令和２年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

専門科目

◎　問題は 12 題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{10}$ の 10 題のうちの 2 題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{12}$ のうちの 2 題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 2 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 2〜4 題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題冊子は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ p を素数，n を非負整数とする．このとき，位数 $3p^n$ の有限群は可解群であることを示せ．p 群が可解群であるという事実は用いてもよい．

$\boxed{2}$ $p \geq 5$ を素数とし，$\sqrt{-p} + \sqrt[3]{p}$ を含む $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大体のうち最小のものを K とする．このとき，Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ．ただし，$\mathbb{Q}$ の代数拡大体はすべて $\mathbb{C}$ の部分体と考える．

$\boxed{3}$ 整域 A に対する次の性質 $(*)$ を考える．

$(*)$　A の $\{0\}$ でない素イデアルのうち極小なものは単項イデアルである．

A を Noether 整域，$x \in A$ を 0 でない A の素元とする．このとき，$A[1/x]$ が性質 $(*)$ を持てば，A も性質 $(*)$ を持つことを示せ．

$\boxed{4}$ $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし，写像 $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f((x, y), (z, w)) = (x + z, x + w, y + z, y + w)$$

で定める．

(1) f がはめ込みであるかどうかを判定せよ．

(2) $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ 上の微分形式 α を

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

で定める．このとき，$(f^*\alpha)_p = 0$ を満たす $S^1 \times S^1$ の点 p 全体の集合を求めよ．

$\boxed{5}$ $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ とする．

(1) $X = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid q \neq -p\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) $A = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid q \neq \pm p\}$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{6}$ 複素 Hilbert 空間 $L^2([0,1])$ のノルムを

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

で表す．$[0,1]^2$ 上の Lebesgue 可測関数 K は

$$A = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dy < \infty \quad \text{および} \quad B = \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,dx < \infty$$

を満たすとする．作用素 $T\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ を

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

で定める．

(1) 任意の $f \in L^2([0,1])$ に対して $\|Tf\| \le \sqrt{AB}\|f\|$ を示せ．

(2) $K(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}}$ のとき作用素 T はコンパクトであることを示せ．

$\boxed{7}$ μ は区間 $(0,\infty)$ 上の Borel 測度であって，条件

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y}\,\mu(dy) < \infty, \quad \int_{(0,1]} \frac{1}{y}\,\mu(dy) = \infty$$

を満たすとし，$[0,\infty)$ 上の関数 f を

$$f(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{1-2e^{-x/y}}{e^{-x}+y}\,\mu(dy)$$

で定める．

(1) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．

(2) $f(x) = 0$ を満たす $x \in (0,\infty)$ が存在することを示せ．

$\boxed{8}$ C^2 級関数 $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は以下を満たすとする:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t) + \alpha, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

ここで，$\alpha = \displaystyle\int_0^1 u(x,0)\,dx$ とする．

(1) 任意の $t \geq 0$ に対し，$\displaystyle\int_0^1 u(x,t)\,dx = \alpha$ であることを示せ．

(2) $E(t) = \displaystyle\int_0^1 (u_x(x,t))^2\,dx$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |\alpha - u(x,t)| = 0$ を示せ．

$\boxed{9}$ 2 次元平面内の粘性流体の原点に関する軸対称な流れを考える．平面極座標での方位角方向の速度 $u(r,t)$ の満たす方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\nu(r)}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right] \tag{$*$}$$

で与えられる．r は動径座標，t は時間，$\nu(r)$ は粘性率であり，定数 $\alpha < 1$ に対して粘性率が $\nu(r) = r^\alpha$ で与えられるとする．

(1) $(*)$ の定常な流れ $u = u_0(r)$ を求めよ．ただし $u_0(r)$ は $u_0(1) = 1$，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} u_0(r) = 0$ を満たすとする．

(2) 関数 $\delta(t)$ を導入し，変数変換 $\eta = r/\delta(t)$ を考える．$u = F(\eta)/r$ の形の解を仮定する．$F(\eta)$ の従う方程式が η のみにより表されるとき $\delta(t)$ の形を定めよ．ただし $\delta(0) = 0$，$\delta(1) = 1$ とする．

(3) 初期条件および境界条件が $u(r,0) = u_0(r)$, $u(0,t) = 0$ $(t > 0)$ で与えられるとする．(2) で定めた $\delta(t)$ に対して $F(\eta)$ の満たす方程式と境界条件 $F(0)$, $F(\infty)$ を求めよ．

(4) $F(\eta)$ を解いて，$u(r,t)$ を求めよ．

$\boxed{10}$ $\mathbb{N}$ を非負整数全体の集合とする．$\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，各 n について

$$\mathcal{C}_n \subseteq \{\varphi \mid \varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\}$$

であり，かつ以下の条件を満たすような最小の集合族とする．

- $\mathsf{zero}() = 0$ で定義される関数 zero は $\mathcal{C}_0$ に属する．
- $\mathsf{suc}(y) = y + 1$ で定義される関数 suc は $\mathcal{C}_1$ に属する．
- $1 \leq i \leq n$ のとき，$\mathsf{proj}_i^n(y_1, \ldots, y_n) = y_i$ で定義される関数 proj_i^n は $\mathcal{C}_n$ に属する．
- $h \in \mathcal{C}_m$, $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}_n$ ならば次のように定義される関数 f は $\mathcal{C}_n$ に属する．

$$f(y_1, \ldots, y_n) = h(g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_n))$$

- $g \in \mathcal{C}_n$, $h \in \mathcal{C}_{n+2}$ ならば次のように定義される関数 f は $\mathcal{C}_{n+1}$ に属する．

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(x+1, y_1, \ldots, y_n) &= h(x, y_1, \ldots, y_n, f(x, y_1, \ldots, y_n)) \end{aligned}$$

(1) 次の式

$$\mathsf{sub}(x, y) = \begin{cases} 0 & (x < y \text{ のとき}) \\ x - y & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

により定義される関数 sub が $\mathcal{C}_2$ に属することを示せ．

(2) $g, s \in \mathcal{C}_1$, $h \in \mathcal{C}_3$ が与えられたとき，

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) \\ f(x+1, y) &= h(x, y, f(x, s(y))) \end{aligned}$$

により定義される関数 f が $\mathcal{C}_2$ に属することを示せ．

$\boxed{11}$ $G=(V,E)$ を有限の頂点集合 V と辺集合 E を持つ無向グラフとし，$w: E\to\mathbb{R}$ を G の辺重みとする．

(1) $T_1, T_2 \subseteq E$ を相異なる全域木とし，$e_1 \in T_1 \setminus T_2$ とする．このとき，ある $e_2 \in T_2 \setminus T_1$ が存在して，$(T_1 \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$ と $(T_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_1\}$ のどちらも全域木となることを示せ．

(2) 全域木を含む辺部分集合 $F \subseteq E$ に対して，$T \subseteq F$ を満たす全域木 T の重み $\sum_{e\in T} w(e)$ の最大値を $f(F)$ と表す．全域木を含む辺部分集合 $X, Y \subseteq E$ と辺 $e \in E$ が $X \subseteq Y \subseteq E \setminus \{e\}$ を満たすとき，

$$f(X\cup\{e\}) + f(Y) \geq f(X) + f(Y\cup\{e\})$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{12}$ 一粒子の古典力学に対するハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}\left(e^{-f(t)}\,p^2 + e^{f(t)}\omega(t)^2x^2\right)$$

で与えられるものとする．ただし，$p, x \in \mathbb{R}$ はそれぞれ粒子の運動量，位置座標であり，時刻 t の関数 $f(t), \omega(t)$ は 0 を含む適当な開区間 I 上で定義された滑らかな実関数で $f(0)=0$ を満たすものとする．以下，$i=\sqrt{-1}$ であり，量子論においては $\hbar = 1$ とする．

(1) 時刻 $t \in I$ での粒子の位置座標 $x(t)$ に対する運動方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた運動方程式の独立解を選び，$\lambda(t), \mu(t)$ とし，$\mu(t) > 0$ $(t\in I)$ を仮定する．新たな位置座標 ξ，新たな時刻 τ を

$$\xi = \frac{x}{\mu(t)}, \quad \tau = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$$

により導入するとき，この新たな位置座標は新たな時刻に対し，自由粒子の運動方程式を満たすことを示せ．

(3) この系を量子化した際のシュレディンガー方程式の解 $\psi(x,t)$ $(x\in\mathbb{R}, t\in I)$ が与えられているとき，$\varphi(\xi,\tau)$ を (2) の記号を使って

$$\psi(x,t) = \mu(t)^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{2W(t)}\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}x^2\right)\varphi(\xi,\tau)$$

により導入する．ただし，$W(t) = \dot{\lambda}(t)\mu(t) - \lambda(t)\dot{\mu}(t)$ であり，$W(0)=1$ を仮定する．$W(t) = e^{-f(t)}$ であることに注意して，$\varphi(\xi,\tau)$ が (ξ,τ に対して）自由粒子のシュレディンガー方程式を満たすことを示せ．