でなければ起こり得ず、仮定に反する。

これで $Z \rightarrow Y$ が擬有限であることがわかり、

$$\dim X \leq \dim Z \leq \dim Y = \dim X$$

となり、 $\dim Z = \dim X$ となった。よって第 6.4.3 節の結果により X と Y は K -同値である。□

命題 6.7 の証明. 命題 6.31 と系 6.26 からわかる。□

注意 6.33. 系 6.2 と命題 6.31 を組み合わせると、系 6.3 の有理曲面の場合の別証明になっています。

6.7 楕円曲面の Fourier-向井対 (2)

$\kappa(X) = 1$ の曲面は、楕円曲面構造 $\pi : X \rightarrow C$ を持ちます。このような場合に非自明な Fourier-向井対が存在することは 6.2 節で見ましたが、ここでは導来同値なものがそれに限るということを $\kappa(X) = 1$ の場合に示します。

命題 6.6 の証明. まず、命題 6.1 と注意 6.29 から X も Y も (-1) 曲線を含まないと仮定しておいてよい。

圏同値 $\Phi = \Phi_{\mathcal{P}} : D^b(Y) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ を取る。 $y \in Y$ を閉点とし $E = \Phi(k(y))$ とそのコホモロジー層 $\mathcal{H}^i = \mathcal{H}^i(E)$ を見る。

忠実充満性から $\text{End}(E) = \mathbb{C}$ であり、 $\text{supp } E = \cup \text{supp } \mathcal{H}^i$ は連結である。注意 2.26 と $k(y) \simeq k(y) \otimes \omega_Y$ を組み合わせると、 $E \otimes \omega_X \simeq E$ が従う。よって $\mathcal{H}^i \otimes \omega_X \simeq \mathcal{H}^i$ でもある。両辺の chern 指標を比較すると、 $\text{ch}(\mathcal{H}^i) \cdot (1 + \omega_X + \omega_X^2/2) = \text{ch}(\mathcal{H}^i)$ であるが、 K_X の $H^2(X, \mathbb{Q})$ でのクラスが非零であることから $\text{ch}_0(\mathcal{H}^i) = 0, \text{ch}_1(\mathcal{H}^i) \cdot K_X = 0$ が出る。 K_X はファイバーのクラスに比例しているから、ここから $\text{supp } E$

が一つのファイバーに含まれていることがわかる。ここで、はじめに取った点 y を動かすと、全射性 (補題 6.14) より $\text{supp } E$ が π の非特異ファイバー $F \subset X$ に含まれるようにできる。

ここで、 E が一つの層のシフトに擬同型であることを示す。そのためには \mathcal{H}^i のうち高々 (従ってちょうど) 一つだけが非零であることを示せばよい。スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_i \text{Ext}^p(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^{i+q}(E)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(E, E)$$

の最初の射は $\bigoplus_i \text{Ext}^1(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^i(E)) \subset \text{Ext}^1(E, E)$ となる。

$\mathcal{H}^i(E)$ は F に台を持つ層なので、十分大きい n に対し $\text{Pic}^0(nF)$ の元によるテンソル積が考えられる。これにより $\mathcal{H}^i(E)$ は連続変形を持つので、 $\mathcal{H}^i(E) \neq 0$ である限り $\text{Ext}^1(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^i(E)) \neq 0$ であることがわかる。さらに $\chi(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^i(E)) = v(\mathcal{H}^i(E)) \cdot v(\mathcal{H}^i(E)) = 0$ で $\mathcal{H}^i(E) \simeq \mathcal{H}^i(E) \otimes_{\omega_X}$ であったから、Serre 双対より $\text{Ext}^1(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^i(E))$ は偶数次元 $2n_i$ を持つ。以上を合わせると

$$\begin{aligned} \sum_i 2n_i &\leq \dim \text{Ext}^1(E, E) \\ &= \dim \text{Hom}(k(y), k(y)[1]) = 2 \end{aligned}$$

となり、高々一つの n_i が非零であることがわかる。

これで、 E が層のシフトであることがわかった。 Φ に適当なシフトを合成すれば E は層だと仮定してよい。まず、 $\text{supp } E$ が 1 点 $x \in X$ の場合を考える。単純性より $E \simeq k(x)$ であり、下の補題 6.34 を適用することができ、 X と Y は双有理になる。 X と Y はどちらも小平次元が正の極小曲面だから、この場合 $X \simeq Y$ がただちに出る。

次に、 $\text{supp } E = F$ の場合を考える。このときは単純性より E は \mathcal{O}_F 加群となり⁷、さらに F 上の安定層になる。

$$\begin{aligned} v(\Phi(\mathcal{O}_Y)) \cdot v(E) &= v(\mathcal{O}_Y) \cdot v(k(y)) \\ &= (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 1 \end{aligned}$$

がすぐ確認できるので、補題 6.40 により偏極 h が取れて $\text{g.c.d.}(r(fh), d) = 1$ とできる。よって X 上の安定層のモジュライ空間 $M := M_v(h)$ を考えることができる。6.2 節参照。

$\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(M) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ を $M \times X$ 上の普遍変形族 \mathcal{E} から誘導される圏同値とする。このとき、 E を表す点 $e \in M$ を取ると、Fourier-向井変換の定義から $\Phi_{\mathcal{E}}(k(e)) = E$ である。従って、合成 $\Psi = \Phi^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{E}} : D^b(M) \rightarrow D^b(Y)$ は $\Psi(k(e)) = k(y)$ をみたし、下の補題 6.34 を適用する事ができるので、 $M \simeq Y$ となり、 $Y \simeq M_v(h)$ が証明された。□

補題 6.34 ([Hu], Corollary 6.14). $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ を核とする Fourier-向井同値 $\Phi_{\mathcal{P}}$ に対し、閉点 $x_0 \in X$ と $y_0 \in Y$ があり $\Phi_{\mathcal{P}}(k(x_0)) = k(y_0)$ となると仮定する。このとき x_0 の近傍 U から Y への射 f が存在し、任意の閉点 $x \in U$ に対し $\Phi_{\mathcal{P}}(k(x)) = k(f(x))$ となっている。

注意 6.35. 同様の方針に従ってさらに議論をしていくと、 $\kappa(X) = -\infty$ なる楕円曲面の Fourier-向井対に対しても、同様の結果が成り立つことがわかります。ここではその証明はできません。

6.8 Appendix A: 安定層のモジュライ

6.8.1 Appendix A-1: モジュライの存在

本稿で使われる内容について、簡単な纏めを示しておきます。もう少し詳しい概説は [Hu] の 10.3 節を、証明つきの取り扱いは [HL] を参照してください。

⁷この証明: E はある $n > 0$ に対し \mathcal{O}_{nF} 加群にはなります。 π の平坦性と射影公式により

$$\pi_* \mathcal{O}_{nF} = \pi_*(\pi^*(\mathcal{O}_{C, \pi(F)} / m_{\pi(F)}^n) \otimes \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{C, \pi(F)} / m_{\pi(F)}^n$$

となるので、 $H^0(\mathcal{O}_{nF}) = H^0(\mathcal{O}_{C, \pi(F)} / m_{\pi(F)}^n)$ 。一方 $H^0(\mathcal{O}_{nF}) \subset \text{End}(E) = \mathbb{C}$ なので、 $n = 1$ が従います。

モジュライを考えると、全ての層を表す関手は一般にスキームから程遠く、層のモジュライを考えるには単純層ないし安定層と呼ばれるクラスの層に制限するとうまくいくことがよく知られています。 X を非特異射影多様体、 $h = \mathcal{O}(1)$ を一つ固定した豊富因子とします。

定義 6.36. E を X 上の接続層で階数正のものとする。 E が半安定であるとは、任意の部分接続層 $F \subset E$ に対し

$$\chi(F(n)) \leq \chi(E(n)) \cdot (\text{rank}(F)/\text{rank}(E))$$

が十分大きい n に対し常に成り立つことをいう。

E が安定であるとは、 F が非自明な部分接続層のとき、上で真の不等号が成り立つときをいう。

例 6.37. 上の意味で安定な層は、単純である：即ち、 $\text{Hom}(E, E) = \mathbb{C}$ が成り立つ。

証明. $\chi(F(n))/\text{rank } F$ の多項式としての大小関係は、短完全列に関し凸性を持ちます。これを使うと、安定性の定義から任意の自己準同型 f の核と余核がゼロになることがわかります。さらにファイバーにおける固有値の一つを $\alpha \in \mathbb{C}$ とすれば安定性の定義から $f - \alpha \text{id}_E$ の像がゼロになることがわかり、 $f = \alpha \text{id}_E$ です。□

v を固定した多項式 (X が曲面の場合には向井ベクトル) とします。層のモジュライ関手

$$\mathcal{M}_v(h) : (\text{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow (\text{Set})$$

とは、 \mathbb{C} 上有限型のスキーム T に対し、 $X \times T$ 上の T -平坦な接続層 \mathcal{E} で、任意の閉点 $t \in T$ に対し \mathcal{E}_t が X 上の半安定な接続層で Hilbert 多項式 (X が曲面の場合には向井ベクトル) が v となるものの同値類を対応させる関手です。ここでの同値関係は、 T 上の可逆層 L に対し、 \mathcal{E} と $\mathcal{E} \otimes pr_* L$ を同じものと見なすものです。

関手 $\mathcal{M}_v(h)$ がスキーム $M_v(h)$ により表現されるとき、 $M_v(h)$ を精密モジュライスキームと言います。また、関手の間の射 $\mathcal{M}_v(h) \rightarrow \text{Mor}(\cdot, M_v(h))$ があり、任意の関手の射 $\mathcal{M}_v(h) \rightarrow \text{Mor}(\cdot, N)$ が $\text{Mor}(\cdot, M_v(h))$ を一意的に経由するとき、関手 $\mathcal{M}_v(h)$ はスキーム $M_v(h)$ により余表現される、または $M_v(h)$ は $\mathcal{M}_v(h)$ の最良近似であると言います。スキーム $M_v(h)$ が $\mathcal{M}_v(h)$ の最良近似であり、かつ $\text{Spec } \mathbb{C}$ 上における自然な射 $\mathcal{M}_v(h)(\text{Spec } \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mor}(\text{Spec } \mathbb{C}, M_v(h))$ が全単射のとき、 $M_v(h)$ は粗モジュライスキームであると言います。すぐわかるように、最良近似スキームは存在すれば同型を除いてただひとつです。

モジュライの存在に関しては Gieseker、丸山、Simpson による次の結果が基本的です。

定理 6.38. 粗モジュライスキーム $M_v(h)$ がいつでも存在し、射影的多様体である。ただし、ここでは、半安定層に対する S-同値 ([HL, section 1.5] 参照) で割った商関手を考えるものとする。安定層に対しては上の同値類と同じである。

精密モジュライの存在に関しては、次のような数値的判定法が有用です。簡潔に述べるために X は曲面で $v = (r, l, s)$ とおきます。

命題 6.39. $\text{g.c.d.}(r, lh, s) = 1$ ならば $M_v(h)$ が精密である。

これらの命題の証明はよく知らないので省略します。

本稿中での引用のために、補題を用意しておきます。

補題 6.40. ある $v' = (r', l', s') \in \tilde{H}^{1,1}(X, \mathbb{Z})$ が存在して、 $\langle v, v' \rangle = 1$ と仮定する。このとき適当な豊富因子 h がとれて $\text{g.c.d.}(r, hl, s) = 1$ となる。

証明. a を r, ll', s の最大公約数とする。この値は $\langle v, v' \rangle = ll' - rs' - sr'$ を割りきるので、 $a = 1$ である。 A を豊富因子とし $h = l' + krA, k \gg 0$ (あるいは r のかわりに s を使ってもよい) を考えると、これはいつかは豊富因子 h になり、 $\text{g.c.d.}(r, hl, s) = 1$ をみたす。□

6.8.2 Appendix A-2: p-安定性と μ -安定性

Appendix A-1 では階数正の層の安定性について扱いましたが、この章で扱う楕円曲面の Fourier-向井対は階数ゼロの接続層のモジュライ空間として現れます。ここではこの場合を含む一般の安定性についていくつかの定義と命題を記しておきます⁸。証明は、省略しますが、ここに書いてあるものは簡単です。

X は非特異射影多様体、 $\mathcal{O}(1)$ はその上の豊富な可逆層、 \mathcal{F} は X 上の接続層とし、 $\dim \text{supp } \mathcal{F}$ のことを $\dim \mathcal{F}$ と略記します。 \mathcal{F} の $\mathcal{O}(1)$ に関する Hilbert 多項式とは、 $p_{\mathcal{F}}(m) := \chi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m))$ で定義される関数でした。これは $\deg p_{\mathcal{F}} = \dim \mathcal{F} =: d$ をみたす多項式関数になることが示せます。

$$p_{\mathcal{F}}(m) = \alpha_{\mathcal{F},d} \frac{m^d}{d!} + \alpha_{\mathcal{F},d-1} \frac{m^{d-1}}{(d-1)!} + \cdots$$

と書くことにします。

一般に多項式 $p(m), q(m)$ に対して、大小関係を

$$p > q \Leftrightarrow \text{十分大きい任意の } m \text{ に対して } p(m) > q(m)$$

で定義します。 $p \geq q$ も同様に定義します。これは、多項式の各次数の係数の辞書式順序と同じものです。

定義 6.41. $\dim \mathcal{F} = d$ の接続層 \mathcal{F} が純であるとは、任意の部分接続層 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対して、 $\dim \mathcal{G} = d$ が成り立つときをいう。

命題 6.42. i) \mathcal{F} が純であることと、 $\text{Ass } \mathcal{F}$ の任意の点と同じ次元を持つことは同値である。

ii) \mathcal{F} が正の階数を持つとき、 \mathcal{F} が純であることとねじれを持たないことは同値である。

定義 6.43. 純 d 次元の接続層 \mathcal{F} が **p-安定 (Gieseker 安定)** であるとは、任意の非自明な部分接続層 \mathcal{G} に対して

$$\frac{p_{\mathcal{G}}}{\alpha_{\mathcal{G},d}} < \frac{p_{\mathcal{F}}}{\alpha_{\mathcal{F},d}}$$

が成り立つときをいう。ここで $<$ を \leq で置き換えた条件をみたすものを、**p-半安定** という。

定義 6.44. d 次元の接続層 \mathcal{F} に対し、 $\mu(\mathcal{F}) = \frac{\alpha_{\mathcal{F},d-1}}{\alpha_{\mathcal{F},d}}$ とおく。純 d 次元の接続層 \mathcal{F} が **μ -安定 (Mumford-竹本安定)** であるとは、任意の非自明な部分接続層 \mathcal{G} に対して

$$\mu(\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{F})$$

が成り立つときをいう。ここで $<$ を \leq で置き換えた条件をみたすものを、 **μ -半安定** という。

命題 6.45. 接続層 \mathcal{F} の安定性に関して次が成り立つ。

$$\mu\text{-安定} \Rightarrow \text{p-安定} \Rightarrow \text{p-半安定} \Rightarrow \mu\text{-半安定}$$

次に、 X が曲面の場合に上の定義を Riemann-Roch の定理を用いて書き下します。 $H \in |\mathcal{O}(1)|$ とし、 $c_i = c_i(X)$ と略記します。接続層 \mathcal{F} に対し、

$$\text{ch}(\mathcal{F}(m)) = (\text{rank } \mathcal{F} + c_1(\mathcal{F}) + \text{ch}_2(\mathcal{F})) \left(1 + mH + \frac{1}{2}m^2 H^2\right)$$

であり、 X が二次元の場合に、その Todd 類は

$$\text{td}(X) = 1 - \frac{1}{2}K_X + \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2)$$

⁸ここで扱う安定性は [Sim] で与えられたものです。

となるので、Riemann-Roch の定理を用いると

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}(m)) &= \int \text{ch}(\mathcal{F}(m)) \text{td}(X) \\ &= H^2 \text{rank } \mathcal{F} \frac{m^2}{2} + (c_1(\mathcal{F})H - \frac{1}{2}K_X H \text{rank } \mathcal{F})m \\ &\quad + \text{ch}_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}K_X c_1(\mathcal{F}) + \frac{\text{rank } \mathcal{F}}{12}(K_X^2 + c_2)\end{aligned}$$

がわかります。

系 6.46. \mathcal{F} が正の階数を持つ場合、定義 6.36 は上の p -安定性と同値である。

系 6.47. $\dim \mathcal{F} = 1$ の場合、 p -安定性と μ -安定性は同値である。

6.9 Appendix B: 小平次元

X は非特異射影多様体、 D をその上の因子とします。以下の事柄は対応する可逆層 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ にも全てそのまま適用されます。

定義 6.48. (X, D) の D 次元 (divisor 次元) $\kappa(X, D)$ を次で定義する。

$$\kappa(X, D) := \begin{cases} \sup_m \{ \dim \Phi_{|mD|}(X) \} & |mD| \neq \emptyset \text{ なる } m \text{ が存在する場合} \\ -\infty & \text{全ての } m \text{ に対し } |mD| = \emptyset \text{ の場合} \end{cases}$$

標準因子 K_X に対する $\kappa(X, K_X)$ を X の小平次元と呼び、単に $\kappa(X)$ で表す。

定義により $\kappa(X, D)$ は $-\infty, 0, 1, \dots, \dim X$ のどれかの値を取ります。

D 次元は次の特徴づけを持ちます。

命題 6.49 (cf. [Hu], Definition 6.25). 自然数 $m_0 > 0$ と正の数 α, β が存在して、十分大きい全ての自然数 m に対し

$$\alpha m^{\kappa(X, D)} \leq h^0(X, \mathcal{O}_X(mm_0D)) \leq \beta m^{\kappa(X, D)}$$

が成立する。

証明は [U] 等を参照してください。

定義 6.50. 因子 D がネフであるとは、 X 上のすべての曲線 l に対して $D \cdot l \geq 0$ となることをいう。

定義 6.51. 因子 D の数値的小平次元 $\nu(X, D)$ を次で定義する。

$$\nu(X, D) := \sup \{ \dim W \mid W \text{ は } X \text{ の部分多様体で、} D^{\dim W} \cdot W \neq \emptyset \}$$

標準因子 K_X に対する $\nu(X, K_X)$ を X の数値的小平次元と呼び、 $\nu(X)$ で表す。

定義により $\nu(X, D)$ は $0, 1, \dots, \dim X$ のどれかの値を取ります。明らかに $\nu(X, D) = \nu(X, rD)$, $r \neq 0$ が成り立ちます。

本稿中で使うのは次の補題です。

補題 6.52. $f: X \rightarrow Y$ を非特異射影代数多様体間の射、 D を Y 上の因子とする。

- i) D がネフなら f^*D もネフであり、 f が全射なら逆も成り立つ。
- ii) $\nu(X, f^*D) \leq \nu(Y, D)$ であり、 f が全射なら等号が成り立つ。

証明. どちらの命題も、前半部分は交点数に関する射影公式: $Z \subset X$ に関して $Z \cdot f^* D^{\dim Z} = f_*(Z) \cdot D^{\dim Z}$ 、からわかる。

後半部分は次の議論を使う: 「 $W \subset Y$ を既約部分多様体とすると、 $Z \subset f^{-1}(W)$ で $Z \rightarrow W$ が生成的有限な全射になるものが存在する。」これを認めると、i) は、 Y 上の曲線 W に対し Z をこのように取れば $(\deg f|_Z)DW = (f^*D)Z \geq 0$ (射影公式) となり証明できる。ii) も、 $W \cdot D^{\dim W} \neq 0$ なる W に対し上の Z を取れば $Z \cdot f^* D^{\dim Z} = (\deg f|_Z)W \cdot D^{\dim W} \neq 0$ となり逆の不等号が出る。

「」については、 $f^{-1}(W)$ を \mathbb{P}_W 内の相対的な射影多様体とみなし、 $\dim_W f^{-1}(W)$ 枚の一般の位置にある相対的な超平面で切ることで、求める Z が得られる。(あるいは生成点上の射影空間で超平面で切って Z を作り、その閉包をとって X の部分多様体とすればよい。) \square

$f = \Phi_{|mD|} : X \dashrightarrow W \subset |mD|^*$ とおきます。 mD の固定成分を B とおけば、これは $|mD - B|$ に付随する射と同じです。不確定点解消を $\sigma : \tilde{X} \xrightarrow{\text{bir}} X, g = f\sigma : \tilde{X} \rightarrow W$ とすると、 $g^* \mathcal{O}_W(1) \simeq \mathcal{O}(\sigma^*(mD - B) - E)$ となり、 E は σ の例外因子上に台を持つ正因子になります。 σ に対して相対的超平面 (あるいは超曲面) の選び方を十分一般にして上と同様の議論をすれば、 $Z \subset \tilde{X}$ が存在し $Z \rightarrow W$ は生成的有限射になり、かつ $Z \not\subset \sigma^* B \cup E$ となります。このとき $Z \cdot g^* \mathcal{O}_W(1)^{\dim Z} = \mathcal{O}_W(1)^{\dim W} = \deg W > 0$ 。いま、 D がネフと仮定すると、 $\sigma^*(mD)$ はネフ、 $\sigma^*(mD - B) - E$ は固定成分を持たないので

$$\begin{aligned} Z \cdot \sigma^*(mD)^{\dim Z} &= Z \cdot \sigma^*(mD)^{\dim Z - 1} (\sigma^*(mD) - (\sigma^*B + E) + (\sigma^*B + E)) \\ &\geq Z \cdot \sigma^*(mD)^{\dim Z - 1} (\sigma^*(mD) - (\sigma^*B + E)) \\ &\geq \dots \\ &\geq Z \cdot (\sigma^*(mD) - (\sigma^*B + E))^{\dim Z} \\ &= Z \cdot g^* \mathcal{O}_W(1)^{\dim Z} \end{aligned}$$

と計算できます。従って $\sigma(Z) \cdot (mD)^{\dim Z} = Z \cdot \sigma^*(mD)^{\dim Z} > 0$ がわかり、 $\dim W \leq \nu(X, D)$ がわかります。よって D がネフのときには $\kappa(X, D) \leq \nu(X, D)$ です。

6.10 Appendix C: 標準環の同型

ここで証明される結果は本稿中では直接引用されることはありませんが、議論の見通しをよくする基本的な内容であるので、紹介します。

命題 6.53. X と Y は非特異射影代数多様体で、導来同値とする。すると、 X と Y の標準環も同型になる: $R(X, \omega_X) \simeq R(Y, \omega_Y)$ 。

証明. 系 2.21 より、与えられた圏同値はある対象 $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ を用いて、Fourier-向井変換 $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ の形に書ける。 \mathcal{P} は同型を除き一意である。命題 2.16 より $\Phi_{\mathcal{P}}$ の逆関手が $\Phi_{\mathcal{P}_R}$ ないし $\Phi_{\mathcal{P}_L}$ の形に表されることがわかるが、Fourier-向井核の一意性より $\Phi_{\mathcal{P}_R} = \mathcal{P}^\vee \otimes q^* \omega_X[\dim(X)] \simeq \mathcal{P}^\vee \otimes p^* \omega_Y[\dim(Y)] = \Phi_{\mathcal{P}_L}$ となることがわかる。以下この対象を \mathcal{Q} とおく。また、 $n = \dim(X) = \dim(Y)$ とおく。

$\Phi_{\mathcal{Q}}^{Y \rightarrow X}$ が圏同値であることはその定義から従うが、ここで、 $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ もまた圏同値であることを示す。まず、合成

$$D^b(X) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} D^b(Y) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{Q}}} D^b(X)$$

は仮定より $\text{id}_{D^b(X)} \simeq \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$ (例 2.14(i)) と同型で、命題 2.17 よりその核は $\mathcal{R} = \pi_{13*}(\pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{23}^* \mathcal{Q})$ で与えられる。核の一意性から $\mathcal{O}_\Delta \simeq \mathcal{R}$ となる。 $X \times X$ または $X \times Y \times X$ の二つの X 成分を入れ替える写像を区別せず τ と書くことにすると、 Δ が τ で不変だから $\mathcal{O}_\Delta \simeq \tau^* \mathcal{O}_\Delta \simeq \tau^* \mathcal{R} \simeq \pi_{13*} \tau^*(\pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{23}^* \mathcal{Q}) \simeq \pi_{13*}(\pi_{12}^* \mathcal{Q} \otimes \pi_{23}^* \mathcal{P})$ となる。これは、合成

$$D^b(X) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{Q}}} D^b(Y) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} D^b(X)$$

が $\text{id}_{D^b(X)}$ に同型であることを示している。同じ議論をすることにより、 $\Phi_{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{\mathcal{P}} \simeq \text{id}_{D^b(Y)} : D^b(Y) \rightarrow D^b(Y)$ もわかり、 $\Phi_{\mathcal{Q}}^{X \rightarrow Y}$ が圏同値を与えることがわかった。

次に、 $\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{P} \in D^b(X \times X \times Y \times Y)$ を用いて $\Phi_{\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{P}} : D^b(X \times X) \rightarrow D^b(Y \times Y)$ を構成する。命題 2.23 よりこれは圏同値を与えている。命題 2.19 より、 ι を X (または Y) の対角線埋め込み $X \rightarrow X \times X$ とし、 $\mathcal{S} := \Phi_{\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{P}}(\iota_* \omega_X^k) \in D^b(Y \times Y)$ とおくと、 $\Phi_{\mathcal{S}} = \Phi_{\mathcal{P}} \circ \Phi_{\iota_* \omega_X^k} \circ \Phi_{\mathcal{Q}}$ が成り立つ。ここで、例 2.14 から、 $\Phi_{\iota_* \omega_X^k} \simeq S_X^k[-kn]$ と Serre 関手で書けるので、補題 1.4 と $\Phi_{\mathcal{P}} \circ \Phi_{\mathcal{Q}} \simeq \text{id}$ を使うと、 $\Phi_{\mathcal{S}} \simeq S_Y^k[-kn]$ がわかり、再び核の一意性を使うと $\mathcal{S} \simeq \iota_* \omega_Y^k$ であることがわかった。よって、 $\Phi_{\mathcal{Q} \boxtimes \mathcal{P}}$ が圏同値であることから

$$\text{Hom}_{X \times X}(\iota_* \omega_X^k, \iota_* \omega_X^l) \simeq \text{Hom}_{Y \times Y}(\iota_* \omega_Y^k, \iota_* \omega_Y^l)$$

が従う。 $k = 0$ のときを考えれば、

$$H^0(X, \omega_X^l) \simeq H^0(Y, \omega_Y^l)$$

がわかる。標準環 $R(X, \omega_X) = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \omega_X^l)$ の乗法は Hom の合成で書けるので、関手性を持つ上の同型と可換である。従って、上は環としての同型である。□

系 6.54. 上の仮定のもとで、反標準環も同型である： $R(X, \omega_X^{-1}) \simeq R(Y, \omega_Y^{-1})$ 。

証明. 上と同じ議論から出ている。□

系 6.55. もし X と Y の (反) 標準因子がともに豊富ならば、 X と Y は同型である。

系 6.56. X と Y の小平次元は等しい。

7 [Hu] の訂正表

頁	行	本文	訂正
92	5	with with	with
99	20	don't seen	don't seem
116	22	transforms $\Phi_{\mathcal{P}_R} : \dots$	transforms $\Phi_{\mathcal{P}_L} : \dots$
121	19	$D^b(X_i \times X_i)$	$D^b(X_i \times Y_i)$
134	11	E and E' have \dots	E and E' are isomorphic if and only if they have \dots
214	12	(in the diagram) $\Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$	$\Phi_{\mathcal{E}}$
220	30	f_1^t	f_2^t
228	32	$h^{1,0} = h^{1,0}$	$h^{1,0} = h^{0,1}$
249	26	i.e. $\pi = \pi_{XX} \circ \dots$	i.e. $\pi = \pi_{YY} \circ \dots$
250	6	$\Gamma \times Y \times Y \times Y$	$\Gamma \times Y \rightarrow Y \times Y$
254	23	(in the diagram) \sim	なまいまうが良い。
255	19	$E \hookrightarrow X$	$E \hookrightarrow \tilde{X}$
260	21	$\mathcal{D}^b = i_*(\pi^* \mathcal{D}^b(\mathbb{P}^k) \otimes \mathcal{O}(0, b))$	$\mathcal{D}^b = i_*(\pi^* \mathcal{D}^b(\mathbb{P}^k) \otimes \mathcal{O}(b, b))$
260	21	$\mathcal{D}'^b = i_*(\pi'^* \mathcal{D}^b(\mathbb{P}^l) \otimes \mathcal{O}(a, 0))$	$\mathcal{D}'^b = i_*(\pi'^* \mathcal{D}^b(\mathbb{P}^l) \otimes \mathcal{O}(a, a))$
277	9	Proposition 6.4	Proposition 6.19
278	9	Propositions 6.3 and 6.3	Propositions 6.15 and 6.18
279	4	Proposition 6.4	Proposition 6.19
以下、REFERENCES			
	[10]	(2994)	(2004)
	[36]	(1071)	(1971)
	[52]	hyperkähler	hyperkähler
	[53]	shaves	sheaves
	[92]	On equivalences \dots	Equivalences \dots
	[102]	math.AG/050354	math.AG/0503548
書いてある内容を汲み取れなかった箇所			
149	30-33	(short explanation there)	(ほぼ必要ない)

参考文献

- [BHPV] W. Barth, K. Hulek, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces. Second Enlarged Edition*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **4**, Springer, 2004.
- [Be] A. Beauville et al, Géométrie des surfaces K3 : Modules et périodes, *Astérisque*, **126** 1985.
- [Br1] T. Bridgeland, Fourier-Mukai transforms for elliptic surfaces, *J. reine angew. math*, **498** (1998), 115–133.
- [Br2] T. Bridgeland, Stability conditions on K3 surfaces, math.AG/0307164.
- [FN] A. Fujiki and S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformation", *Publ. RIMS Kyoto Univ*, **7** (1971), 637–644.
- [GM] S.I. Gelfand, Yu.I. Manin, *Methods of Homological Algebra. Second Edition*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2003.
- [Ha1] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics, **20**, Springer-Berlin Heidelberg, 1966.
- [Ha2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1977.
- [HL] D. Huybrechts and M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics E 31, 1977.
- [Hu] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2006.
- [K] 川又雄二郎, 代数幾何と導来圏, *数学*, **58** (2006), 64–85.
- [KM] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, **134** 1998, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [N] Y. Namikawa, Mukai flops and derived categories, *J. Reine Angew. Math*, **560** (2003), 65–76.
- [Ma] 松村英之, 可換環論, 共立出版, 1980.
- [Mi] J. S. Milne, Abelian varieties, in *Arithmetic Geometry*, G. Cornell and J. Silverman, Eds, Springer-Verlag, Berlin, (1986), 103-150.
- [Mum] D. Mumford, *Abelian varieties*, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.
- [Muk] S. Mukai, Duality between $\mathbf{D}(X)$ and $\mathbf{D}(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, *Nagoya Math. J*, **81** (1981), 153-175.
- [O] D. O. Orlov, Equivalences of derived categories and K3 surfaces, *J. Math. Sci.* **84** No.7 (1997) 1361-1381.
- [PSS] I.I. Pjatečnik-Sapiro and I.R. Šafarevič, A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, *Math. USSR Izv*, **5** (1971), 547–588.

- [Se] J.P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, **7**, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1973.
- [Sim] C.T. Simpson, Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **79** (1994), 47–129.
- [Siu] Y.T. Siu, Every $K3$ surface is Kähler, *Invent. Math.*, **73** (1983), 139–150.
- [U] 上野健爾, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **439**, 1975.