京　都　大　学

数学 I

$\boxed{1}$から$\boxed{5}$までの全問を解答せよ.

$\boxed{1}$ k は可換体、n は正の整数であるとする。k が無限体ならば、k 上の 0 でない n 変数の多項式 $f(x_1,\ldots,x_n)$ について、$f(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$ となる k の元 $a_1,\ldots,a_n$ があることを示せ。

$\boxed{2}$

$\mathbb{R}$ を実直線とする。$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相を与える。

(1) 任意の自己同相写像 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ は $f(0)=0$ をみたすことを示せ。

(2) $\mathbb{R}_+$ は位相群の構造をもつか。

$\boxed{3}$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正数列で、$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ をみたすどのような正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n<\infty$ であると仮定する。このとき $\sum_{n=1}^{\infty}x_n<\infty$ であることを示せ。

$\boxed{4}$ $t\geq 0$ で定義され、周期 $a>0$ を持つ実数値連続函数 $f(t)$ を考える。(すなわち $f(t+a)=f(t)$)

(1) z を複素数とする。$\mathrm{Re}z>0$ のとき積分 $F(z)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-zt}dt$ は z の正則函数であることを示せ。

(2) $F(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上に有理型函数として解析接続できることを示せ。

$\boxed{5}$ $2n$ 次の複素正方行列 X を次の様に n 次正方小行列に分ける：

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

X は正則行列とし、その逆行列 Y を同じく

$$Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

と n 次正方小行列に分ける。このとき $\det D \neq 0$ ならば

$$\det Y = \frac{\det E}{\det D}$$

が成立することを示せ。

$\boxed{A}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の整函数 f で

$$|f(z)| \leq 1 + |z| \qquad (z \in \mathbb{C})$$

を満たすものをすべて求めよ。

数学 II（専門科目）

この 1 2 問題中、<u>3 問題</u> を選択せよ。

$\boxed{1}$ n は 2 以上の自然数とする。複素数体 $\mathbb{C}$ 上の変数 X および $X^n + X^{-n}$ を $\mathbb{C}$ につけ加えて得られる有理函数体 $L = \mathbb{C}(X)$ および $K = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$ を考える。

(1) L は K 上の Galois 拡大になることを示し、その Galois 群を求めよ。

(2) $n = 3$ のとき、体の拡大 L/K の中間体を全て求めよ。

$\boxed{2}$ n 次正則複素行列の全体 $GL(n,\mathrm{C})$ は n 次の縦ベクトル全体からなる複素ベクトル空間 V に左から自然に作用する。$GL(n,\mathrm{C})$ の有限群とは限らない部分群 G に対して、V の G 不変部分空間 F（すなわち、任意の $g \in G$ に対して、$g(F) \subset F$ が成り立つ V の部分ベクトル空間）が V または $\{0\}$ しかないとき、G を $GL(n,\mathrm{C})$ の既約部分群と呼ぶ。このとき、次の問に答えよ。

(1) $M \in GL(n,\mathrm{C})$ がある既約部分群 G の全ての元と可換であるとき、M はどのような形をしているか。

(2) 既約部分群 G の中心 $Z(G)$ が有限群であれば $Z(G)$ は巡回群であることを示せ。

(3) $\det : GL(n,\mathrm{C}) \to GL(1,\mathrm{C}) = C^*$ は行列式をとる写像とする。既約部分群 G について、$\det(G)$ が有限群のとき、G の中心 $Z(G)$ は有限巡回群であることを示せ。

$\boxed{3}$ R^1 は 1 次元ユークリッド空間、I をその閉単位区間とする。空間 $I \times \mathrm{R}^1$ の元に同値関係を $(0,x) \sim (1,-x)$ と定義し、その商空間 $(I \times \mathrm{R}^1)/\sim$ を E と表す。円周 S^1 は I の両端を同一視した空間とみなす。

(1) 自然な射影 $p : E \to S^1$ は 1 次元実ベクトル束であることを示せ。

(2) $p : E \to S^1$ は自明束と同型でないことを示せ。

(3) $p : E \to S^1$ とそれ自身のホイットニー和（直和）は自明束と同型であることを示せ。

$\boxed{4}$ $\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ の次のような部分多様体

$$Q = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3 | \mathrm{x}\cdot\mathrm{x} = \mathrm{y}\cdot\mathrm{y} = 1,\ \mathrm{x}\cdot\mathrm{y} = 0\}$$

を考える。ただしベクトル $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対し $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$ は内積 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を表す。$\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ の点 (x,y) における接ベクトル空間 $T_{(\mathrm{x},\mathrm{y})}(\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3)$ を自然に $\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ と同一視する。

(1) 多様体 Q の点 (x,y) における接ベクトル空間 $T_{(\mathrm{x},\mathrm{y})}(Q)$ の一組の基底を $\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ のベクトルとして与えよ。

(2) $i : Q \to \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ は包含写像とする。$\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ の 2-form $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3$ に対し、その Q 上への引き戻し $i^*\omega$ は Q のどの点でも 0 にならないことを示せ。

$\boxed{5}$ 集合
$$X = \{z \in \mathbf{C} \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$$
から
$$Y = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\} - \{z \in \mathbf{C} \mid |z - r| < \delta\}$$
の上への同相写像 f が、X の内部では正則函数になっていると仮定する。ただし $-1 < r < 1$, $0 < \delta < 1 - |r|$ とする。このとき、

(1) 鏡像の原理を用いて、f はある一次分数変換の X への制限と一致することを示せ。

(2) $f(1) = 1$ となる f はただ一つであることを示せ。

$\boxed{6}$ $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の $L^1(\mathbf{R})$ に属する関数とする。全ての有理数 q に対し、微分方程式
$$(\frac{d}{dx} + iq)u_q(x) = f(x)$$
が $L^2(\mathbf{R})$ に属する解 $u_q(x)$ を持つなら、$f(x)$ は恒等的に零でなければならないことを示せ。ただし、$L^p(\mathbf{R})$ は p 乗絶対可積分な関数全体とする。

$\boxed{7}$ H を可分な実ヒルベルト空間とし、その内積を $(\ ,\ )$, この内積から決められるノルムを $\|\ \|$ と表わす。$\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は H の完全正規直交系で、 H の元の列 $\{v_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は正の数 ε に対し
$$|(v_n, e_m) - \delta_{nm}| \leq \varepsilon(1 + |m - n|)^{-2} \qquad (m, n \in \mathbf{Z})$$
を満たしているとする。ただし δ_{mn} はクロネッカーのデルタである。

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が有限個を除いて 0 である実数列とするとき、$\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ と ε には依存しない正数 C が存在して
$$\left\|\sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n v_n - \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n e_n\right\| \leq \varepsilon C \left\{\sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n^2\right\}^{1/2}$$
が成立することを示せ。

(2) (1) で定まる C に対して、$\varepsilon C < 1$ のとき H の元はすべて
$$u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n v_n \quad (\sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n^2 < \infty)$$
の形に一意的に表されることを示せ。

$\boxed{8}$ 次の2問のうちいずれか1問を選択せよ。(2問解答した場合は不利な扱いを受ける。)

$\boxed{8\text{-}1}$ $\mathbb{R}$ 上の無限回連続的微分可能関数全体を $C^\infty(\mathbb{R})$ とし、$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し $\varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R})$ ($t \in \mathbb{R}$) を $\varphi_t(x) = \varphi(t+x)$ によって定める。いま $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で張られる $C^\infty(\mathbb{R})$ の線型部分空間 F_φ が $\mathbb{C}$ 上2次元であるとする。次の問に答えよ。

(1) 任意の t_i ($i = 1, 2, 3$) に対して

$$\begin{vmatrix} \varphi''_{t_1}(x) & \varphi''_{t_2}(x) & \varphi''_{t_3}(x) \\ \varphi'_{t_1}(x) & \varphi'_{t_2}(x) & \varphi'_{t_3}(x) \\ \varphi_{t_1}(x) & \varphi_{t_2}(x) & \varphi_{t_3}(x) \end{vmatrix} = 0$$

を示せ。ただし φ' は関数 φ の微分を表す。

(2) このような φ をすべて求めよ。

$\boxed{8\text{-}2}$ a を正定数とし、次の常微分方程式の境界値問題を考える。

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) + au(x) = f(x) \qquad 0 < x < 1 \qquad (\text{ア})$$

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad (\text{イ})$$

$f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ 上の滑らかな実数値関数で、(ア)(イ) が $C^4([0,1])$ で解を持つように与えられている。区間 $0 \leq x \leq 1$ を等分して $h = \frac{1}{n}$ とおき、$x_k^n := kh$ ($0 \leq k \leq n$) と定め、$u(x_k^n)$ に相当する値を u_k^n と表して次の差分方程式を考える。

$$-\frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{h^2} + au_k^n = f(x_k^n) \qquad 1 \leq k \leq n-1 \qquad (\text{ウ})$$

$$u_0^n = u_n^n = 0 \qquad (\text{エ})$$

(1) $x = (x_1, \cdots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して $\|x\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n-1} |x_k|$ と定める。$(n-1)$ 次の実正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、行列のノルムを

$$\|A\|_\infty := \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

によって定めると

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}| \right)$$

が成立することを示せ。

(2) (ウ)(エ) を行列表示したときの $(n-1)$ 次の係数行列を A_n とする。即ち

$$A_n = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+ah^2 & -1 & & O \\ -1 & 2+ah^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ O & & -1 & 2+ah^2 \end{pmatrix}$$

$\| \ \|_\infty$ を (1) で定めたノルムとすると、任意の自然数 n に対して

$$\|A_n^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ。

(3) $u(x)$ を (ア)(イ) の厳密解、$\{u_k^n\}_{k=0}^n$ を (ウ) (エ) の厳密解とし、$e_k^n := u(x_k^n) - u_k^n$ ($0 \le k \le n$) とおく。$\{e_k^n\}_{k=1}^{n-1}$ が満足する差分方程式を調べることにより

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{0\le k\le n} |e_k^n|\right)$$

を求めよ。

$\boxed{9}$ 実係数の n 次多項式

$$p(x) = a_0 x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^k$$

を考える。ただし $n \ge 1$, $a_k \ge 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $a_0 \ne 0$, $a_n \ne 0$ とする。これについて以下のことを示せ。

(1) $p(x) = 0$ は唯一の正の実解 r をもつ。

(2) $\hat{r} = \max_{1\le k\le n}(na_k/a_0)^{1/k}$ とおくと $r \le \hat{r}$ となる。

(3) 方程式 $p(x) = 0$ に対するニュートン法

$$x_{j+1} = x_j - \frac{p(x_j)}{p'(x_j)} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \quad x_0 = \hat{r}$$

によって定義される数列 $(x_j)_{j=0}^\infty$ は、すべての項が r に等しいか、または単調に減少して r に収束する。

$\boxed{10}$

(1) 有限次元の複素線型空間 V における正定値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を一つ定める。$\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関するエルミート作用素 A, B, C が交換関係

$$AB - BA = iC$$

を満たすとき（不確定性関係と呼ばれる）次の不等式

$$\Delta_v A \cdot \Delta_v B \geq \frac{1}{2}|\langle Cv, v\rangle|$$

が成り立つ事を示せ。ただし v は V の任意のベクトルであり、

$$\Delta_v A = \sqrt{\langle (A - a1)^2 v, v\rangle}, \quad a = \langle Av, v\rangle$$

とおいた（1 は V の単位作用素）。

(2) 上記の条件のもとでは、右辺のエルミート作用素 C を単位作用素の非零スカラー倍 $\lambda\cdot 1$ $(\lambda \neq 0)$ にとることはできない事を示せ。$C = \lambda\cdot 1$ $(\lambda \neq 0)$ ととれるための複素線型空間 V に対する条件、およびその場合の A, B のスペクトルの特徴について述べよ。

$\boxed{11}$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して次の計算手順を考える。

[計算手順]

（A の行番号、列番号の集合をそれぞれ R, C と記すとき、$I \subseteq R$, $J \subseteq C$ であり、また n は整数である。）

(i)　$n \leftarrow 0, I \leftarrow \phi, J \leftarrow \phi$ と初期化する（ϕ は空集合を表す）。

(ii)　条件 $(*) : a_{ij} \neq 0,\ i \in R \setminus I,\ j \in C \setminus J$
を満たす (i, j) が存在しなければ終了する（ただし例えば $R \setminus I$ は I の R内での補集合を表す）。

(iii)　条件 $(*)$ を満たす (i, j) が存在すれば、その<u>任意の</u>一組 (i, j) を選んで、

$$n \leftarrow n + 1, \quad I \leftarrow I \cup \{i\}, \quad J \leftarrow J \cup \{j\}$$

として (ii) に戻る。　[計算手順　終]

上の計算手順の結果として得られる n の値は、(iii) における任意性によって一意には定まらないが、その最大値、最小値をそれぞれ $n_{\max}$, $n_{\min}$ とするとき

(1) $n_{max} = 2n_{min}$ となる例をつくれ。

(2) 常に $n_{max} \leq 2n_{min}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{12}$ アッカーマン函数を計算するプログラム：

$$
A(x,y) \leftarrow \text{if} \quad x = 0 \quad \text{then} \quad y+1 \quad \text{else if} \quad y = 0 \quad \text{then} \quad A(x-1,1) \quad \text{else} \quad A(x-1, A(x, y-1))
$$

が、すべての非負整数の対 (a,b) $(a,b \geq 0)$ に対して停止し、そのとき

$$
A(a,b) \geq a+b+1
$$

が成り立つことを証明せよ。

外国語

◎　問題は，$\boxed{E}$，$\boxed{D}$，$\boxed{F}$，$\boxed{R}$ の　4題　ある．この4問題中，2問題　を解答せよ．

$\boxed{E}$ 次の文章は米国のある大学院（博士課程に相当）入学案内の一部である。これを和訳せよ。

The Graduate School is open to men and women from the United States and abroad who have graduated from approved institutions of learning as well as to students who have already earned their master's degrees. The size of each entering class is limited and admission is necessarily selective. Criteria for admission include the applicant's academic record, which in general ought to exhibit at least a *B* average and ought to show distinction in the field of his proposed program of graduate study or related fields; his letters of recommendation; and his ability to fulfill the language requirements of The Graduate School. Admission is competitive, and some candidates who meet or surpass the minimum requirements may have to be denied acceptance.